BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ____________________

ABW0809
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 03/31/89 CC STAT mm E/L 1
010: : |a g 01002181//r862
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B103671
035/2: : |a (CaOTULAS)160220246
040: : |a DLC/ICU |c ICU |d DLC |d MiU
050/1:0 : |a QA3 |b .H58
100:1 : |a Hesse, Ludwig Otto, |d 1811-1874.
245:00: |a Ludwig Otto Hesse's gesammelte werke. |c Hrsg. von der Mathematisch-physikalischen classe der Königlich bayerischen akademie der wissenschaften.
260: : |a München, |b Verlag der K. Akademie, In commission des G. Franz'schen verlags (J. Roth) |c 1897.
300/1: : |a viii p., 1 L., 732 p. |b front. (port.) |c 30 cm.
500/1: : |a "Otto Hesse's lebenslauf": p. [711]-722.
504/2: : |a "Verzeichniss der selbständig erschienenen werke O. Hesse's": p. [723]

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: ____________
Camera Operator: ____________

LUDWIG OTTO HESSE'S

GESAMMELTE WERKE.



Dr. Otto Hesse.

LUDWIG OTTO HESSE'S

GESAMMELTE WERKE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DER MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MIT EINEM BILDNISS OTTO HESSE'S.

MÜNCHEN 1897.
VERLAG DER K. AKADEMIE
IN COMMISSION DES G. FRANZ'SCHEN VERLAGS (J. ROTH).

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub in München.

VORWORT.

Die Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften hat im Jahre 1892 auf Antrag von dreien der Unterzeichneten beschlossen, die gesammelten Abhandlungen Otto Hesse's, des einstigen ordentlichen Mitgliedes ihrer mathematisch-physikalischen Classe, auf ihre Kosten herausgeben zu lassen. Mit dieser Aufgabe wurden die Antragsteller betraut, welche sodann noch, nach der ihnen gewährten Vollmacht, den mitunterzeichneten Professor Gundelfinger, der sich schon früher mit dem Nachlass Hesse's beschäftigt, cooptirt haben. Die Sammlung hatte sich auf die sämmtlichen Abhandlungen Hesse's zu erstrecken, mit Einschluss derjenigen, welche aus dem Nachlass bereits veröffentlicht waren, oder als zur Veröffentlichung geeignet sich noch ergeben möchten. Ausgeschlossen waren die selbständig erschienenen Werke, welche alle den Charakter von Lehrbüchern tragen.

Ueber die Gesichtspunkte, welche uns bei der Herausgabe geleitet haben, schicken wir einige Worte voraus. Wir haben den Nachlass von den durch Hesse selbst veröffentlichten Abhandlungen getrennt, aber für beide Theile die chronologische Anordnung gewählt, weil eine solche das Schaffen eines Autors im natürlichen Licht hervortreten lässt, und insbesondere, weil in dem vorliegenden Falle, wo der ganze Stoff in einem Bande vereinigt vorliegt, eine scharfe Trennung nach Gebieten überflüssig erscheint. Ueberdies decken sich hier bezüglich der wichtigeren Arbeiten die zeitliche und sachliche Anordnung nahezu, indem hintereinander folgen die Arbeiten über:

I. die Theorie der Curven und Oberflächen zweiten Grades (mit Determinantentheorie etc.; Nr. 1—4, 6, dann die späteren Nr. 17, 22, 23, 31—41, 43, 44, sowie der Nachlass);

II. die Theorien der Elimination, der Curven dritten Grades und der Gleichungen (Nr. 7—16);

III. die allgemeine Theorie der Curven und Formen (Nr. 18—21, 30), die der Curven vierten Grades (Nr. 24—26, 28);

IV. Differentialgleichungen (Nr. 5), Variationsrechnung (Nr. 27), Mechanik (Nr. 42).

Nach diesen vier Gebieten haben die Herausgeber auch im Allgemeinen die Arbeit unter sich vertheilt, indem dieselben bezüglich von Lüroth, Gundelfinger, Noether, Dyck übernommen worden sind — wie es die Chiffern der am Schlusse beigefügten Anmerkungen genauer nachweisen —, aber unter gemeinsamer Besprechung und Correcturlesung, so dass auch die Verantwortung eine gemeinsame ist. Der Bedeutung Hesse's, als kräftigsten Vertreters der Verbindung zwischen Algebra und Geometrie, sowie als Pfadfinders und mächtigen Förderers beider Disciplinen, glaubten wir nur zu entsprechen, wenn wir die Abhandlungen im Ganzen in ihrer ursprünglichen Form beliessen, nur von äusseren Druck- oder Schreibfehlern gereinigt, und wenn wir auch diejenigen Abhandlungen unverändert mit aufnahmen, welche (wie Nr. 21, bezw. 30, 42) sich nachträglich als unrichtig erwiesen haben. Dagegen haben wir uns bemüht, in den Anmerkungen, welche wir dem Bande beigegeben, den kritischen und historischen Forderungen gerecht zu werden, und zugleich die an Hesse unmittelbar anschliessende Literatur zu bezeichnen. Zu genauerer Datirung der Abhandlungen und zu anderen Notizen über dieselben in diesen Anmerkungen, wie auch zur Hilfe bei der Correctur konnte besonders der an Ausarbeitungen reiche Nachlass Hesse's herangezogen werden, zu letzterem Zwecke auch die Randnotizen in einigen Handexemplaren Hesse's, darunter insbesondere solche, welche wir der gütigen Vermittlung von Professor O. Henrici verdanken.

Der erwähnte Nachlass Hesse's besteht, wie das am Schlusse des Bandes mitgetheilte Verzeichniss erweist, aus zahlreichen und wohlgeordneten Bänden, die Ausarbeitungen von Abhandlungen und Vorlesungen, sowie wissenschaftliche Diarien, je aus einzelnen Theilen nahezu chronologisch zusammengeheftet, enthalten. Insbesondere ergeben die Diarien eine Uebersicht fast des täglichen Schaffens Hesse's von Beginn seiner Thätigkeit an bis in die 50er Jahre. Das Material war zuerst grösseren Theils Prof. Dubois-Reymond in die Hände gegeben worden, ging aber bald theilweise in die von Prof. Gundelfinger über, welcher die hier unter Nr. 3, 4 des „Nachlasses" vorliegenden Aufsätze seiner Zeit veröffentlichte, während Nr. 5 durch Herrn F. Caspary an die Oeffentlichkeit trat. Wir haben den gesammten, nun in München vereinigt liegenden Nachlass einer genauen Durchsicht unterzogen, entschlossen uns aber nur zur Aufnahme zweier weiterer Aufsätze: Nr. 1 des „Nachlasses", welche die, bisher unbekannte, Fortsetzung der frühesten Abhandlung Hesse's bildet, und Nr. 2 desselben, mit den analytischen Beweisen einiger geometrischer Sätze aus der Zeit 1844/45.

Aus Personalacten, Briefen und Reiseberichten Hesse's, die uns von Seiten der Familie in entgegenkommendster Weise zur Verfügung gestellt worden sind, sowie aus gütigen eigenen Berichten derselben, haben wir noch Daten für einen Lebenslauf Hesse's entnehmen können, den wir ebenfalls gegen den Schluss des Bandes anfügen. Da ausführliche wissenschaftliche Nekrologe auf Hesse von F. Klein [1]) und von M. Noether [2]) existiren, und eine in der königl. bayer. Akademie gehaltene Rede von G. Bauer [3]) sowohl die wissenschaftliche als auch (ebenfalls unter Benutzung der „Personalacten") die persönliche Seite behandelt, so glauben

1) Zum Andenken an Otto Hesse. Bericht über die polytechnische Schule zu München 1874/75. Ins Französische übertragen und mit Anmerkungen versehen von P. Mansion im Bullettino di Bibl. e di Stor. delle Sc. mat. e fis., t. IX, 1876.

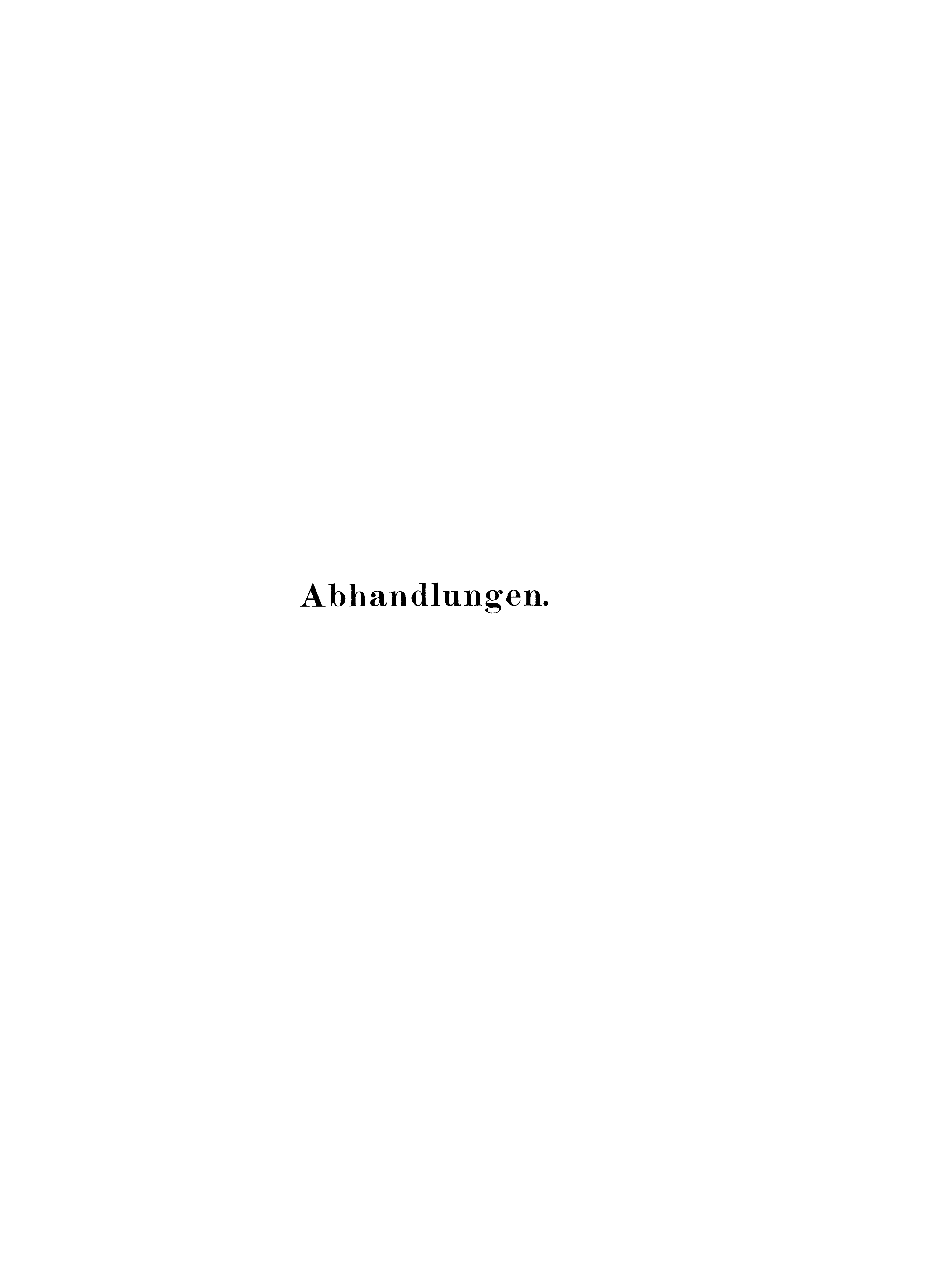
2) Otto Hesse. Ztsch. f. Math. u. Phys., Hist.-lit. Abth., XX, 1875.

3) Gedächtnissrede auf Otto Hesse, am 28. März 1882, München 1882 (mit einer Liste der Publicationen).

wir, statt eine erneute wissenschaftliche Würdigung zu geben, uns auf einen „Lebenslauf“ beschränken zu sollen, der auf Grund des neuen Materials noch besonders die Persönlichkeit des Meisters näher bringt. Auch das beigegebene Lichtbild, aus dem Atelier Fr. Hanfstängls, soll diesem Zwecke dienen.

München, Darmstadt, Freiburg, Erlangen,
im November 1896.

W. Dyck. S. Gundelfinger. J. Lüroth. M. Noether.



Abhandlungen.

1.

Ueber Oberflächen zweiter Ordnung.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 18, Seite 101—118.]

A. Construction der Hauptaxen der Oberflächen zweiter Ordnung.

1.

Es seien:

$$1.\quad ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy+2a''x+2b''y+2c''z+d=0,$$

$$2.\quad \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\alpha'yz+2\beta'zx+2\gamma'xy+2\alpha''x+2\beta''y+2\gamma''z+\delta=0$$

die Gleichungen irgend zweier Oberflächen zweiter Ordnung, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, in welchen der Kürze wegen die Summen der homogenen Glieder des zweiten Grades durch $f\,(x, y, z)$ und $\varphi\,(x, y, z)$ bezeichnet werden mögen. Alsdann erhält man durch Differentiation:

$$3.\quad \begin{cases} f'(x)=2(ax+c'y+b'z), & \varphi'(x)=2(\alpha x+\gamma'y+\beta'z),\\ f'(y)=2(c'x+by+a'z), & \varphi'(y)=2(\gamma'x+\beta y+\alpha'z),\\ f'(z)=2(b'x+a'y+cz), & \varphi'(z)=2(\beta'x+\alpha'y+\gamma z).\end{cases}$$

Wenn nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten irgend eines Punktes einer geraden Linie p bedeuten, die beliebig durch den Anfangspunkt 0 des Coordinatensystems gelegt ist, so sind bekanntlich die Gleichungen der durch den Punkt 0 gelegten, dieser Linie conjugirten Ebenen:

$$4.\quad x_1f'(x)+y_1f'(y)+z_1f'(z)=0,$$

$$5.\quad x_1\varphi'(x)+y_1\varphi'(y)+z_1\varphi'(z)=0.$$

In diesen Gleichungen kann man x, y, z mit x_1, y_1, z_1 vertauschen, ohne dadurch die Gleichungen selbst zu ändern. Daher fallen die beiden Ebenen unter folgenden Bedingungen in eine zusammen:

$$6. \qquad f'(x_1) = \mu\varphi'(x_1), \quad f'(y_1) = \mu\varphi'(y_1), \quad f'(z_1) = \mu\varphi'(z_1).$$

Aus diesen Gleichungen geht eine Gleichung vom dritten Grade in Beziehung auf den Factor μ hervor, wenn man die Verhältnisse von x_1, y_1, z_1, die sich aus zwei von ihnen ergeben, in die noch übrig bleibende dritte Gleichung setzt. Die drei Werthe von μ, welche dieser Gleichung des dritten Grades genügen, kann man nacheinander in die obigen Gleichungen (6) setzen und erhält dadurch drei verschiedene Verhältnisse von x_1, y_1, z_1. Es können also durch einen beliebigen Punkt 0 nur drei Linien p_1, p_2, p_3 construirt werden, deren conjugirte Ebenen in Beziehung auf die beiden Oberflächen parallel laufen, oder die zusammenfallen, wenn sie durch denselben Punkt gelegt werden.

Bezeichnet man die drei Werthe von μ durch μ_1, μ_2, μ_3 und die ihnen entsprechenden Coordinaten der drei Linien p_1, p_2, p_3 durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3 y_3 z_3, so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} f'(x_1) = \mu_1\varphi'(x_1), & f'(x_2) = \mu_2\varphi'(x_2), & f'(x_3) = \mu_3\varphi'(x_3), \\ f'(y_1) = \mu_1\varphi'(y_1), & f'(y_2) = \mu_2\varphi'(y_2), & f'(y_3) = \mu_3\varphi'(y_3), \\ f'(z_1) = \mu_1\varphi'(z_1), & f'(z_2) = \mu_2\varphi'(z_2), & f'(z_3) = \mu_3\varphi'(z_3). \end{array}$$

Multiplicirt man die drei ersten Gleichungen nach einander mit x_2, y_2, z_2 und addirt sie hierauf, so erhält man:

$$x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1) = \mu_1 [x_2\varphi'(x_1) + y_2\varphi'(y_1) + z_2\varphi'(z_1)].$$

Addirt man das zweite System von Gleichungen, nachdem die erste mit x_1, die zweite mit y_1, die dritte mit z_1 multiplicirt worden, so erhält man:

$$x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2) = \mu_2 [x_1\varphi'(x_2) + y_1\varphi'(y_2) + z_1\varphi'(z_2)].$$

Diese beiden Gleichungen sind nur durch die Grössen μ_1 und μ_2 von einander verschieden, da man, ohne sie zu ändern, x_1, y_1, z_1 mit x_2, y_2, z_2 vertauschen kann. Es ist daher:

$$\begin{array}{l} x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1) = 0, \\ x_2\varphi'(x_1) + y_2\varphi'(y_1) + z_2\varphi'(z_1) = 0. \end{array}$$

Auf dieselbe Weise ergeben sich noch folgende Gleichungen:

$$x_3 f'(x_1) + y_3 f'(y_1) + z_3 f'(z_1) = 0,$$
$$x_3 \varphi'(x_1) + y_3 \varphi'(y_1) + z_3 \varphi'(z_1) = 0,$$
$$x_3 f'(x_2) + y_3 f'(y_2) + z_3 f'(z_2) = 0,$$
$$x_3 \varphi'(x_2) + y_3 \varphi'(y_2) + z_3 \varphi'(z_2) = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich nun so deuten. Jede durch den Punkt 0 in Beziehung auf die Oberflächen (1) und (2) gelegte, zu einer der Linien p_1, p_2, p_3 conjugirte Ebene geht durch die beiden andern Linien p. Die drei Linien p sollen aus diesem Grunde die conjugirten Linien der beiden Oberflächen und die drei Ebenen, die immer durch je zwei derselben gelegt werden können, die conjugirten Ebenen der beiden Oberflächen genannt werden. Von den sechs letzten Gleichungen, die die Coordinaten der conjugirten Linien der beiden Oberflächen vollständig bestimmen, sind die 1[te], 3[te] und 5[te] die Bedingungen, dass die drei Linien p_1, p_2, p_3 in Beziehung auf Oberfläche (1) zu einander conjugirt sind. Die drei andern Gleichungen können durch passende Bestimmung der Constanten α, β, γ; α', β', γ' immer erfüllt werden. Daher muss jedes System conjugirter Linien der Oberfläche (1) auch ein System conjugirter Linien der Oberfläche (1) und irgend einer andern Oberfläche sein, und umgekehrt; wenn man die Systeme conjugirter Linien der Oberfläche (1) mit allen nur möglichen andern Oberflächen sucht, so muss man alle Systeme conjugirter Linien der Oberfläche (1) erhalten.

Durch Elimination des Factors μ leitet man aus den Gleichungen (6) leicht folgende ab:

$$f'(y_1)\varphi'(z_1) - \varphi'(y_1) f'(z_1) = 0,$$
$$f'(z_1)\varphi'(x_1) - \varphi'(z_1) f'(x_1) = 0,$$
$$f'(x_1)\varphi'(y_1) - \varphi'(x_1) f'(y_1) = 0;$$

welchen Gleichungen die oben erwähnten drei verschiedenen Verhältnisse von x_1, y_1, z_1 ebenfalls genügen müssen. Addirt man nun diese Gleichungen, nachdem die erste mit einem beliebigen Factor u, die zweite mit v, die dritte mit w multiplicirt worden, so erhält man, wenn x_1, y_1, z_1 als veränderliche Coordinaten betrachtet werden, die Gleichung eines Kegels:

$$7. \quad u[f'(y_1)\varphi'(z_1) - f'(z_1)\varphi'(y_1)] + v[f'(z_1)\varphi'(x_1) - f'(x_1)\varphi'(z_1)] + w[f'(x_1)\varphi'(y_1) - f'(y_1)\varphi'(x_1)] = 0,$$

der auf seiner Oberfläche die conjugirten Linien der beiden Oberflächen enthält, weil dieser Gleichung ebenfalls die drei Verhältnisse von x_1, y_1, z_1 genügen.

Fügt man den Gleichungen (4) und (5) die Bedingung bei:

$$8. \qquad x_1 u + y_1 v + z_1 w = 0,$$

nämlich, dass die Linie p in einer Ebene liege, die mit den Coordinatenebenen Winkel bildet, deren Cosinus sich verhalten wie $u:v:w$, so erhält man, wenn die aus den Gleichungen (4) und (5) sich ergebenden Verhältnisse von x_1, y_1, z_1 in diese Gleichung gesetzt werden:

$$9. \qquad \begin{aligned} u\,[f'(y)\,\varphi'(z) - f'(z)\,\varphi'(y)] + v\,[f'(z)\,\varphi'(x) - f'(x)\,\varphi'(z)] \\ + w\,[f'(x)\,\varphi'(y) - f'(y)\,\varphi'(x)] = 0, \end{aligned}$$

also die Gleichung des Kegels (7), als den geometrischen Ort der Schnittlinie q der Ebenen (4) und (5), welche zur Linie p conjugirt sind. Wenn man also eine Linie p um einen beliebigen Punkt 0 in einer beliebigen Ebene dreht, so beschreibt die Schnittlinie q der zu dieser Linie p durch den Punkt 0 gelegten conjugirten Ebenen einen Kegel der zweiten Ordnung, der auf seiner Oberfläche die drei durch den Punkt 0 gelegten conjugirten Linien der beiden gegebenen Oberflächen enthält. Die Ebene, in welcher die Linie p sich bewegt, nennt Poncelet die Directrice des durch die Linie q beschriebenen Kegels. Diese Directrice lässt sich nun wieder aus zwei Seiten q des genannten Kegels finden. Denn da die Coordinaten x_1, y_1, z_1 der Linie p auf dieselbe Weise von x, y, z, den Coordinaten der Linie q, abhängen wie umgekehrt x, y, z von x_1, y_1, z_1, wie die Gleichungen (4) und (5) zeigen, so wird die Schnittlinie der zu einer Seite q des Kegels conjugirten Ebenen die ihr entsprechende Linie p sein. Man kann also mit Hülfe zweier gegebener Seiten q des Kegels zwei Linien p der Directrice construiren, mithin die Directrice selbst. Construirt man nun auf die genannte Art zwei Kegel von verschiedenen Directricen, deren Spitzen in einem und demselben Punkte 0 liegen, so müssen sich dieselben in den drei durch den Punkt 0 gezogenen conjugirten Linien der beiden Oberflächen schneiden, weil jeder von ihnen das genannte System der conjugirten Linien auf seiner Oberfläche enthält, und die der Schnittlinie der Directricen entsprechende

Linie q muss die vierte Schnittlinie der beiden Kegel sein, weil diese Linie eine Seite, sowohl des einen als des andern Kegels ist.

Mit Hülfe dieser Kegel construirt Poncelet die Richtungen der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung, indem er als die zweite gegebene Oberfläche eine Kugel annimmt. Die beiden Kegel schneiden sich alsdann in 3 Linien, welche auf einander senkrecht stehen und den Hauptaxen der gegebenen Oberfläche parallel sind.[1])

2.

Man rücke nun die beiden Oberflächen, sich selbst parallel, so fort, dass ihre Mittelpunkte in den Punkt 0 fallen. Alsdann erhalten die ihnen entsprechenden Gleichungen die Form:

$$\text{A.} \qquad f(x, y, z) + D = 0,$$
$$\text{B.} \qquad \varphi(x, y, z) + \Delta = 0.$$

Verbindet man die Gleichung (A) mit der Gleichung einer beliebigen Ebene:

$$\text{C.} \qquad ux + vy + wz + p = 0,$$

so bedeuten bekanntlich x, y, z die Coordinaten der Punkte der dieser Ebene und der Oberfläche gemeinsamen Curve. Fügt man zu diesen Gleichungen noch die Gleichung (9) hinzu, die sich auch unter der Form darstellen lässt:

$$\text{D.} \qquad \begin{aligned} &\varphi'(x)[f'(y)\cdot w - f'(z)\cdot v] + \varphi'(y)[f'(z)\cdot u - f'(x)\cdot w] \\ &\quad + \varphi'(z)[f'(x)\cdot v - f'(y)\cdot u] = 0, \end{aligned}$$

so bedeutet x, y, z einen Punkt der genannten Curve, der durch die Ebene getroffen wird, welche in Beziehung auf die Oberfläche (B) zu der durch ihn an die Curve gelegten Tangente conjugirt ist. Denn die Cosinus der Winkel, die eine in dem Punkte x, y, z an die Curve gelegte Tangente mit den Coordinatenaxen bildet, verhalten sich wie:

$$[f'(y)\cdot w - f'(z)\cdot v] : [f'(z)\cdot u - f'(x)\cdot w] : [f'(x)\cdot v - f'(y)\cdot u].$$

1) Traité des propriétés projectives des figures par Poncelet p. 397.

Wenn man demnach durch x_1, y_1, z_1 veränderliche Coordinaten bezeichnet, so ist:

$$\varphi'(x_1)[f'(y)\cdot w - f'(z)\cdot v] + \varphi'(y_1)[f'(z)\cdot u - f'(x)\cdot w] \\ + \varphi'(z_1)[f'(x)\cdot v - f'(y)\cdot u] = 0$$

die Gleichung der Ebene, die in Beziehung auf die Oberfläche (B) zur genannten Tangente conjugirt ist. Damit endlich diese Ebene den Punkt x, y, z treffe, muss die letzte Gleichung erfüllt werden, wenn man statt x_1, y_1, z_1 setzt x, y, z. Construirt man nun in allen ebenen Curven der Oberfläche (A), die der Ebene (C) parallel sind, alle Punkte x, y, z, die der genannten Bedingung genügen, so liegen, da die Gleichung (D) unabhängig von der Constante p ist, diese Punkte in dem Kegel (9), und der Kegel selbst kann mittelst dieser Punkte construirt werden. Wenn die Oberfläche (B) eine Kugel ist, so sind die gesuchten Punkte x, y, z die Fusspunkte der von dem Mittelpunkte der Oberfläche auf die der Ebene (C) parallelen Curven der Oberfläche (1) gefällten Normalen, und der Kegel, der durch diese Normalen gebildet wird, geht durch die Hauptaxen der Oberfläche (A). Man kann nun leicht fünf Punkte der genannten Art finden. Verbindet man diese mit dem Mittelpunkte der gegebenen Oberfläche durch gerade Linien, so erhält man eben so viele Seiten des gesuchten Kegels, mit deren Hülfe sich wieder auf bekannte Weise die übrigen Seiten des Kegels finden lassen. Zwei der genannten Linien sind die Hauptaxen des durch den Mittelpunkt der Oberfläche gelegten, mit der Ebene (C) parallelen Schnittes. Der zu dieser Ebene conjugirte Durchmesser ist eine dritte Seite des Kegels. Das im Mittelpunkte der Oberfläche auf die erwähnte Ebene errichtete Loth ist wiederum eine Seite des Kegels. Legt man endlich durch den Punkt, in welchem das Loth die Oberfläche trifft, eine Ebene parallel mit der Ebene (C), fällt hierauf von dem Schnittpunkte des Lothes mit der Oberfläche zwei Perpendikel auf die jener Ebene und der Oberfläche gemeinschaftliche Curve und verbindet die Fusspunkte derselben durch gerade Linien mit dem Mittelpunkte der Oberfläche, so sind dieselben wieder zwei Seiten des gesuchten Kegels.

Dupin weicht von der angegebenen Construction darin ab, dass er statt der drei zuletzt genannten Seiten des Kegels die

Ebenen bestimmt, welche den Kegel längs der drei zuerst erwähnten berühren.[1])

Poncelet sowohl als Dupin, die, wie ich glaube, allein die vorliegende Aufgabe der Construction der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung behandelt haben, benutzen zu ihren Constructionen Kegel zweiter Ordnung, oder, wenn man den Schnitt der Kegel mit irgend einer Ebene betrachtet, Curven zweiter Ordnung, die nicht unmittelbar durch die Oberfläche selbst gegeben sind. Da aber die gegebene Oberfläche unendlich viele Curven zweiter Ordnung darbietet, so schien es mir der Mühe werth, zu untersuchen, ob durch eine dieser die Construction ausführbar sei. Diese Untersuchung ergab nun die gewünschte Construction, die ich als das Resultat analytischer Betrachtungen darstellen will.

3.

Wenn man die Gleichung (9), die alle Kegel umfasst, welche auf ihrer Oberfläche die durch den Punkt 0 gelegten drei conjugirten Linien der Oberflächen (1) und (2) enthalten, unter der Form darstellt:

$$10.\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,A'yz + 2\,B'zx + 2\,C'xy = 0,$$

so ergeben sich folgende Relationen:

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned}
A &= \alpha\,(v\,b' - w\,c') + \gamma'(w\,a - u\,b') + \beta'(u\,c' - v\,a),\\
B &= \gamma'(v\,a' - w\,b) + \beta\,(w\,c' - u\,a') + \alpha'(u\,b - v\,c'),\\
C &= \beta'(v\,c - w\,a') + \alpha'(w\,b' - u\,c) + \gamma\,(u\,a' - v\,b'),\\
2\,A' &= \beta\,(w\,b' - u\,c) + \gamma\,(u\,b - v\,c') + \alpha'(w\,c' - v\,b') + \beta'(v\,a' - w\,b)\\
&\qquad + \gamma'(v\,c - w\,a'),\\
2\,B' &= \gamma\,(u\,c' - v\,a) + \alpha\,(v\,c - w\,a') + \beta'(u\,a' - w\,c') + \gamma'(w\,b' - u\,c)\\
&\qquad + \alpha'(w\,a - u\,b'),\\
2\,C' &= \alpha\,(v\,a' - w\,b) + \beta\,(w\,a - u\,b') + \gamma'(v\,b' - u\,a') + \alpha'(u\,c' - v\,a)\\
&\qquad + \beta'(u\,b - v\,c').
\end{aligned}\right.$$

---

1) Sur la description des lignes et des surfaces du second degré; par M. Dupin. Journ. d. l'École polyt., Band 7 (Cahier 14), Seite 66.

Setzt man ferner:

$$\text{b)}\quad \begin{cases} \varkappa = bc - a'^2, & \varkappa' = b'c' - aa', \\ \lambda = ca - b'^2, & \lambda' = c'a' - bb', \\ \mu = ab - c'^2, & \mu' = a'b' - cc'; \end{cases}$$

multiplicirt hierauf die gleichvielten Gleichungen der beiden Systeme mit einander und addirt endlich die Gleichungen, so erhält man:

$$11. \qquad A\varkappa + B\lambda + C\mu + 2A'\varkappa' + 2B'\lambda' + 2C'\mu' = 0.$$

Diese Gleichung ist aber unabhängig von der Oberfläche (2), sowie von der Lage der Directrice. Daher wird jeder Kegel, der auf seiner Oberfläche irgend ein System durch den Punkt 0 gelegter, in Beziehung auf die Oberfläche (1) conjugirter Linien enthält, der Gleichung (11) genügen.

Aus diesem Grunde reduciren sich die sechs Bedingungen, die die sechs Constanten der Gleichung (10), (welche aber die Stelle von fünf vertreten), erfüllen müssen, wenn der Kegel (10) auf seiner Oberfläche zwei bestimmte Systeme conjugirter Linien der Oberfläche (1) enthalten soll, auf fünf Bedingungen, aus welchen jene Constanten sich bestimmen lassen. Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen ergibt sich nun folgender Satz:

„Irgend zwei durch einen beliebigen Punkt gelegte Systeme „conjugirter Linien einer Oberfläche zweiter Ordnung liegen auf „der Oberfläche eines Kegels zweiter Ordnung."

Wenn man umgekehrt a, b, c; a', b', c' durch $\varkappa$, λ, μ; $\varkappa'$, λ', μ' ausdrückt und der Kürze wegen setzt:

$$n = abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2,$$

so erhält man:

$$\text{c)}\quad \begin{cases} na = \lambda\mu - \varkappa'^2, & na' = \lambda'\mu' - \varkappa\varkappa', \\ nb = \mu\varkappa - \lambda'^2, & nb' = \mu'\varkappa' - \lambda\lambda', \\ nc = \varkappa\lambda - \mu'^2, & nc' = \varkappa'\lambda' - \mu\mu'. \end{cases}$$

Dieselben Gleichungen erhält man auch, wenn man in den Gleichungen (b) $\varkappa$, λ, μ; $\varkappa'$, λ', μ' für a, b, c; a', b', c' und na, nb, nc, na', nb', nc' für $\varkappa$, λ, μ; $\varkappa'$, λ', μ' setzt. Wenn man daher auf die angegebene Art in allen Gleichungen dieses Paragraphen die genannten Grössen ändert, so wird

$$12. \qquad Aa + Bb + Cc + 2A'a' + 2B'b' + 2C'c' = 0$$

die Bedingung, die der Kegel (10) erfüllen muss, wenn er auf seiner Oberfläche irgend ein System conjugirter Linien derjenigen Oberfläche enthalten soll, deren Gleichung ist:

$$\psi(x, y, z) = \varkappa x^2 + \lambda y^2 + \mu z^2 + 2\varkappa' yz + 2\lambda' zx + 2\mu' xy + \tau = 0.$$

Es seien nun x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 die Coordinaten irgend eines Systems durch den Anfangspunkt der Coordinaten 0 gelegter conjugirter Linien der Oberfläche (1) und X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 die Coordinaten der in diesem Punkte 0 auf die drei conjugirten Ebenen errichteten Lothe. Alsdann hat man folgende zwölf Bedingungen:

$$\begin{array}{lll} f'(x_1) = \varrho_1 X_1, & f'(x_2) = \varrho_2 X_2, & f'(x_3) = \varrho_3 X_3, \\ f'(y_1) = \varrho_1 Y_1, & f'(y_2) = \varrho_2 Y_2, & f'(y_3) = \varrho_3 Y_3, \\ f'(z_1) = \varrho_1 Z_1, & f'(z_2) = \varrho_2 Z_2, & f'(z_3) = \varrho_3 Z_3, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 X_2 + y_1 Y_2 + z_1 Z_2 = 0, \\ x_1 X_3 + y_1 Y_3 + z_1 Z_3 = 0, \\ x_2 X_3 + y_2 Y_3 + z_2 Z_3 = 0. \end{array}$$

Drückt man umgekehrt die Grössen x, y, z durch X, Y, Z aus, so erhält man, mit Berücksichtigung der Gleichungen (b):

$$\begin{array}{lll} 2(\varkappa X_1 + \mu' Y_1 + \lambda' Z_1) = \psi' X_1 = b_1 x_1, & \psi' X_2 = b_2 x_2, & \psi' X_3 = b_3 x_3, \\ 2(\mu' X_1 + \lambda Y_1 + \varkappa' Z_1) = \psi' Y_1 = b_1 y_1, & \psi' Y_2 = b_2 y_2, & \psi' Y_3 = b_3 y_3, \\ 2(\lambda' X_1 + \varkappa' Y_1 + \mu Z_1), = \psi' Z_1 = b_1 z_1, & \psi' Z_2 = b_2 z_2, & \psi' Z_3 = b_3 z_3. \end{array}$$

Die zwölf letzten Gleichungen sind nun die Bedingungen, dass die drei Lothe conjugirte Linien der Oberfläche $\psi(x, y, z) = 0$ sind. Jedes System conjugirter Linien der Oberfläche ψ steht also senkrecht auf einem ihm entsprechenden Systeme conjugirter Ebenen der Oberfläche (1). Daher muss jeder Kegel, der auf seiner Oberfläche drei durch den Punkt 0 gelegte Linien enthält, die auf irgend einem Systeme conjugirter Ebenen der Oberfläche (1) senkrecht stehen, der Gleichung (12) genügen. Setzt man endlich $a = b = c = 1$ und $a' = b' = c' = 0$, so wird die Oberfläche (1) eine Kugel und

$$13. \qquad A + B + C = 0$$

die Bedingung, welcher der Kegel genügen muss, wenn er auf seiner Oberfläche irgend drei auf einander senkrechte Linien enthält.

Die Gleichungen (11), (12), (13), die man auch aus den Gleichungen (a) erhält, wenn man in ihnen $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ setzt und die Grössen u, v, w eliminirt, sind nun die Bedingungen, dass der Kegel (10) auf seiner Oberfläche das System conjugirter Linien der Oberfläche (1) enthalte, welche auf einander senkrecht stehen, oder, was dasselbe ist, drei den Hauptaxen der Oberfläche (1) parallele Linien. Denn die drei durch den Punkt 0 gelegten, den Hauptaxen der Oberfläche (1) parallelen Linien bilden erstens ein System conjugirter Linien der Oberfläche (1); zweitens stehen sie senkrecht auf einem Systeme conjugirter Ebenen und drittens sind sie selbst auf einander senkrecht. Setzt man, wie vorhin angedeutet wurde, in den Gleichungen (a) $\alpha = \beta = \gamma = 1$ und $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
A &= v\,b' - w\,c', \\
B &= w\,c' - u\,a', \\
C &= u\,a' - v\,b', \\
2\,A' &= u(b - c) - v\,c' + w\,b', \\
2\,B' &= u\,c' + v(c - a) - w\,a', \\
2\,C' &= -u\,b' + v\,a' + w(a - b).
\end{aligned}$$

4.

Unter der Voraussetzung, dass $\delta = 0$, dass also der Anfangspunkt der Coordinaten 0 in einem Punkte der Oberfläche (2) liege, suche man nun die Bedingungen, unter welchen der Kegel (10) die Oberfläche (2) in ebenen Curven schneidet, oder, analytisch ausgesprochen, die Bedingungen, wenn die Summe der Gleichungen (2) und (10) sich in lineäre Factoren zerlegen lässt. Der eine dieser Factoren muss offenbar, gleich 0 gesetzt, die Gleichung der die Oberfläche (2) im Punkte 0 tangirenden Ebene sein, nämlich:

$$2\,\alpha'' x + 2\,\beta'' y + 2\,\gamma'' z.$$

Der andere Factor sei:

$$U x + V y + W z + 1.$$

Wenn man alsdann das Product der beiden Factoren der Summe der Gleichungen (2) und (10) gleich setzt, so erhält man für die gesuchten Bedingungen:

$$14. \quad \begin{cases} 2\,\alpha''\,U = \alpha + A, & \beta''\,W + \gamma''\,V = \alpha' + A', \\ 2\,\beta''\,V = \beta + B, & \gamma''\,U + \alpha''\,W = \beta' + B', \\ 2\,\gamma''\,W = \gamma + C, & \alpha''\,V + \beta''\,U = \gamma' + C'. \end{cases}$$

Die Gleichung

$$\text{A)} \qquad Ux + Vy + Wz + 1 = 0$$

gehört unter diesen Bedingungen der Ebene zu, in welcher die dem Kegel (10) und der Oberfläche (2) gemeinschaftliche ebene Curve liegt.

Fügt man den Bedingungen (14) noch die Bedingung (11) hinzu, dass nämlich der Kegel (10) irgend ein System conjugirter Linien der Oberfläche (1) enthalte, so erhält man durch Substitution der Werthe von A, B, C; A', B', C', aus den Gleichungen (14) in die Gleichung (11), eine in Beziehung auf U, V, W lineäre Gleichung. Diese Gleichung drückt aber analytisch die Bedingung aus, dass die Ebene (A) durch einen festen Punkt a gehe. Legt man nun durch den Punkt 0 irgend ein System conjugirter Linien der Oberfläche (1) und durch die drei Schnittpunkte dieses Systems mit der Oberfläche (2) eine Ebene, so muss diese Ebene durch den festen Punkt a gehen, weil der Kegel, dessen Spitze in 0 liegt und der die der Ebene und der Oberfläche (2) gemeinschaftliche Curve auf seiner Oberfläche enthält, den obigen Bedingungen genügt. Aus der vorangegangenen Betrachtung ergibt sich demnach folgender Satz:

„Wenn man durch einen beliebigen, aber festen Punkt 0 einer „Oberfläche v irgend ein System conjugirter Linien einer zweiten „Oberfläche u legt und die drei Schnittpunkte dieses Systems mit „der Oberfläche v durch eine Ebene verbindet: so geht diese „Ebene durch einen und denselben Punkt, welches auch das durch „den Punkt 0 gelegte System conjugirter Linien der Ober„fläche u sei." [1])

1) Théorèmes nouveaux sur les lignes et les surfaces du second ordre; par M. Frégier. Gerg. Ann. VII pag. 97.

In dem Falle, dass die Oberfläche u eine Kugel ist, in welchem aus der Gleichung (11) die Gleichung (13) hervorgeht, hat man folgenden Satz:

„Wenn man durch einen beliebigen, aber festen Punkt 0 einer „Oberfläche irgend drei auf einander senkrechte Linien legt und „durch die drei Schnittpunkte der drei Linien und der Ober- „fläche eine Ebene: so geht die Ebene durch einen festen Punkt.“ [1])

Der Punkt a liegt auf der Linie, welche durch den Punkt 0 geht und in Beziehung auf die Oberfläche (1) conjugirt ist zu der durch den Punkt 0 gelegten Tangenten-Ebene der Oberfläche (2). Denn legt man durch den Punkt 0 irgend ein System conjugirter Linien der Oberfläche (1), von denen zwei die Oberfläche (2) im Punkte 0 berühren, so fallen zwei Schnittpunkte dieses Systems und der Oberfläche (2) in den Punkt 0, und die Ebene, die die drei Schnittpunkte des Systems und der Oberfläche (2) verbindet, geht nothwendiger Weise durch die dritte Linie des Systems, welche in Beziehung auf die Oberfläche (1) conjugirt ist zu der die Oberfläche (2) im Punkte 0 tangirenden Ebene.

Legt man durch den Punkt 0 drei Linien senkrecht auf irgend ein System conjugirter Ebenen der Oberfläche (1) und verbindet die drei Schnittpunkte dieser Linien und der Oberfläche (2) durch eine Ebene, so geht diese Ebene durch einen festen Punkt b, weil die Linien conjugirte sind in Beziehung auf die Oberfläche $\psi(x, y, z)$. Daher liegt der Punkt b auf der Linie, welche durch den Punkt 0 geht und in Beziehung auf die Oberfläche $\psi(x, y, z)$ conjugirt ist zu der im Punkte 0 die Oberfläche (2) tangirenden Ebene. Diese Linie kann auch ohne die Oberfläche $\psi(x, y, z)$ construirt werden. Denn legt man durch den Punkt 0 ein System conjugirter Ebenen der Oberfläche (1), von denen sich zwei in der im Punkte 0 auf die Oberfläche (2) errichteten Normale schneiden, und zieht durch den Punkt 0 Lothe auf diese Ebenen, so bilden die Lothe ein System conjugirter Linien der Oberfläche $\psi(x, y, z)$. Zwei von diesen Linien liegen nun offenbar in der Tangenten-Ebene der Oberfläche (2); die dritte ist daher in Beziehung auf die Oberfläche $\psi(x, y, z)$ zu dieser Ebene conjugirt. Wenn man also vom Punkte 0 ein

---

1) Théorèmes nouveaux sur les lignes et les surfaces du second ordre; par M. Frégier. Gerg. Ann. VI pag. 237.

Loth auf die Ebene fällt, welche in Beziehung auf die Oberfläche (1) conjugirt ist zu der im Punkte 0 auf die Oberfläche (2) errichteten Normale, so ist dieses Loth die gesuchte Linie.

Zieht man endlich durch den Punkt 0 irgend drei auf einander senkrechte Linien und verbindet die Schnittpunkte dieser Linien und der Oberfläche (2) durch eine Ebene, so geht diese Ebene durch einen festen Punkt c der im Punkte 0 errichteten Normale der Oberfläche. Legt man nun irgend eine Ebene entweder durch den Punkt a, oder durch b, oder durch c, und durch den Schnitt dieser Ebene und der Oberfläche (2) einen Kegel, dessen Spitze im Punkte 0 liegt, so genügt dieser Kegel in dem ersten Falle den Bedingungen (11) und (14), im zweiten den Bedingungen (12) und (14), im dritten den Bedingungen (13) und (14).

5.

Die im vorigen Paragraph entwickelten Methoden, die Schnitte der Kegel und der Oberfläche (2) zu finden, welche den Bedingungen (11), (12), (13), einzeln verbunden mit (14), genügen, ergeben nun die Construction des Kegels, der allen jenen Bedingungen entspricht, d. h. desjenigen Kegels, der seine Spitze im Punkte 0 hat, die Oberfläche (2) in einer ebenen Curve schneidet und auf seiner Oberfläche drei den Hauptaxen der Oberfläche (1) parallele Linien enthält. Denn verbindet man die drei Punkte a, b, c durch eine Ebene, so schneidet diese Ebene die Oberfläche (2) in einer Curve, die auch auf der Oberfläche des gesuchten Kegels liegt.

Die Relationen, welche zwischen den Coëfficienten U, V, W der Gleichung (A) stattfinden, damit die ihr entsprechende Ebene durch die Punkte a, b, c gehe, erhält man durch Substitution der Werthe von A, B, C; A', B', C' aus den Gleichungen (14) in die Gleichungen (13), (12), (11), nämlich:

$$15. \qquad \alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2},$$

$$16. \qquad (\alpha'' a + \beta'' c' + \gamma'' b') U + (\alpha'' c' + \beta'' b + \gamma'' a') V + (\alpha'' b' + \beta'' a' + \gamma'' c) W = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + 2a'\alpha' + 2b'\beta' + 2c'\gamma'}{2},$$

$$(\alpha''\varkappa + \beta''\mu' + \gamma''\lambda')\,U + (\alpha''\mu' + \beta''\lambda + \gamma''\varkappa')\,V + (\alpha''\lambda' + \beta''\varkappa' + \gamma''\mu)\,W$$
17. $$= \frac{\varkappa\alpha + \lambda\beta + \mu\gamma + 2\varkappa'\alpha' + 2\lambda'\beta' + 2\mu'\gamma'}{2}.$$

Um diese Gleichungen vortheilhaft zu beschränken, nehme man an, dass:

$$a = \alpha;\quad b = \beta;\quad c = \gamma;\quad a' = \alpha';\quad b' = \beta';\quad c' = \gamma';\quad d = \delta = 0;$$
$$a'' = \alpha'';\quad b'' = \beta'';\quad c'' = \gamma'';$$

dass also die Oberfläche (1) und (2) die nämliche sei, welche durch den Punkt 0 geht. Alsdann gehen die obigen Gleichungen, wenn man, wie vorhin, der Kürze wegen setzt:

$$n = abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2,$$

über in:

18. $$\begin{cases} a''U + b''V + c''W = \dfrac{a+b+c}{2}, \\ (a''a + b''c' + c''b')\,U + (a''c' + b''b + c''a')\,V + (a''b' + b''a' + c''c)\,W \\ \qquad = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + 2a'^2 + 2b'^2 + 2c'^2}{2}, \\ (a''\varkappa + b''\mu' + c''\lambda')\,U + (a''\mu' + b''\lambda + c''\varkappa')\,V + (a''\lambda' + b''\varkappa' + c''\mu)\,W \\ \qquad = \dfrac{3n}{2}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunktes der in Rede stehenden Oberfläche durch X, Y, Z, so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} aX + c'Y + b'Z + a'' &= 0, & nX + a''\varkappa + b''\mu' + c''\lambda' &= 0, \\ c'X + bY + a'Z + b'' &= 0, & nY + a''\mu' + b''\lambda + c''\varkappa' &= 0, \\ b'X + a'Y + cZ + c'' &= 0, & nZ + a''\lambda' + b''\varkappa' + c''\mu &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte und erste der Gleichungen (18) gehen, wenn man in ihnen die Grössen a'', b'', c'' durch die Coordinaten des Mittelpunktes der Oberfläche ausdrückt, über in:

19. $$UX + VY + WZ = -\frac{3}{2},$$

$$(aX + c'Y + b'Z)\,U + (c'X + bY + a'Z)\,V + (b'X + a'Y + cZ)\,W$$
20. $$= -\frac{a+b+c}{2}.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (18) mit $a+b+c$ und zieht sie hierauf von der zweiten ab, so erhält man:

$$[-(b+c)a''+c'b''+b'c'']U+[c'a''-(a+c)b''+a'c'']V$$
$$+[b'a''+a'b''-(a+b)c'']W=-(\varkappa+\lambda+\mu).$$

Drückt man endlich a'', b'', c'' durch X, Y, Z aus, so geht diese Gleichung über in:

$$(XU+YV+ZW)(\varkappa+\lambda+\mu)-(X\varkappa+Y\mu'+Z\lambda')U$$
$$-(X\mu'+Y\lambda+Z\varkappa')V-(X\lambda'+Y\varkappa'+Z\mu)W=-(\varkappa+\lambda+\mu),$$

aus welcher Gleichung endlich, mit Berücksichtigung der Gleichung (19), folgende hervorgeht:

$$21.\quad (X\varkappa+Y\mu'+Z\lambda')U+(X\mu'+Y\lambda+Z\varkappa')V+(X\lambda'+Y\varkappa'+Z\mu)W = -\frac{\varkappa+\lambda+\mu}{2}.$$

Die Gleichungen (19), (20) und (21) bestimmen nun auf gleiche Weise wie die Gleichungen (18), aus welchen sie hervorgegangen sind, die Werthe von U, V, W. Dieselben Gleichungen erhält man aber auch, wenn man in den Gleichungen (15), (16), (17) setzt:

$$\alpha=\beta=\gamma=1,\quad \alpha'=\beta'=\gamma'=0,\quad \alpha''=-X,\quad \beta''=-Y,\quad \gamma''=-Z.$$

Diese Bemerkung lässt nun folgende geometrische Deutung zu: Diejenige Oberfläche, deren Gleichung

$$x^2+y^2+z^2-2Xx-2Yy-2Zz=0$$

ist, schneidet die Ebene (A), welche durch die drei Punkte a, b, c geht, in einer Curve, welche auch auf einem Kegel liegt, der seine Spitze im Punkte 0 hat und auf seiner Oberfläche drei den Hauptaxen der gegebenen Oberfläche parallele Linien. Jene Gleichung gehört aber einer Kugel an, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Oberfläche zusammenfällt und die durch den Punkt 0 jener Oberfläche hindurch geht. Verbindet man demnach die vier der Oberfläche, der Kugel und der Ebene (A) gemeinschaftlichen Punkte durch gerade Linien mit dem Punkte 0, so sind drei von diesen Linien den Hauptaxen der gegebenen Oberfläche parallel. Die vierte, den Hauptaxen der Oberfläche nicht parallele Linie lässt sich leicht mit Hülfe der in § 1 angegebenen Methode bestimmen.

6.

Ich lasse jetzt die in den vorhergehenden Paragraphen angedeutete Construction der Hauptaxen einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung im Zusammenhange folgen.

Man ziehe durch einen beliebigen Punkt 0 der gegebenen Oberfläche drei Systeme conjugirter Linien und lege durch die drei Schnittpunkte eines jeden Systems und der Oberfläche eine Ebene. Die drei Ebenen schneiden sich alsdann in einem Punkte a. Man errichte ferner im Punkte 0 auf drei Systeme conjugirter Ebenen Lothe und verbinde die Schnittpunkte der Oberfläche und der zu demselben Systeme conjugirter Ebenen gehörigen Lothe durch Ebenen. Diese drei Ebenen treffen in einem Punkte b zusammen. Durch den Punkt 0 lege man endlich drei Systeme auf einander senkrechter Linien und verbinde die Schnittpunkte eines jeden Systems und der Oberfläche durch eine Ebene. Die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkte c. Diese drei Punkte a, b, c können einfacher, aber weniger symmetrisch, auch auf folgende Art construirt werden. Man schneide auf der Linie, welche den Mittelpunkt der Oberfläche mit dem Punkte 0 verbindet, vom Mittelpunkte aus, den dritten Theil dieser Linie ab, so erhält man den Punkt a [man vergleiche die Gleichungen (A) und (19)]. Durch den Punkt 0 ziehe man drei Lothe auf irgend ein System conjugirter Ebenen und verbinde die drei Schnittpunkte der Lothe und der Oberfläche durch eine Ebene. Hierauf ziehe man durch den Mittelpunkt der Oberfläche eine Linie parallel mit der im Punkte 0 errichteten Normale, und im Schnittpunkte dieser Linie und der Oberfläche errichte man eine zweite Normale an die Oberfläche. Mit dieser ziehe man nun durch den Punkt 0 eine parallele Linie, so schneidet diese Linie die vorhin erwähnte Ebene in dem gesuchten Punkte b. Durch den Punkt 0 lege man endlich drei auf einander senkrechte Linien und durch die drei Schnittpunkte derselben und der Oberfläche eine Ebene. Diese Ebene wird dann von der im Punkte 0 an die Oberfläche errichteten Normale im Punkte c getroffen. Die drei Punkte a, b, c verbinde man durch eine Ebene (A) und schneide die gegebene Oberfläche durch dieselbe in einer Curve u. Beschreibt man endlich mit einem Radius, der gleich ist der Entfernung

des Punktes 0 vom Mittelpunkte der Oberfläche, um letzteren eine Kugel, so schneidet diese die Ebene (A) in einem Kreise u', welcher die Curve u in vier Punkten trifft. Verbindet man nun diese vier Punkte mit dem Punkte 0 durch gerade Linien, so sind drei von ihnen den Hauptaxen der gegebenen Oberfläche parallel. Um die vierte, den Hauptaxen nicht parallele Linie zu bestimmen, ziehe man von irgend zwei Punkten α und β der Curve u und von irgend zwei Punkten γ und δ des Kreises u' gerade Linien nach dem Punkte 0. Durch den Punkt 0 lege man alsdann eine auf α 0 senkrechte und eine zu dieser Linie conjugirte Ebene und bezeichne durch α' die diesen Ebenen gemeinschaftliche und der Linie α 0 auf die angegebene Art entsprechende Linie. Construirt man nun die Linien β', γ', δ', welche den Linien 0 β, 0 γ, 0 δ auf gleiche Weise entsprechen, und legt eine Ebene durch die Linien α', β' und eine zweite Ebene durch die Linien γ', δ', so schneiden sich diese Ebenen in einer Linie p. Legt man alsdann durch den Punkt 0 zwei Ebenen, von denen die eine zur Linie p conjugirt, die andere senkrecht auf ihr ist, so schneiden sich diese Ebenen in der vierten, den Hauptaxen der gegebenen Oberfläche nicht parallelen Linie.

7.

Wenn zwei Systeme conjugirter Linien a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 einer Oberfläche u gegeben sind, so kann man leicht andere Systeme conjugirter Linien derselben Oberfläche finden. Denn lässt man die sechs gegebenen Linien durch einen Punkt 0 gehen, legt drei Ebenen durch die Linien $a_1\, a_2$, $b_1\, c_1$, $b_2\, c_2$, und bezeichnet die Schnittlinie der zweiten Ebene und der ersten mit b_3, der zweiten und der dritten durch c_3, so bilden die drei Linien a_1, b_3, c_3 wieder ein System conjugirter Linien der Oberfläche u.

Wenn drei Systeme conjugirter Linien einer Oberfläche u gegeben sind, so lässt sich mit Hülfe einer gegebenen Oberfläche v zu jeder gegebenen Ebene die in Beziehung auf die Oberfläche u conjugirte Linie und zu jeder gegebenen Linie die conjugirte Ebene construiren. Denn legt man eine Tangenten-Ebene an die Oberfläche v, parallel mit der gegebenen Ebene, zieht hierauf durch den Tangirungspunkt 0 die drei

gegebenen Systeme conjugirter Linien der Oberfläche u und verbindet die drei Schnittpunkte eines jeden Systems und der Oberfläche v durch eine Ebene, so erhält man drei Ebenen, die sich in einem Punkte schneiden. Verbindet man endlich diesen Punkt mit dem Tangirungspunkte 0 durch eine gerade Linie, so ist diese die gesuchte. Legt man durch eine gegebene Linie zwei Ebenen, construirt zu jeder derselben die in Beziehung auf die Oberfläche u conjugirte Linie, legt endlich eine Ebene parallel mit diesen beiden Linien, so ist diese in Beziehung auf die Oberfläche u conjugirt zu der gegebenen Linie.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen werde ich die Auflösung folgender Aufgabe auseinandersetzen:

> „Zur Construction der Richtungen der Hauptaxen einer Ober-„fläche (1) sind gegeben zwei Systeme conjugirter Linien der „Oberfläche und eine Hülfsoberfläche (2)."

Mit zwei Systemen conjugirter Linien der Oberfläche (1) ist, wie oben gezeigt wurde, auch ein drittes System conjugirter Linien der Oberfläche gegeben. Diese drei Systeme lege man durch einen Punkt 0 der gegebenen Oberfläche (2), welcher Punkt im Folgenden als der Anfangspunkt des Coordinatensystems betrachtet werden soll, auf welches die Oberflächen bezogen sind, und construire auf die in § 4 beschriebene Art die drei Punkte a, b, c. Durch diese drei Punkte lege man eine Ebene (A)

$$Ux + Vy + Wz + 1 = 0,$$

welche durch die Gleichungen (15), (16), (17) analytisch bestimmt wird. Diese Ebene nun schneidet die gegebene Oberfläche (2) in einer solchen Curve u, dass, wenn man eine durch den Punkt 0 gezogene Linie durch diese Curve fortbewegt, die Linie einen Kegel beschreibt, welcher auf seiner Oberfläche drei den Hauptaxen der Oberfläche (1) parallele Linien enthält. Bezeichnet man nun durch X, Y, Z die Coordinaten des Mittelpunktes einer Kugel, die durch den Punkt 0 geht und die Ebene (A) in einem Kreise schneidet, der die erwähnte Eigenschaft der Curve u hat, so werden die Coordinaten X, Y, Z durch die Gleichungen (19), (20), (21) bestimmt. Diese Gleichungen sind aber, wenn man X, Y, Z als veränderlich betrachtet, die analytischen Ausdrücke von Ebenen, die sich

in dem gesuchten Mittelpunkte der Kugel schneiden. Es bleibt also nur noch übrig, diese Ebenen zu construiren. Die Gleichung (20) ist zusammengesetzt aus den drei Gleichungen:

$$a\left(X + \frac{1}{2U}\right) + c' Y + b' Z = 0,$$
$$c' X + b\left(Y + \frac{1}{2V}\right) + a' Z = 0,$$
$$b' X + a' Y + c\left(Z + \frac{1}{2W}\right) = 0.$$

Die erste von diesen Gleichungen stellt eine Ebene dar, welche durch die Mitte des von der Ebene (A) abgeschnittenen Stücks der x-Axe des Coordinatensystems hindurch geht und in Beziehung auf die Oberfläche (1) zu dieser Axe conjugirt ist. Ebenso ist die zweite die Gleichung einer Ebene, die durch die Mitte des von der Ebene (A) abgeschnittenen Stückes der y-Axe hindurch geht und zu dieser Axe in Beziehung auf die Oberfläche (1) conjugirt ist. Die dritte Gleichung stellt eine Ebene dar, die durch die Mitte des von der Ebene (A) abgeschnittenen Stückes der z-Axe hindurch geht und conjugirt ist zu dieser Axe. Die drei genannten Ebenen schneiden sich aber in einem Punkte der Ebene (20), weil die Werthe von X, Y, Z, welche den drei Gleichungen genügen, auch der Gleichung (20) genügen. Wenn man nun durch den Punkt 0 irgend ein System auf einander senkrechter Linien legt und durch die Mitte der von der Ebene (A) abgeschnittenen Stücke dieser drei Linien drei Ebenen, die in Beziehung auf die Oberfläche (1) zu den ihnen entsprechenden Linien conjugirt sind, so schneiden sich die drei Ebenen ebenfalls in einem Punkte der Ebene (20). Auf diese Weise kann man nun so viele Punkte der Ebene (20) finden, als man will; mithin die Ebene selbst. Diese Ebene ist in Beziehung auf die Oberfläche (1) conjugirt zu dem Lothe der Ebene (A); wie aus der Gleichung (20) leicht zu ersehen ist. Man kann daher auf die oben angegebene Art eine ihr parallele Ebene construiren, und es bedarf nur eines Punktes derselben, um ihre Lage im Raume zu bestimmen.

Wenn man in der Gleichung (20) für a, b, c; a', b', c' setzt: $\varkappa$, λ, μ; $\varkappa'$, λ', μ', so geht sie in die Gleichung (21) über. Wenn man daher für die Oberfläche (1) die Oberfläche ψ substituirt, von welcher ebenfalls

drei Systeme conjugirter Linien gegeben sind (nämlich die Lothe auf den drei gegebenen Systemen conjugirter Ebenen der Oberfläche (1)), und die angegebene Construction durch diese Lothe wie vorhin durch die drei Systeme conjugirter Linien ausführt, so erhält man die Ebene (21).

Setzt man in der Gleichung (20) $a = b = c = 1$ und $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$, so geht sie in (19) über, und die dieser Gleichung entsprechende Ebene wird auf dieselbe Weise construirt, wenn man für die Oberfläche (1) eine Kugel substituirt. Um also einen Punkt der Ebene (19) zu finden, lege man durch den Punkt 0 drei auf einander senkrechte Linien und durch die Mitten der von der Ebene (A) abgeschnittenen Stücke dieser Linien drei senkrechte Ebenen auf diese Linien; alsdann ist der Schnittpunkt dieser drei Ebenen ein Punkt der gesuchten Ebene (19). Man bemerkt aber leicht, dass diese Ebene parallel mit der Ebene (A), und dass ihr senkrechter Abstand vom Punkte 0 gleich ist $\frac{3}{2}$ des Abstandes der Ebene (A). Aus dieser Bemerkung ergibt sich demnach eine einfachere Construction der gesuchten Ebene (19).

Die drei Ebenen (19), (20), (21) schneiden sich nun in einem Punkte. Beschreibt man um diesen Punkt eine Kugel mit einem Radius, der gleich ist der Entfernung des Punktes 0 von diesem Punkte, so schneidet sie die Ebene (A) in einem Kreise u'. Verbindet man die vier Schnittpunkte der Curve u und des Kreises u' durch gerade Linien mit dem Punkte 0, so bestimmen drei von ihnen die Richtungen der Hauptaxen der Oberfläche (1). Die vierte, den Hauptaxen nicht parallele Linie wird auf die in § 6 angegebene Art gefunden.

Königsberg, den 21. October 1837.

2.

De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis.

Dissertatio

quam auctoritate amplissimi philosophorum ordinis

pro venia legendi

D. XXII. Apr. MDCCCXXXX

H. L. Q. C. publice defendet

Otto Hesse

assumto socio

Hermanno de Behr

opponentibus

Carolo Meyer. Alberto Dulk.

REGIOMONTI.

Erschienen im Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 20, Seite 285—308 unter dem Titel:

„De curvis et superficiebus secundi ordinis“
(Auctore **Dr. Ottone Hesse,** Regiom.).

Im Auszug und mit einigen (nicht von Hesse herrührenden) Zusätzen in Uebersetzung erschienen in den „Nouvelles Annales de mathématiques“ Band 14 (1855), Seite 178—194 unter dem Titel:

„Théorèmes sur la disparition des rectangles dans les fonctions homogènes entières quadratiques à n variables, applications géométriques aux lignes et surfaces du second degré“
d'après M. **O. Hesse,** professeur à l'Université de Königsberg.

Theses.

1. Optima geometriae tractandae ratio est, quae analysin non aspernatur.
2. Usus serierum divergentium non omnino est rejiciendus.
3. In exponendis doctrinis a rebus generalibus initium capere satius est.
4. Praecipuum docentis officium est docere discendi vias.
5. Acida non exstant nisi liquida.

SECTIO PRIMA.

De relationibus inter coefficientes duorum systematum substitutionum linearium, quorum utrumque efficit ut data functio quaelibet homogenea secundi ordinis transformetur in aliam, quae solis variabilium quadratis constet.

1.

Propositis inter variabiles:

$$x_1 \ x_2 \ x_3 \cdots\cdots x_n \quad \text{et} \quad y_1 \ y_2 \ y_3 \cdots\cdots y_n$$

n aequationibus linearibus hujusmodi:

$$1. \qquad x_\lambda = x_\lambda^{(1)} y_1 + x_\lambda^{(2)} y_2 + \cdots\cdots x_\lambda^{(n)} y_n$$

coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$, quorum numerus est $n \cdot n$, ita determinari possunt, ut data functio quaelibet homogenea secundi ordinis variabilium $x_1 \ x_2 \cdots\cdots x_n$ transformetur in aliam variabilium $y_1 \ y_2 \cdots\cdots y_n$, de qua binorum producta evanuerunt. Cui conditioni ut aequationes (1) satisfaciant, $\frac{n(n-1)}{2}$ aequationes inter coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$ valere necesse est, quod substitutionibus (1) factis $\frac{n(n-1)}{2}$ termini in binas variabiles $y_1 \ y_2 \cdots\cdots y_n$ ducti evanescere et soli n termini earum quadrata continentes remanere debent.

Jam ut aequationes, de quibus dictum est, nanciscamur, $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} \cdot x_\varkappa \cdot x_\lambda$ functionem esse datam statuamus. Qua in summa numeris $\varkappa$, λ valores $1 \ 2 \cdots\cdots n$ omnes ita tribuantur, ut posita aequatione $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$ termini

in $x_\varkappa x_\lambda$ ducti, ubi $\varkappa$, λ diversi sunt, duplices, sin vero $\varkappa$, λ aequales, simplices appareant. Si porro ponamus:

$$G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \cdots + G_n y_n^2$$

expressionem esse, in quam summa $\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ substitutione (1) facta abit, nihil impedit, quominus substituendo valores $x_1 x_2 \cdots x_n$ e (1) in aequatione

$$2. \qquad \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \cdots + G_n y_n^2$$

et comparando singulos terminos aequationes deducamus sequentes:

$$3. \quad 0 = x_1^{(p)} \frac{d \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{d x_1^{(q)}} + x_2^{(p)} \frac{d \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{d x_2^{(q)}} + \cdots + x_n^{(p)} \frac{d \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{d x_n^{(q)}},$$

$$4. \quad G_p = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(p)} x_\lambda^{(p)}$$

quarum prior, positis e numerorum $1\ 2 \cdots n$ serie loco p et q diversis numeris, illas $\frac{n(n-1)}{2}$ aequationes conditionales suppeditat, quibus in aequationibus fugere non potest, numeris p, q inter se commutatis, eas integras manere. E posteriori formula, posito $1\ 2 \cdots n$ loco p, n aequationes fluunt, quibus coefficientes G_p quadratorum ipsarum variabilium $y_1 y_2 \cdots y_n$ tanquam functiones coefficientium $x_\lambda^{(\varkappa)}$ determinantur.

2.

Repraesentetur per formulam:

$$5. \qquad x_\lambda = x_\lambda^{(n+1)} \cdot y_{n+1} + x_\lambda^{(n+2)} \cdot y_{n+2} + \cdots x_\lambda^{(2n)} \cdot y_{2n}$$

alterum n aequationum systema, quibus eadem functio data $\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ in formam redigatur sequentem:

$$- G_{n+1} y_{n+1}^2 - G_{n+2} y_{n+2}^2 - \cdots - G_{2n} y_{2n}^2$$

eadem ratione atque antea sequuntur aequationes:

$$6. \quad 0 = x_1^{(n+p)} \frac{d \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)}}{d x_1^{(n+q)}} + x_2^{(n+p)} \frac{d \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)}}{d x_2^{(n+q)}} + \cdots$$
$$\cdots + x_n^{(n+p)} \frac{d \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)}}{d x_n^{(n+q)}},$$

$$7. \qquad -G_{n+p} = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(n+p)}\, x_\lambda^{(n+p)}$$

qua ex aequatione priori, positis valoribus $1\ 2 \cdots n$ diversis loco p, q, aequationes $\frac{n(n-1)}{2}$ conditionales fluunt, posteriori n coefficientes G_{n+p} determinantur.

Contemplemur illas $n(n-1)$ formulas (3), (6) quibus solis coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$ et $x_\lambda^{(n+\varkappa)}$ satisfaciant necesse est, ita ut de functione $\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda$ substitutionibus (1) vel (5) factis variabilium $y_1\, y_2 \cdots y_n$ vel $y_{n+1}\, y_{n+2} \cdots y_{2n}$ binarum producta evanescant. Facile patet aequationibus (3), (6) $\frac{n(n+1)}{2}$ constantes $a_{\varkappa,\lambda}$ inesse, vel potius $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, quippe e quarum numero unam aliquam $= 1$ ponere licet. Unde sequitur illarum $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ constantium eliminatione $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes inter coefficientes substitutionum (1), (5) solas existere. Sed hae $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes alio aequationum systemate repraesentari possunt, quae neque inter omnes coefficientes $x_\lambda^{(\varkappa)}$, $x_\lambda^{(n+\varkappa)}$ symmetria careant, nec tam multas constantes eliminandas praebeant. Quas aequationes ut nanciscamur antecedentibus formulis alias quasdam addi convenit.

3.

Quem ad finem si supponimus ex aequationibus (1) vice versa sequi:

$$8. \qquad y_\lambda = X_1^{(\lambda)}\, x_1 + X_2^{(\lambda)}\, x_2 + \cdots + X_n^{(\lambda)}\, x_n$$

inter coefficientes $X_\varkappa^{(\lambda)}$ et $x_\lambda^{(\varkappa)}$ duo aequationum systemata valent haec:

$$9. \qquad \left\{\begin{array}{rl} & 1 = x_1^{(\lambda)}\, X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\lambda)}\, X_2^{(\lambda)} + \cdots + x_n^{(\lambda)}\, X_n^{(\lambda)} \\ & 0 = x_1^{(\varkappa)}\, X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\varkappa)}\, X_2^{(\lambda)} + \cdots + x_n^{(\varkappa)}\, X_n^{(\lambda)} \\ \text{et} & 1 = x_\lambda^{(1)}\, X_\lambda^{(1)} + x_\lambda^{(2)}\, X_\lambda^{(2)} + \cdots + x_\lambda^{(n)}\, X_\lambda^{(n)} \\ & 0 = x_\varkappa^{(1)}\, X_\lambda^{(1)} + x_\varkappa^{(2)}\, X_\lambda^{(2)} + \cdots + x_\varkappa^{(n)}\, X_\lambda^{(n)} \end{array}\right.$$

in quorum posterioribus aequationibus numeris $\varkappa$, λ e numerorum serie $1\ 2 \cdots n$ valores diversi tribuendi sunt. Quibus expressionibus (8)

variabilium $y_1\, y_2 \cdots\cdot y_n$ substitutis in aequatione (2) singulos comparando terminos adipiscimur:

$$a_{\varkappa,\lambda} = G_1\, X_\varkappa^{(1)}\, X_\lambda^{(1)} + G_2\, X_\varkappa^{(2)}\, X_\lambda^{(2)} + \cdots\cdot G_n\, X_\varkappa^{(n)}\, X_\lambda^{(n)}. \tag{10.}$$

Facile patet ex aequatione proposita, si multiplicetur per $x_\lambda^{(p)}$ et pro λ deinceps ponatur $1, 2 \cdots\cdot n$, aequationum systema prodire, quod additione facta abit in:

$$a_{\varkappa,1}\, x_1^{(p)} + a_{\varkappa,2}\, x_2^{(p)} + \cdots\cdot a_{\varkappa,n}\, x_n^{(p)} = G_p\, X_\varkappa^{(p)}.$$

Qua ex aequatione numeros $1\ 2 \cdots\cdot n$ loco $\varkappa$ deinceps ponendo sequuntur n aequationes:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\, x_1^{(p)} + a_{1,2}\, x_2^{(p)} + \cdots\cdot + a_{1,n}\, x_n^{(p)} = G_p\, X_1^{(p)} \\ a_{2,1}\, x_1^{(p)} + a_{2,2}\, x_2^{(p)} + \cdots\cdot + a_{2,n}\, x_n^{(p)} = G_p\, X_2^{(p)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}\, x_1^{(p)} + a_{n,2}\, x_2^{(p)} + \cdots\cdot + a_{n,n}\, x_n^{(p)} = G_p\, X_n^{(p)}, \end{array}\right. \tag{11.}$$

quarum solutio secundum $x_1^{(p)}\, x_2^{(p)} \cdots\cdot x_n^{(p)}$ suppeditat n aequationes sequentis formae:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_1^{(p)}}{G_p} = A_{1,1}\, X_1^{(p)} + A_{1,2}\, X_2^{(p)} + \cdots\cdot + A_{1,n}\, X_n^{(p)} \\ \dfrac{x_2^{(p)}}{G_p} = A_{2,1}\, X_1^{(p)} + A_{2,2}\, X_2^{(p)} + \cdots\cdot + A_{2,n}\, X_n^{(p)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{x_n^{(p)}}{G_p} = A_{n,1}\, X_1^{(p)} + A_{n,2}\, X_2^{(p)} + \cdots\cdot + A_{n,n}\, X_n^{(p)}, \end{array}\right. \tag{12.}$$

ubi adnotandum est, cum sit $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$, etiam $A_{\varkappa,\lambda}$ et $A_{\lambda,\varkappa}$ functiones quasdam coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ inter se aequales esse. Aequationum vero (12) loco hanc statui licet:

$$\frac{x_\varkappa^{(p)}}{G_p} = A_{\varkappa,1}\, X_1^{(p)} + A_{\varkappa,2}\, X_2^{(p)} + \cdots\cdot + A_{\varkappa,n}\, X_n^{(p)};$$

quam si multiplicamus per $x_\lambda^{(p)}$ et numeros $1\ 2 \cdots\cdot n$ loco p deinceps ponimus n aequationes nanciscimur, e quibus facta additione procrescit:

$$A_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(1)}\, x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)}\, x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \cdots\cdot + \frac{x_\varkappa^{(n)}\, x_\lambda^{(n)}}{G_n}. \tag{13.}$$

Eadem ratione e substitutionibus (5) formula sequitur haec:

$$14. \qquad -A_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_{\varkappa}^{(n+1)} x_{\lambda}^{(n+1)}}{G_{n+1}} + \frac{x_{\varkappa}^{(n+2)} x_{\lambda}^{(n+2)}}{G_{n+2}} + \cdots + \frac{x_{\varkappa}^{(2n)} x_{\lambda}^{(2n)}}{G_{2n}};$$

quam si addimus ad (13) fit:

$$15. \qquad \frac{x_{\varkappa}^{(1)} x_{\lambda}^{(1)}}{G_1} + \frac{x_{\varkappa}^{(2)} x_{\lambda}^{(2)}}{G_2} + \cdots + \frac{x_{\varkappa}^{(2n)} x_{\lambda}^{(2n)}}{G_{2n}} = 0.$$

Hac ex aequatione, positis loco $\varkappa$, λ valoribus $1\ 2 \cdots n$ et diversis et aequalibus, fluunt $\frac{n(n+1)}{2}$ aequationes et inter coefficientes omnes $x_{\lambda}^{(\varkappa)}$, $x_{\lambda}^{(n+\varkappa)}$ et inter quantitates G_1, $G_2 \cdots G_{2n}$ symmetricas. E quibus, facta eliminatione illarum $2n$ quantitum, quippe quae $2n-1$ quantitatum vicem impleant, eaedem inter substitutionum (1), (5) coefficientes $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relationes sequuntur, quas ex aequationibus (3), (6) eliminatione constantium prodire adnotavimus.

4.

Sed facile est perspectu ab aequatione (15) vice versa ad (3), (6) nos redire posse. Quem ad finem assequendum convenit aequationem (15) in duas (13) et (14) dirimi, quarum e priori, positis aequationibus (9), aequationes (12) derivantur, quarum solutio secundum $X_1^{(p)} X_2^{(p)} \ldots X_n^{(p)}$ suppeditat aequationes (11) e quibus facile sequuntur (3), (4); et simili modo e posteriori (14) aequationes (6), (7) invenimus. Quibus in aequationibus constantes, quas functio $\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa} x_{\lambda}$ continet, ita insitae reperiuntur, ut functio ipsa ex iis facile restitui possit.

Cum vero aequatio (15) $\frac{1\,2\,3 \ldots (2n)}{2 \,.\, 1\,2\,3 \ldots n \,.\, 1\,2 \ldots n}$ modis in duas aequationes formae (13) et (14) dirimi possit, totidem functiones $\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_{\varkappa} x_{\lambda}$ diversas cognoscimus, e quarum qualibet duo aequationum systemata nascantur, quae quomodo (3), (6) eodem modo et ipsae loco (15) poni possunt.

Id quo melius perspiciatur aequatio (15) exempli gratia dividatur in duas has:

$$A'_{\varkappa,\lambda} = \frac{x^{(1)}_\varkappa x^{(1)}_\lambda}{G_1} + \frac{x^{(2)}_\varkappa x^{(2)}_\lambda}{G_2} + \cdots + \frac{x^{(n-1)}_\varkappa x^{(n-1)}_\lambda}{G_{n-1}} + \frac{x^{(n+1)}_\varkappa x^{(n+1)}_\lambda}{G_{n+1}}$$

$$-A'_{\varkappa,\lambda} = \frac{x^{(n)}_\varkappa x^{(n)}_\lambda}{G_n} + \frac{x^{(n+2)}_\varkappa x^{(n+2)}_\lambda}{G_{n+2}} + \cdots + \frac{x^{(2n-1)}_\varkappa x^{(2n-1)}_\lambda}{G_{2n-1}} + \frac{x^{(2n)}_\varkappa x^{(2n)}_\lambda}{G_{2n}},$$

e quarum priori, positis aequationibus:

$$\begin{aligned} 1 &= x^{(p)}_1 Y^{(p)}_1 + x^{(p)}_2 Y^{(p)}_2 + \cdots + x^{(p)}_n Y^{(p)}_n \\ 0 &= x^{(p)}_1 Y^{(q)}_1 + x^{(p)}_2 Y^{(q)}_2 + \cdots + x^{(p)}_n Y^{(q)}_n \\ 1 &= x^{(1)}_\lambda Y^{(1)}_\lambda + x^{(2)}_\lambda Y^{(2)}_\lambda + \cdots + x^{(n-1)}_\lambda Y^{(n-1)}_\lambda + x^{(n+1)}_\lambda Y^{(n+1)}_\lambda \\ 0 &= x^{(1)}_\varkappa Y^{(1)}_\lambda + x^{(2)}_\varkappa Y^{(2)}_\lambda + \cdots + x^{(n-1)}_\varkappa Y^{(n-1)}_\lambda + x^{(n+1)}_\varkappa Y^{(n+1)}_\lambda, \end{aligned}$$

ubi numeris p, q diversi valores $1\ 2 \ldots . (n-1)$ et $(n+1)$, numeris $\varkappa$, λ diversi valores $1\ 2 \ldots . n$ tribuendi sunt, facile prodit:

$$\frac{x^{(p)}_\varkappa}{G_p} = A'_{\varkappa,1} Y^{(p)}_1 + A'_{\varkappa,2} Y^{(p)}_2 + \cdots + A'_{\varkappa,n} Y^{(p)}_n$$

e qua aequatione vice versa sequatur:

$$a'_{\varkappa,1} x^{(p)}_1 + a'_{\varkappa,2} x^{(p)}_2 + \cdots a'_{\varkappa,n} x^{(p)}_n = G_p Y^{(p)}_\varkappa$$

unde, cum sit $a'_{\varkappa,\lambda} = a'_{\lambda,\varkappa}$ quia est $A'_{\varkappa,\lambda} = A'_{\lambda,\varkappa}$, prodeunt

$$\text{a)} \quad 0 = x^{(p)}_1 \frac{d \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x^{(q)}_\varkappa x^{(q)}_\lambda}{d x^{(q)}_1} + x^{(p)}_2 \frac{d \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x^{(q)}_\varkappa x^{(q)}_\lambda}{d x^{(q)}_2} + \cdots + x^{(p)}_n \frac{d \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x^{(q)}_\varkappa x^{(q)}_\lambda}{d x^{(q)}_n}$$

$$G_p = \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x^{(p)}_\varkappa x^{(p)}_\lambda,$$

ubi loco p, q diversi valores $1\ 2 \ldots . (n-1)$ et $(n+1)$, loco $\varkappa$, λ diversi valores $1\ 2 \ldots . n$ omnes ponendi sunt. Simili modo e secunda aequatione, quam supra statuimus, sequuntur:

$$\text{b)} \quad 0 = x^{\mu}_1 \frac{d \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x^{(\nu)}_\varkappa x^{(\nu)}_\lambda}{d x^{(\nu)}_1} + x^{\mu}_2 \frac{d \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x^{(\nu)}_\varkappa x^{(\nu)}_\lambda}{d x^{(\nu)}_2} + \cdots + x^{(\mu)}_n \frac{d \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x^{(\nu)}_\varkappa x^{(\nu)}_\lambda}{d x^{(\nu)}_n}$$

$$-G_\mu = \Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x^{\mu}_\varkappa x^{\mu}_\lambda$$

ubi numeris μ, ν diversi valores n, $(n+2), \ldots . (2n)$ omnes tribuendi sunt.

His quatuor aequationibus efficitur ut functio $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ substitutionibus:

$$x_\lambda = x^{(1)}_\lambda y_1 + x^{(2)}_\lambda y_2 + \cdots + x^{(n-1)}_\lambda y_{n-1} + x^{(n+1)}_\lambda y_{n+1}$$

et

$$x_\lambda = x^{(n)}_\lambda y_n + x^{(n+2)}_\lambda y_{n+2} + \cdots + x^{(2n-1)}_\lambda y_{2n-1} + x^{(2n)}_\lambda y_{2n}$$

transeat in:

$$G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \cdots + G_{n-1} y_{n-1}^2 + G_{n+1} y_{n+1}^2$$

et

$$- G_n y_n^2 - G_{n+2} y_{n+2}^2 - \cdots - G_{2n-1} y_{2n-1}^2 - G_{2n} y_{2n}^2,$$

qua ratione functionem $\Sigma a'_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ unam ex iis reperimus, quarum mentionem fecimus, e qua nascuntur aequationes (a), (b), quae aeque ac (3), (6) aequationem (15) repraesentant.

5.

Si aequationem (15) per $b_{\varkappa,\lambda}$ multiplicamus et numeris $\varkappa$, λ valores $1\ 2 \ldots . n$ omnes et diversos et aequales ex ordine tribuimus, $\frac{n(n+1)}{2}$ aequationes prodire videmus, quarum summam hunc in modum designari licet:

$$16. \qquad \frac{\Sigma b_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(1)} x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{\Sigma b_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(2)} x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \cdots + \frac{\Sigma b_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(2n)} x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}} = 0.$$

Facile vero patet $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficientes $b_{\varkappa,\lambda}$ multimodis ita determinari posse ut ex $(2n)$ summis, e quibus conflata est aequatio antecedens, $(2n-1)$ earum evanescant, unde fit ut reliqua semper sponte evanescat.

Sed et in aequationibus (15) quantitates $G_1 G_2 \ldots . G_{2n}$ et in (3), (6) quantitates $a_{\varkappa,\lambda}$ ut indeterminatas habere licet. Unde satis elucet e quantitatum $x_\varkappa^{(p)}$ numero, cum conditionibus $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ solis satisfaciant, $\frac{3n^2+3n-2}{2}$ earum ex arbitrio determinari posse. Quas quantitates omnes si tanquam $2n$ systemata valorum variabilium $X_1 X_2 \ldots . X_n$ consideramus, ex antecedentibus theorema fluit hoc:

Theorema 1.

Si functio aliqua secundi ordinis variabilium $X_1, X_2 \ldots . X_n$ homogenea pro $(2n-1)$ systematis valorum evanescit sequentium

$$\begin{array}{l} X_1 = x_1^{(1)},\ X_2 = x_2^{(1)},\ \ldots .\ X_n = x_n^{(1)} \\ X_1 = x_1^{(2)},\ X_2 = x_2^{(2)},\ \ldots .\ X_n = x_n^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1 = x_1^{(2n)},\ X_2 = x_2^{(2n)},\ \ldots .\ X_n = x_n^{(2n)} \end{array}$$

inter quos $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes valent, quae e (3), (6) facta coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ eliminatione prodeunt; functio illa etiam pro reliquo systemate evanescit.

6.

Theorema propositum per se dignum quod adnotetur inprimis magno est usui in geometria, quoniam in theoria curvarum et superficierum secundi ordinis quaedam problemata, quae valde diversa esse videntur, prorsus congruere docet. Id sequentibus illustrabo.

Posito $n=3$ per $\frac{x_1^{(p)}}{x_3^{(p)}}, \frac{x_2^{(p)}}{x_3^{(p)}}$ distantias designemus puncti alicujus p a duobus axibus fixis cum puncto in eodem plano sitis, sub angulo recto se intersecantibus. Tum facile est inquirere, quid in geometria significet aequatio (3), quae positis loco p, q valoribus 1 2 3 diversis tres aequationes praebet has:

$$\begin{aligned} 0 = x_1^{(1)}(a_{1,1}x_1^{(2)} + a_{1,2}x_2^{(2)} + a_{1,3}x_3^{(2)}) &+ x_2^{(1)}(a_{2,1}x_1^{(2)} + a_{2,2}x_2^{(2)} + a_{2,3}x_3^{(2)}) \\ &+ x_3^{(1)}(a_{3,1}x_1^{(2)} + a_{3,2}x_2^{(2)} + a_{3,3}x_3^{(2)}) \\ 0 = x_1^{(2)}(a_{1,1}x_1^{(3)} + a_{1,2}x_2^{(3)} + a_{1,3}x_3^{(3)}) &+ x_2^{(2)}(a_{2,1}x_1^{(3)} + a_{2,2}x_2^{(3)} + a_{2,3}x_3^{(3)}) \\ &+ x_3^{(2)}(a_{3,1}x_1^{(3)} + a_{3,2}x_2^{(3)} + a_{3,3}x_3^{(3)}) \\ 0 = x_1^{(3)}(a_{1,1}x_1^{(1)} + a_{1,2}x_2^{(1)} + a_{1,3}x_3^{(1)}) &+ x_2^{(3)}(a_{2,1}x_1^{(1)} + a_{2,2}x_2^{(1)} + a_{2,3}x_3^{(1)}) \\ &+ x_3^{(3)}(a_{3,1}x_1^{(1)} + a_{3,2}x_2^{(1)} + a_{3,3}x_3^{(1)}). \end{aligned}$$

Constat enim aequatione prima conditionem exprimi ut punctum 1 in linea polari puncti 2 vel punctum 2 in linea polari puncti 1 situm sit respectu curvae secundi ordinis, quae analytice repraesentatur aequatione:

$$\begin{aligned} 0 = x_1(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3) &+ x_2(a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3) \\ &+ x_3(a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3) \end{aligned}$$

in qua rursus $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ coordinatas orthogonales designant.

Unde haud difficile est animadversu aequationes illas tres conditiones continere, ut puncta 1 2 3 ita inter se conjugata sint, ut linea polaris cujuslibet eorum reliqua tangat. Proposita igitur curva aliqua secundi ordinis bina puncta, quorum alterum in linea polari alterius situm est, puncta respectu curvae propositae conjugata et terna puncta, quorum

quodque polus est lineae per duo reliqua ductae, systema punctorum respectu curvae propositae conjugatorum in sequentibus appellabo.

Eodem modo aequatione (6), quae positis loco p, q valoribus 1 2 3 diversis suppeditat has aequationes:

$$0 = x_1^{(4)}(a_{1,1}x_1^{(5)} + a_{1,2}x_2^{(5)} + a_{1,3}x_3^{(5)}) + x_2^{(4)}(a_{2,1}x_1^{(5)} + a_{2,2}x_2^{(5)} + a_{2,3}x_3^{(5)}) + x_3^{(4)}(a_{3,1}x_1^{(5)} + a_{3,2}x_2^{(5)} + a_{3,3}x_3^{(5)})$$

$$0 = x_1^{(5)}(a_{1,1}x_1^{(6)} + a_{1,2}x_2^{(6)} + a_{1,3}x_3^{(6)}) + x_2^{(5)}(a_{2,1}x_1^{(6)} + a_{2,2}x_2^{(6)} + a_{2,3}x_3^{(6)}) + x_3^{(5)}(a_{3,1}x_1^{(6)} + a_{3,2}x_2^{(6)} + a_{3,3}x_3^{(6)})$$

$$0 = x_1^{(6)}(a_{1,1}x_1^{(4)} + a_{1,2}x_2^{(4)} + a_{1,3}x_3^{(4)}) + x_2^{(6)}(a_{2,1}x_1^{(4)} + a_{2,2}x_2^{(4)} + a_{2,3}x_3^{(4)}) + x_3^{(6)}(a_{3,1}x_1^{(4)} + a_{3,2}x_2^{(4)} + a_{3,3}x_3^{(4)}),$$

conditiones exprimi intelligimus ut puncta 4 5 6 respectu ejusdem curvae ac puncta 1 2 3 systema punctorum conjugatorum constituant. Cum uno secundum theorema 1. aequationis:

$$0 = b_{1,1}X_1^2 + b_{2,2}X_2^2 + b_{3,3}X_3^2 + 2\,b_{2,3}X_2X_3 + 2\,b_{3,1}X_3X_1 + 2\,b_{1,2}X_1X_2$$

coefficientes $b_{1,1}\ b_{2,2}\ldots$ semper ita determinari liceat ut coordinatae punctorum 1 2 .... 6 pro $\frac{X_1}{X_3}$, $\frac{X_2}{X_3}$ substitutae aequationi satisfaciant, per sex puncta, quae consideramus, curva quaedam secundi ordinis duci potest. Unde hoc fluit theorema:

Theorema 2.

Proposita curva aliqua secundi ordinis bina systemata quaecunque punctorum respectu ejus conjugatorum in alia curva secundi ordinis sita sunt.

7.

Hic quaestio praetermittenda non videtur num vice versa sex puncta in curva aliqua s. o. ex arbitrio sumta tanquam duo systemata punctorum respectu alius curvae s. o. conjugatorum considerari liceat. Facta in (3), (6) coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ eliminatione, ut vidimus, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes conditionales prodeunt; hoc igitur casu, quo $n = 3$ ponitur, unica aequatio inter coordinatas intercedit. Unde sequitur si e duobus systematis punctorum respectu alicujus curvae s. o. conjugatorum quinque

ad arbitrium ponantur, sextum in curva quadam ex arbitrio sumi posse, quam curvam per secundum theorema eam secundi ordinis esse videmus, quae per quinque illa puncta ex arbitrio sumta determinatur.

Simulac vero sex puncta 1 2 ... 6 ita determinata sunt, ut pro duobus systematis curvae alicujus s. o. habere liceat, curva ipsa prorsus determinata est, quod coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$, quos aequatio curvam analytice repraesentans continet, determinandorum numerus aequationum conditionalium numero superatur. Unde habetur:

Theorema 3.

Quaelibet sex puncta in curva aliqua secundi ordinis sita et quolibet modo in duo systemata trium punctorum divisa, duo sunt systemata punctorum respectu curvae cujusdam alius secundi ordinis conjugatorum.

Sed cum sex puncta decem rationibus in duo systemata trium punctorum dividi possint, decem curvae s. o. diversae exstant, quarum cuique sex illa puncta duo sunt systemata punctorum conjugatorum.

Igitur si spectamus theorema antecedens, facile intelligitur problema: datis e duobus systematis punctorum conjugatorum quinque punctis sextum punctum invenire cum problemate: datis quinque punctis curvae alicujus s. o. sextum aliquod punctum in eadem curva positum invenire, prorsus congruere.

8.

Vidimus supra proposita curva aliqua s. o. $f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$, ut puncta p, q respectu ejus conjugata sint, inter coordinatas eorum aequationem respectu coefficientium expressionis $f(x_1\, x_2\, x_3)$ linearem locum habere:

$$x_1^{(p)} f'(x_1^{(q)}) + x_2^{(p)} f'(x_2^{(q)}) + x_3^{(p)} f'(x_3^{(q)}) = 0.$$

Igitur quot paria punctorum conjugatorum consideramus tot hujusmodi aequationes habemus. Cum vero expressio $f(x_1\, x_2\, x_3)$ quinque coefficientes contineat, quinque paribus punctorum conjugatorum datis curva ipsa determinata erit. Quare proponere licet problema: datis quinque paribus punctorum respectu alicujus curvae s. o. conjugatorum curvam construere. Si vero quatuor tantum paria punctorum respectu alicujus

curvae s. o. data sunt, inter quinque coefficientes aequationis curvae quatuor aequationes lineares locum habent; quarum ope ex uno coefficiente reliqui lineariter determinari possunt. Sit λ coefficiens, quo reliqui lineariter determinantur. Quo facto curvae aequatio formam induet:

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) + \lambda\,\psi(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

designantibus φ et ψ functiones s. o., quarum coefficientes e coordinatis punctorum datorum compositi sunt.

Hac igitur aequatione λ pro arbitrio sumto omnes curvae repraesentantur, quibus quatuor paria data punctorum conjugatorum sunt. Cum vero, quicunque sit valor ipsius λ aequationi quatuor punctorum coordinatae satisfaciant, in quibus curvae $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ concurrunt, omnes curvae s. o. quibus sunt quatuor paria punctorum conjugatorum data, in quatuor punctis concurrunt. Sese offert igitur nobis alterum problema, dignum quod suscipiatur: quatuor puncta intersectionis omnium curvarum s. o. invenire, quae quaelibet quatuor paria punctorum respectu earum conjugatorum data habeant.

Proposita curva aliqua s. o. quodlibet systema punctorum respectu ejus conjugatorum vice trium parium punctorum conjugatorum fungitur. Quare curva ipsa cum dato quolibet systemate punctorum conjugatorum datisque duobus quibuslibet paribus punctorum conjugatorum, tum duobus quibuslibet systematis punctorum conjugatorum in curva aliqua s. o. sitis determinata erit. Si vero e duobus systematis punctorum respectu curvae alicujus s. o. conjugatorum quinque puncta data sunt, hoc modo quatuor tantum puncta in illa curva sita determinata erunt.

9.

Jam legem reciprocitatis, quoad ejus usum faciam, paucis verbis adumbrem, cujus ope ex antecedentibus alia theoremata sine magno negotio fluunt, quas commemorandas existimaverim. Haec lex ea re nititur quod, curva aliqua s. o. proposita, quae directrix appelletur, si puncta quaedam in linea recta sita sunt eorum lineae polares in polo illius lineae concurrunt et si lineae quaedam in uno puncto concurrunt earum poli in linea polari illius puncti siti sunt. Unde elucet cuique

theorematі, quod docet quasdam lineas in uno puncto concurrere aut quaedam puncta in linea recta sita esse, alterum theorema respondere, quod vice versa enuntiet, quaedam puncta in linea recta sita esse, aut quasdam lineas in uno puncto concurrere, ita ut cuique lineae alterius quoddam punctum alterius theorematis respondeat.

Sic porro cuique puncto in curva aliqua s. o. sito linea aliam curvam s. o. tangens et cuique lineae curvam priorem tangenti punctum in posteriori situm respondet. Talium curvarum alteram alterius curvam respectu directricis propositae polarem vocabimus. Proposita curva aliqua s. o. binas lineas, quarum altera ducta est per polum alterius respectu curvae propositae conjugatas appellare convenit, cum respondeant binis punctis respectu curvae polaris conjugatis. Denique ternae lineae, quarum quaeque linea est polaris puncti, in quo coeunt duae reliquae, systema linearum respectu curvae propositae conjugatarum constituant, quippe quod systemati punctorum respectu curvae polaris conjugatorum respondeat.

His praemissis theoremata adjiciamus legis reciprocitatis ope e theorematis 2., 3. sequentia:

Theorema 4.

Proposita curva aliqua secundi ordinis bina systemata quaecunque linearum respectu ejus conjugatarum aliam secundi ordinis curvam tangunt.

Theorema 5.

Latera duorum triangulorum curvae alicui secundi ordinis circumscriptorum pro duobus systematis linearum respectu alius cujusdam curvae secundi ordinis conjugatarum habere licet.

Eadem ratione e § 8 sequitur: datis quinque paribus linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum curvam ipsam determinatam esse: omnes curvas s. o., quae eadem quatuor paria linearum conjugatarum data habeant, quibusdam quatuor lineis simul tangi. Cum vero systema linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum pro tribus paribus linearum respectu ejus conjugatarum habere liceat, duo systemata data linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum, quae, ut supra intelleximus, curva aliqua s. o. tangantur necesse est, curvam ipsam determinabunt. Si vero e duobus systematis linearum respectu curvae

alicujus s. o. conjugatarum quinque lineae datae sunt ea ratione quatuor tantum lineae eam curvam tangentes determinatae erunt.

Denique respicientibus nobis ad definitionem systematis linearum respectu curvae alicujus s. o. conjugatarum observare licet, puncta tria, in quibus binae earum linearum concurrant, systema punctorum respectu ejus curvae conjugatorum constituere. Quare ex antecedentibus hoc fluit theorema notum:

Theorema 6.

Quaelibet triangula duo curvae alicui secundi ordinis inscripta, alii curvae secundi ordinis circumscripta et vice versa quaelibet triangula duo curvae alicui secundi ordinis circumscripta alii curvae secundi ordinis inscripta esse.

10.

Revertamur ad theorema 1. posito $n = 4$ geometrice interpretandum. Quo consilio coordinatae punctorum aliquorum p, q vocentur $\frac{x_1^{(p)}}{x_4^{(p)}}, \frac{x_2^{(p)}}{x_4^{(p)}}, \frac{x_3^{(p)}}{x_4^{(p)}}; \frac{x_1^{(q)}}{x_4^{(q)}}, \frac{x_2^{(q)}}{x_4^{(q)}}, \frac{x_3^{(q)}}{x_4^{(q)}}$, quae ternis directionibus sibi invicem normalibus sunt parallelae. Quae coordinatae si satisfaciant aequationi (3) puncta determinant, quorum alterum in plano polari alterius situm sit respectu superficiei secundi ordinis aequatione $\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda = 0$ repraesentatae. Quo apparet aequationibus sex, quas aequatio (3) positis pro p, q valoribus 1 2 3 4 diversis praebeat, conditiones exprimi ut puncta 1 2 3 4 ita conjugata sint ut planum polare cujuslibet eorum reliqua tangat. Proposita aliqua superficie s. o. bina puncta, quorum alterum in plano polari alterius situm est, puncta respectu superficiei propositae conjugata et quaterna puncta, quorum quodque est polus plani per tria reliqua ducti in sequentibus puncta respectu superficiei propositae conjugata vocabimus. Igitur positis pro p, q valoribus 1 2 3 4 diversis aequatio (6) suppeditat sex relationes quibus satisfieri necesse est, ut puncta 5 6 7 8 conjugata sint respectu ejusdem superficiei ac puncta 1 2 3 4. His vero conditionibus cum theorema (1) doceat omnibus aequationibus homogeneis s. o. variabilium $X_1\, X_2\, X_3\, X_4$, quibus coordinatae 1 2 .... 7 pro variabi-

libus substitutae satisfaciant, etiam octavi puncti 8 coordinatas satisfacere, hac ex re concludere licet, omnes superficies per septem puncta 1 2 .... 7 ductas etiam per octavum punctum transire. Unde fluit theorema:

Theorema 7.

Proposita superficie aliqua secundi ordinis bina systemata punctorum respectu ejus conjugatorum ita inter se disposita sunt, ut omnes superficies secundi ordinis per septem eorum ductae etiam per reliquum punctum transeant.

Quod theorema, cum quaelibet tres superficies s. o. octo puncta communia habeant, et per septem puncta innumerabiles superficies non eadem curva intersectionis gaudentes duci possint, sic quoque enuntiare licet:

Proposita superficie aliqua secundi ordinis bina systemata punctorum respectu ejus conjugatorum considerari possunt tanquam octo puncta intersectionis trium aliarum superficierum quarundam secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentium.

11.

Vidimus supra facta e (3), (6) coefficientium $a_{\varkappa,\lambda}$ eliminatione $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aequationes conditionales relinqui. Si igitur $n=4$ ponatur tribus aequationibus coordinatae octo punctorum 1 2 3 .... 8 satisfaciant necesse est, ut tanquam duo systemata punctorum conjugatorum respectu alicujus superficiei s. o. haberi possint. Unde sequitur septem ex iis ad arbitrium sumi posse, octavum inde determinatum esse. Notasse hic juvabit cum aequationes (3), (6) novem aequationes, quibus octavi puncti coordinatae desint, et tres aequationes respectu coordinatarum octavi puncti lineares complectantur, priores ad coefficientes $a_{\varkappa,\lambda}$ determinandas suppeditare, quibus factis posteriores in coordinatis octavi puncti lineariter determinandis succurrere. Igitur si e duobus systematis punctorum respectu superficiei cujusdam s. o. conjugatorum septem puncta data sunt cum superficies ipsa determinata erit, quia coefficientes $a_{\varkappa,\lambda}$ aequationis $\Sigma\, a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda = 0$ eam repraesentantis coordinatis punctorum datorum exprimere possumus, tum octavum punctum duorum systematum.

Cum vero illa septem puncta ad arbitrium ponere liceat e theoremate antecedente sequitur theorema notum:

Theorema 8.

Omnes superficies secundi ordinis per septem puncta ex arbitrio posita ductae octavum punctum quoddam illis determinatum tangunt.

Adjicio alterum theorema antecedentibus probatum:

Theorema 9.

Quaelibet superficies tres secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentes in octo punctis se invicem secant, quae tanquam duo systemata punctorum respectu alius cujusdam superficiei secundi ordinis conjugatorum considerari licet.

Adnotandum vero hic videtur, cum octo puncta 35 modis in duo systemata quatuor punctorum dirimi possint, 35 superficies s. o. diversas exstare, quarum cuique puncta octo intersectionis trium superficierum s. o. datarum duo sint systemata punctorum conjugatorum.

Jam si respicimus ad theoremata antecedentia dubium non relinquitur, quin problema: e duobus systematis punctorum conjugatorum respectu superficiei alicujus secundi ordinis datis septem punctis octavum punctum invenire, cum problemate: datis septem punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis octavum punctum intersectionis invenire, prorsus congruat.

12.

Proposita superficie aliqua s. o., ut duo puncta respectu ejus conjugata sint, inter coordinatas eorum unica aequatio respectu coefficientium aequationis superficiei linearis locum habere debet. Quare cum aequatio superficiei s. o. novem coefficientes contineat, ad determinandam superficiem novem paria punctorum respectu ejus conjugatorum data esse necesse est. Igitur octo paria punctorum conjugatorum data superficiem non prorsus determinabunt, sed curvam solum intersectionis omnibus superficiebus s. o. communem, quae datis octo paribus punctorum conjugatorum gaudent. Cum enim inter coefficientes aequationis superficiei

octo aequationes valeant, earum ope ex uno coefficiente reliqui lineariter determinari possunt. Si igitur per λ coefficiens designatur, quo reliqui lineariter determinantur, aequatio superficiei formam induit:

$$\varphi(x_1 x_2 x_3 x_4) + \lambda\, \psi(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0,$$

designantibus φ et ψ functiones s. o., quarum coefficientes e coordinatis punctorum datorum compositi sunt. Quae aequatio, λ ad arbitrium sumto, cum repraesentet omnes superficies octo paribus punctorum conjugatorum gaudentes et ei omnium punctorum coordinatae satisfaciant, quae aequationibus $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ simul satisfaciunt, omnes illae superficies eandem curvam intersectionis habebunt. Systema punctorum respectu curvae alicujus conjugatorum vice sex parium punctorum conjugatorum fungitur. Quare omnibus superficiebus dato systemate datisque duobus paribus punctorum conjugatorum gaudentibus eadem est curva intersectionis.

Simili modo probatur omnes superficies, quae septem paria punctorum respectu earum conjugatorum data vel unum systema et unum par punctorum conjugatorum datum habeant, in octo punctis coire. Nam si aequationum septem conditionalium ope e duobus coefficientibus λ, μ reliqui determinantur, hac ratione aequatio superficiei in formam redigitur hanc:

$$\varphi(x_1 x_2 x_3 x_4) + \lambda\, \psi(x_1 x_2 x_3 x_4) + \mu\, \chi(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0.$$

Qua aequatione, cum coefficientes, quos continent functiones φ, ψ, χ, coordinatis punctorum datorum determinati sint, λ, μ pro arbitrio sumtis, omnes superficies repraesentantur, quae in iisdem octo punctis coeunt.

Lex reciprocitatis, quam adhuc usque ad theoremata adhibuimus, quae ad figuras in eodem tantum plano sitas pertinent, idonea est, quae dilatetur ad figuras in spatio quolibet modo sitas. Omnia enim quae in § 9 de punctis, lineis, curvis in eodem plano sitis breviter sunt exposita ad puncta in spatio sita, plana, superficies transferri licet. Notum enim est omnium punctorum in plano aliquo sitorum plana polaria respectu superficiei s. o. ad arbitrium sumtae, cui nomen tribuatur directricis, in polo illius plani coire, et omnium planorum in uno puncto concurrentium polos in plano polari illius puncti sitos esse. Si porro punctum in superficie aliqua s. o. movetur, ejus planum respectu directricis polare aliam superficiem s. o. tangit, in qua siti sunt poli omnium planorum

superficiem priorem tangentium. Talium superficierum altera alterius superficiei respectu directricis polaris vocetur. Hae superficies porro ea proprietate sunt, ut si binorum punctorum respectu alterius superficiei conjugatorum plana respectu directricis polaria ducantur, horum planorum respectu alterius superficiei alterum ductum sit per polum alterius et si systematis alicujus punctorum respectu alterius superficiei conjugatorum plana respectu directricis polaria ducantur, terna eorum respectu alterius superficiei in polo reliqui concurrant. Quare proposita superficie aliqua s. o. bina plana, quorum alterum ductum est per polum alterius plana respectu superficiei propositae conjugata et quaterna plana, quorum quodque est planum polare puncti, in quo tria reliqua concurrunt systema planorum respectu superficiei propositae conjugatorum appellabo.

Haec breviter exposita sufficiunt ad theoremata sequentia e theorematis (7), (8), (9) eruenda:

Theorema 10.

Proposita superficie aliqua s. o. bina systemata planorum respectu ejus conjugatorum ita inter se disposita sunt, ut omnes superficies secundi ordinis, quaecunque septem eorum tangant, etiam octavum planum tangunt.

Cum vero quaelibet tres superficies s. o. octo communia plana tangentia habeant et innumerabiles superficies septem plana data tangentes exstent, quae octo planis neque aliis simul tanguntur, theorema propositum sic quoque enuntiare licet:

Proposita superficie aliqua secundi ordinis bina systemata planorum respectu ejus conjugatorum considerari possunt tanquam octo plana tangentia tribus superficiebus quibusdam communia, quae non alio plano simul tanguntur.

Theorema 11.

Omnes superficies secundi ordinis, quae septem plana ex arbitrio posita tangunt, quoddam octavum quoque planum illis determinatum tangunt.

Theorema 12.

Octo plana tangentia tribus quibuslibet superficiebus secundi ordinis communia, quae non aliis planis simul tanguntur, considerari possunt

ut duo systemata punctorum respectu alius cujusdam superficiei secundi ordinis conjugatorum.

Notatu hic dignum est, cum octo plana 35 modis in duo systemata quatuor planorum dirimi possint, 35 superficies exstare quarum cuique, datis tribus superficiebus s. o. non plus quam octo plana tangentia communia habentibus, octo plana tangentia duo sint systemata planorum conjugatorum.

Deinde e § 12 legis reciprocitatis ope apparet: datis novem paribus planorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum, vel e duobus systematis planorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum datis septem planis superficiem ipsam determinatam esse: omnes superficies s. o. iisdem octo paribus planorum conjugatorum vel uno systemate et duobus paribus planorum respectu earum conjugatorum datis gaudentes omnibus planis tangi, quae earum quaslibet duas simul tangant: omnes superficies s. o. septem paribus planorum conjugatorum vel uno systemate et uno pari planorum respectu earum conjugatorum dato gaudentes octo planis simul tangi.

Denique theorema adjicio, quod ex antecedentibus facile fluit simulac cognitum est quatuor plana, quae ducta sint per terna puncta systematis alicujus punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum, systema planorum respectu ejusdem superficiei conjugatorum constituere, et quatuor puncta, in quibus terna plana systematis planorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum concurrant, systema punctorum respectu ejusdem superficiei conjugatorum efficere.

Theorema 13.

Duo tetraedra tribus superficiebus secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentibus simul inscripta tribus aliis superficiebus secundi ordinis simul circumscripta sunt, quae non plus quam octo plana tangentia communia habent, et vice versa: duo tetraedra tribus superficiebus secundi ordinis, quae non plus quam octo plana tangentia habent, simul circumscripta tribus aliis superficiebus secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentibus simul inscripta sunt.

SECTIO ALTERA.

Solvuntur quaedam problemata in sectione antecedente commemorata.

14.

Juvat theoremata (2), (3) geometricis quoque considerationibus probare. Quod cum lemmatis cujusdam ope assecuturi simus, cujus usus in sequentibus erit frequens, inprimis id lemma ad demonstrandum proponamus:

Lemma.

Si in quadrilatero aliquo completo, cujus diagonales tres sunt $a a'$, $b b'$, $c c'$, puncta $a a'$ et $b b'$ pro curva quadam secundi ordinis duo paria punctorum conjugatorum constituunt, etiam puncta $c c'$ puncta respectu ejus curvae sunt conjugata.

Notum enim est proposita curva aliqua s. o. si per puncta respectu ejus conjugata linea ducatur, hanc lineam curvae duobus punctis occurrere, quae cum prioribus quatuor puncta harmonica constituant. Igitur si (Fig. 1) puncta, in quibus diagonales tres curvam secant, vocamus $A A'$, BB', CC' et $a a' A A'$ et $b b' BB'$ puncta harmonica sunt, lemma demonstratum erit simulac puncta $c c' CC'$ harmonica esse ostenderimus. Licet vero figuram 1 pro projectione centrali alius figurae 2 habere, in qua curva secundi ordinis circulus et linea per puncta a' b' c' ducta in infinito posita sit.[1]) Qua in figura, cum punctis figurae 1 respondentibus eadem signa tributa sint, lineae $A A'$ $b c$; BB' $a c$; CC' $a b$ parallelae reperiuntur. Porro cum notum sit puncta harmonica in projectione centrali harmonica manere, utrasque chordas

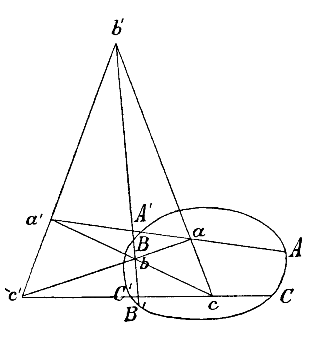


Fig. 1.

1) Poncelet. Traité des propriétés projectives etc. pag. 54.

AA' et BB' linea ab in duas partes inter se aequales secat et, ut puncta $cc'CC'$ in figura 1 harmonica sint, chordam CC' in figura 2 puncto c in duas partes inter se aequales dividi necesse est. Restat igitur ut demonstremus chordam CC' puncto c bifariam dividi, vel perpendiculares tres in chordis AA', BB', CC' erectas per puncta a, b, c ductas in uno puncto convenire. Sed hae lineae ab angulis trianguli $a\,b\,c$ ad latera opposita perpendiculariter ductae sunt. Igitur in uno puncto concurrunt.

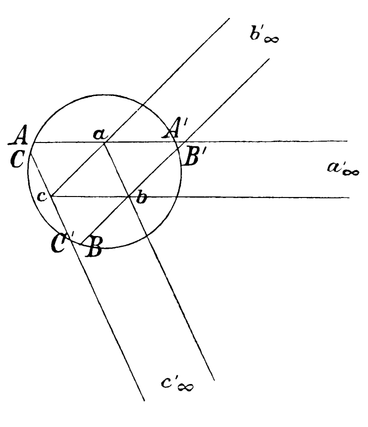


Fig. 2.

Ex hoc lemmate legis reciprocitatis ope sequitur:

Proposito quadrilatero aliquo si latera opposita duo paria linearum respectu curvae alicujus secundi ordinis conjugatarum constituant etiam diagonales lineas respectu ejusdem curvae conjugatas esse.

15.

Lemma propositum et theorema de hexogrammate curvae alicui s. o. inscripto a Pascale litteris mandatum et theorema hocce: duo quaelibet systemata punctorum respectu curvae alicujus s. o. conjugatorum curvae cuidam alii s. o. inscripta esse et vice versa quaelibet sex puncta in curva aliqua s. o. sita pro duobus systematis punctorum respectu cujusdam curvae alius s. o. haberi posse, ea ratione inter se nexa sunt ut ex eorum binis reliquum facile sequatur. Sint enim (Fig. 3) $a\,b\,c$; $a'\,b'\,c'$ duo systemata punctorum respectu curvae alicujus s. o. conjugatorum.

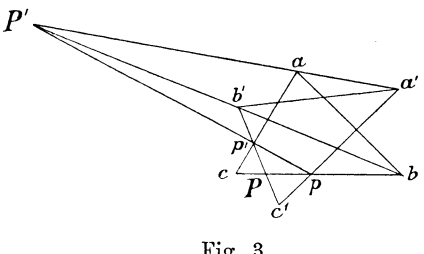


Fig. 3.

Cum punctum p', in quo lineae $a\,c$ (puncti b polari) linea $b'\,c'$ occurrit et b puncta sint conjugata, cum porro punctum p, in quo $a'\,c'$ (puncti b' polaris) et $b\,c$ coeunt, et b' puncta sint conjugata; secundum lemma propositum puncta P et P', in quibus concurrunt lineae $b\,c$, $b'\,c'$ et $b\,b'$, $p\,p'$ conjugata erunt. Igitur puncti P polaris per P'

transibit. Punctum P vero situm est in utraque linea $b\,c$ et $b'\,c'$; quare linea $a\,a'$ earum polos jungens puncti P polaris erit et hac ex causa punctum P' tanget. Igitur lineae tres $a\,a'$, $b\,b'$, $p\,p'$ in uno puncto concurrant necesse est. Quod sic quoque enuntiari licet: latera hexagoni $a\,a'\,c'\,b'\,b\,c$ opposita in tribus punctis concurrere, quae in linea recta reperiantur. Unde theorematis Pascalis ope sequitur altera pars theorematis supra propositi, hexagonum illud curvae alicui s. o. inscriptum esse.

Si vero ad alteram partem illius theorematis demonstrandam statuimus hexagonum $a\,a'\,c'\,b'\,b\,c$ curvae alicui s. o. inscriptum esse e theoremate Pascalis sequitur lineas $a\,a'$, $b\,b'$, $p\,p'$ in uno puncto concurrere. Cum vero curva aliqua s. o. quinque paribus punctorum conjugatorum determinetur, puncta $a\,b\,c$ pro systemate punctorum conjugatorum et $b'\,c'$ et $b'\,p$ pro duobus paribus punctorum conjugatorum respectu curvae alicujus s. o. considerare possumus. Haec curva gaudet punctis $P\,P'$ conjugatis quia $b\,p'$ et $b'\,p$ puncta conjugata sunt. Quare linea $P'\,a$ puncti P polaris erit. Praeterea linea $p\,c'$ puncti b' polaris erit quia $b'\,p$ et $b'\,c'$ puncta conjugata sunt. Unde sequitur punctum a' in quo coeant lineae $P'\,a$ et $p\,c'$ lineae $b'\,c'$ polum esse. Igitur etiam puncta $a'\,b'\,c'$ systema punctorum respectu ejus curvae conjugatorum constituunt, cui alterum systema $a\,b\,c$ punctorum conjugatorum esse supposuimus.

Hujus theorematis et lemmatis ope theorema Pascalis hac ratione probatur. Sit $a\,a'\,c'\,b'\,b\,c$ hexagonum quodlibet curvae alicui s. o. inscriptum. Cum puncta $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$ pro duobus systematis punctorum respectu curvae cujusdam s. o. conjugatorum habere liceat, ita inter se disposita sunt, quod lemmatis ope antea demonstravimus, ut hexagoni latera opposita in tribus punctis concurrant, quae in recta linea sita sint.

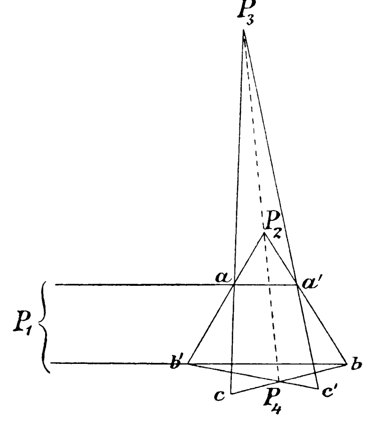


Fig. 4.

Denique restat ut lemma demonstretur. Proposita curva aliqua s. o. $a\,b$ et $a'\,b'$ (Fig. 4) duo paria sint punctorum respectu ejus conjugatorum. Si puncta, in quibus lineae $a\,a'$, $b\,b'$ et $a\,b'$, $a'\,b'$ concurrunt per P_1 et P_2 designamus lemma probatum erit,

simulac puncta P_1 P_2 conjugata esse ostenderimus. Quo consilio supponamus c et c' polos esse linearum $a\,b$ et $a'\,b'$. Quibus statutis puncta $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$ duo systemata punctorum respectu curvae propositae conjugatorum erunt. Qua ex causa latera hexagoni $b'\,a\,c\,b\,a'\,c'$ in tribus punctis P_2 P_3 P_4 concurrunt in linea recta sitis. Cum vero punctum P_1 polus sit lineae per P_3 P_4 ductae puncta P_1 P_2 conjugata erunt respectu curvae propositae.

16.

Problema 1.

Dato systemate $a\,b\,c$ punctorum respectu cujusdam secundi ordinis curvae conjugatorum datisque duobus paribus $a''\,A$, $b''\,B$ punctorum respectu ejus conjugatorum punctorum a'', b'' lineas polares invenire.

Ducantur (Fig. 5) lineae $a\,a''$ et $b\,b''$ in p coeuntes. Inde ducantur lineae $p\,A$ et $p\,B$ lineis $b\,c$ et $a\,c$ in α et β occurrentes et $\beta\,b''$, $b\,B$, $\alpha\,a''$, $a\,A$ lineis jungantur, quarum priores in β', posteriores in α' concurrant. Denique linea $\alpha'\,\beta'$ ducatur lineae $a\,c$ in β'', lineae $b\,c$ in α'' occurrens et jungantur $B\,\beta''$ et $A\,\alpha''$. Quibus factis $B\,\beta''$ ipsius b'', $A\,\alpha''$ ipsius a'' erit linea polaris. Nam si lineas $b\,\beta$, $b''\,B$ tanquam quadrilateri completi diagonales contemplemur, tertia ejus diagonalis $p\,\beta'$ erit, et cum $b\,\beta$, $b''\,B$ duo paria sint punctorum conjugatorum, secundum lemma etiam $p\,\beta'$ puncta erunt conjugata. Sic porro demonstratur lineis $a\,\alpha$, $a''\,A$, $p\,\alpha'$ tanquam quadrilateri completi diagonalibus habitis puncta $p\,\alpha'$ conjugata esse. Unde elucet $\alpha'\,\beta'$ polarem esse ipsius p. Cum vero in β'' lineae $\alpha'\,\beta'$, $a\,c$ coeant, linea $b\,p$, quippe quae earum polos tangat, est puncti β'' polaris. Tangit igitur puncti b'' polaris et B et β''. Unde sequitur $B\,\beta''$ ipsius b'' eademque ratione $A\,\alpha''$ ipsius a'' polarem esse.

In posterum usum adjiciendum videtur, quomodo puncti c'', in quo coeunt lineae $A\,b''$ $B\,a''$, linearum jamjam ductarum ope linea polaris construatur, quam cum lineis a'' b'' et AB in uno puncto C concurrere lemma antecedens enuntiat cum $a''\,A$, $b''\,B$, $c''\,C$ diagonales sint ejusdem quadrilateri completi. Hunc in finem ducantur lineae $\beta''\,c''$, $\alpha''\,c''$ lineis $p\,a$ et $p\,b$ in a''' et b''' occurrentes. Porro si linea $a'''\,b'''$ ducitur lineam $\alpha'\,\beta'$ in γ'' secans, junctis $\gamma''\,C$ punctis, $\gamma''\,C$ puncti c'' est polaris. Etenim $\alpha''\,a'''$, $\beta''\,b'''$, $\gamma''\,c''$ diagonales sunt quadrilateri cujusdam completi et puncta $\alpha''\,a'''$, $\beta''\,b'''$ duo paria punctorum conjugatorum constituunt.

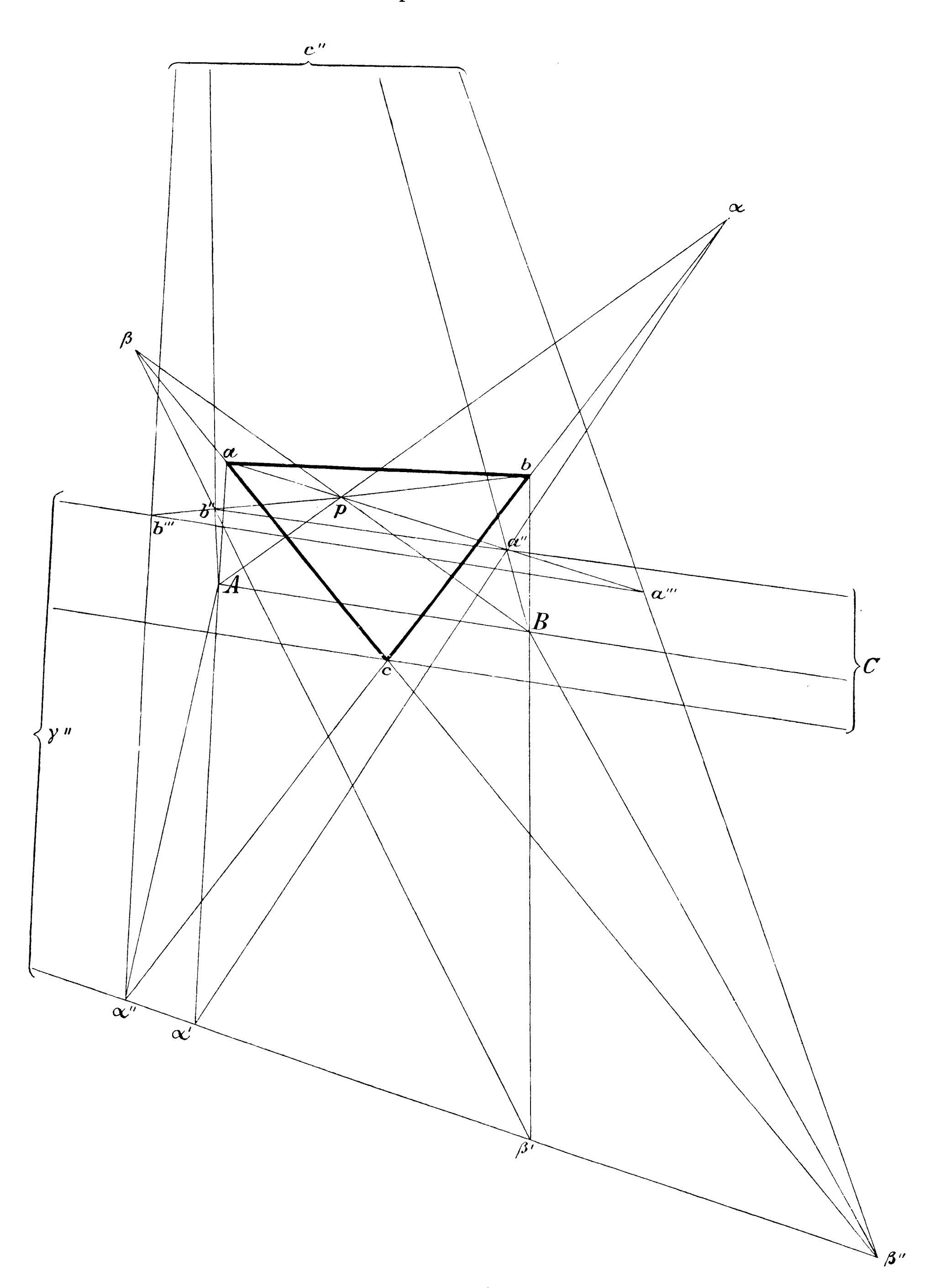


Fig. 5.

17.

Problema 2.

Datis e duobus systematis punctorum respectu superficiei alicujus secundi ordinis conjugatorum septem punctis octavum punctum invenire.

Sint $a\,b\,c\,d$, $a'\,b'\,c'\,d'$ duo systemata punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum. Ducantur lineae $d\,a'$, $d\,b'$, $d\,c'$, $b'\,c'$, $c'\,a'$, $a'\,b'$, quae planum per $a\,b\,c$ ductum in punctis $a''\,b''\,c''$, $A\,B\,C$ secent. Quae puncta ita inter se disposita sunt, ut per $a''\,b''\,C$, $b''\,c''\,A$, $c''\,a''\,B$ tres lineae rectae duci possint. Porro tria plana per puncta $d'\,b'\,c'$, $d'\,c'\,a'$, $d'\,a'\,b'$ ducantur, quae planum $a\,b\,c$ in lineis $A\,\alpha''$, $B\,\beta''$, $C\,\gamma''$ secent. Per has lineas et punctum d si tria plana ducimus, haec plana erunt polaria punctorum $a''\,b''\,c''$. Cum enim omnium punctorum, quae sita sunt in linea $d\,a'$, plana polaria per intersectionem planorum $b'\,c'\,d'$ et $a\,b\,c$ ducta sint et punctum a'' in hac linea et in plano $a\,b\,c$ situm sit, ejus planum polare per lineam $A\,\alpha''$ et punctum d transeat necesse est. Eademque ratione probatur $B\,\beta''\,d$ ipsius b'' et $C\,\gamma''\,d$ ipsius c'' planum polare esse. Sed superficiei et plani $a\,b\,c$ curvam intersectionis contemplemur et lineas et puncta in plano $a\,b\,c$ constituta respectu ejus curvae interpretemur. Respectu hujus curvae puncta $a\,b\,c$ systema punctorum conjugatorum constituent et $A\,\alpha''$ ipsius a'', $B\,\beta''$ ipsius b'', $C\,\gamma''$ ipsius c'' lineae polares erunt. Jam si punctum d' non est datum linearum $A\,\alpha''$, $B\,\beta''$, $C\,\gamma''$ nonnisi puncta $A\,B\,C$ ea ratione, qua usi sumus, determinari possunt. Sed in usu sunt hae lineae ad determinandum punctum d'. Nam si per eas et per lineas $b'\,c'$, $c'\,a'$, $a'\,b'$ tria plana ducantur in puncto d' concurrent. Quare meditemur quomodo lineas $A\,\alpha''$, $B\,\beta''$, $C\,\gamma''$, puncto d' non cognito reperiemus. Haec vero questio in problema I. redit. Si enim respicimus ad curvam in plano $a\,b\,c$ sitam respectu ejus datum est systema $a\,b\,c$ punctorum conjugatorum et tria paria $a''\,A$, $b''\,B$, $c''\,C$ punctorum conjugatorum.

18.

Etsi problema antecedens omnino est absolutum ad nexum octo punctorum, quae duo systemata punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum constituunt, melius intelligendum et inde alteram

problematis antecedentis solutionem deducendam investigationem datorum octo punctorum de integro suscipiamus.

Datis systematis duobus $a\,b\,c\,d$, $a'\,b'\,c'\,d'$ punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum punctum plano $d\,b\,b'$ et lineae $a\,a'$ commune p vocetur. Hujus puncti, quia situm est in linea polos $a\,a'$ jungente, planum polare per intersectionem planorum polarium $b\,c\,d$ et $b'\,c'\,d'$ transibit, et quia hoc punctum in plano $d\,b\,b'$ inest, ejus planum polare per intersectionem plani $a'\,c'\,d'$ et lineae $a\,c$ transeat necesse est. Si igitur planum ducis per puncta tria intersectionis plani $b\,c\,d$ et lineae $b'\,c'$; $b'\,c'\,d'$ et $b\,c$; $a'\,c'\,d'$ et $a\,c$ puncti p habes planum polare. Sed ejusdem plani quartum punctum facile invenitur hoc modo. Ducantur lineae $p\,a'$ et $p\,b'$, quarum altera punctum a tanget, altera lineam $d\,b$ in puncto aliquo secabit, quod vocemus q. Hujus vero puncti planum polare cum per a, et ipsius b' planum polare per a' transeat, puncti p planum polare secundum lemma per intersectionem linearum $q\,a'$ et $a\,b'$, id est per intersectionem plani $b\,d\,a'$ et lineae $a\,b'$ transibit. Hoc igitur punctum intersectionis, si designemus per $(d\,a'\,b\,.\,a\,b')$ eademque ratione alia puncta, quae contemplabimur, per planum et lineam, in quibus sita sunt; puncta quatuor $(d'\,b'\,c'.\,b\,c)$, $(d'\,c'\,a'.\,c\,a)$, $(d\,b\,c\,.\,b'\,c')$, $(d\,a'\,b\,.\,a\,b')$ in eodem plano sita sunt, vel, si lineae per puncta designentur, per quae ductae sunt, ea ratione ut $(b'\,c'\,d'.\,b\,c)$ $(a'\,c'\,d'.\,a\,c)$ lineam significet per puncta $(b'\,c'\,d'.\,b\,c)$ et $(a'\,c'\,d'.\,a\,c)$ ductam; linearum:

$$(d'\,b'\,c'.\,b\,c)\,(d'\,c'\,a'.\,c\,a) \quad \text{et} \quad (d\,a'\,b\,.\,a\,b')\,(d\,b\,c\,.\,b'\,c')$$

altera alteram secat.

19.

Nunc puncta octo, quae ut supra adnotavimus, quolibet modo in duo systemata quatuor punctorum divisa pro duobus systematis punctorum respectu superficiei alicujus s. o. conjugatorum haberi possint, quare nullum inter reliqua emineat, relatione eorum inventa per numeros designari convenit, ita ut signorum $c\,a\,b'\,c'\,a'\,b\,d'\,d$ loco scribantur 1 2 3 4 5 6 7 8. Quo facto linearum (734.61) (745.12), (856.23) (861.34) priorem, quam designemus per I, a posteriori secari, quam vocemus (III), paragrapho antecedente jamjam demonstratum est. Sic porro designentur:

(734.61) (745.12)	per I,		(834.61) (845.12)	per (I),
(745.12) (756.23)	„ II,		(845.12) (856.23)	„ (II),
(756.23) (761.34)	„ III,		(856.23) (861.34)	„ (III),
(761.34) (712.45)	„ IV,		(861.34) (812.45)	„ (IV),
(712.45) (723.56)	„ V,		(812.45) (823.56)	„ (V),
(723.56) (734.61)	„ VI,		(823.56) (834.61)	„ (VI).

Quarum expressionum quaelibet ex antecedente obtinetur signa 1 2 3 4 5 6 mutando in 2 3 4 5 6 1. Sed ut perspiciatur quomodo hae duodecim lineae inveniantur, puncta 1 2 3 ... 6 deinceps sex lineis jungamus ita ut hexagonum efficiatur, quod vocemus H. Hujus hexagoni latus quodque plano per latus oppositum et punctum 7 ducto secetur. Quo facto sex puncta intersectionis nanciscimur quibus ex ordine per lineas junctis lineas habemus I II .... VI alterum efficientes hexagonum quod designemus per A. Tertium hexagonum B nanciscimur, si loco puncti 7 eadem ratione puncto 8 utamur. Cujus hexagoni latera ea erunt, quae per (I) (II) .... (VI) designavimus. Haec tria hexagona proprietatibus memoratu dignis gaudent, quarum explicationem jam aggrediamur. Lineae tres per angulos hexagoni A oppositos ductae in puncto 7 sicuti lineae tres per angulos hexagoni B oppositos ductae in puncto 8 concurrunt. Cum enim puncta (734.61) et (761.34) in oppositis angulis hexagoni A sita sint, quae in intersectione planorum 734 et 761 punctum 7 tangentium coincidant, linea per haec puncta ducta punctum 7 tanget etc. Qua ex re apparet hexagoni A sicuti hexagoni B latus quodcunque per oppositum secari, et tria plana per latera opposita hexagoni A ducta in puncto 7 sicuti tria plana per latera opposita hexagoni B ducta in puncto 8 concurrere. Quod vero ad latera hexagonorum diversorum attinet I III V et (I) (III) (V) altera ab alteris secantur. Cum enim latera I (III) concurrere ostensum sit et signis 1 2 3 4 5 6 7 8 mutatis in 5 6 1 2 3 4 8 7 signa lineae (III) in I et I in (V) abeant, latus I etiam a (V) secatur. Praeterea lineae I (I) concurrunt, quia utraque in plano 612 sita est. Quo facto signa 1 2 3 4 5 6 in 3 4 5 6 1 2 vel 5 6 1 2 3 4 mutando linearum III V utramque a lineis (I) (III) (V) secari ostenditur. Eademque ratione laterum II IV VI et (II) (IV) (VI) altera cum alteris concurrere demonstratur. Si igitur, quae de lateribus hexagonum A et B enuntiata sunt, breviter complectimur,

cum laterum I III V (II) (IV) (VI) et (I) (III) (V) II IV VI altera ab alteris secentur ea omnia in eadem hyperbolida sita esse dicere possumus. Unde respicientibus nobis ad theoremata antecedentia hoc fluit theorema:

Theorema 14.

Si ex octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis non eadem curva intersectionis gaudentium sex puncta certo quodam ordine disposita lineis jungantur, ita ut hexagonum efficiatur, cujus latus quodque plano per latus oppositum et septimum punctum ducto secetur, qua constructione sensu peripheriae pergendo certo ordine sex puncta obtinentur, quae sex lineis deinceps jungantur, ita ut alterum hexagonum A efficiatur, si porro prioris hexagoni latus quodque plano per latus oppositum et octavum punctum ducto secetur, et haec puncta intersectionis lineis deinceps jungendo eodem modo tertium hexagonum B nanciscamur; utrumque hexagonum A, B in eadem hyperbolida situm est.

Hexagona H, A, B ita inter se comparata sunt, ut si eorum bina data sint, tertium facile reperiatur. Quod sine magno negotio patet, si hexagona A, B data sunt. Linea enim, quae jungit laterum I II et (I) (II) puncta intersectionis, latus 12 hexagoni H erit. Si vero hexagona H, A data sunt videamus quomodo hexagonum B inveniatur. Hujus hexagoni latus (I) cum situm sit in plano per I et 1 ducto et a lineis III et V secetur, ea linea erit, quae puncta jungit, in quibus lineae III et V plano per I et 1 ducto occurrunt. Sic porro invenimus secundum latus (II) si puncta jungimus, in quibus latera IV et VI plano per II et 2 ducto occurrunt etc. Sed notari juvat cum hexagona H et A septem punctis 1 2 3 .... 7 datis determinata sint hexagonum B horum punctorum ope construere nos docuisse. Quo hexagono B datorum septem punctorum ope invento intersectio trium planorum, quorum quodque per bina latera opposita ipsius B transit, octavum punctum 8 determinabit.

Regiom. 25 Jan. 1840.

3.

Ueber die Construction der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Punkte gegeben sind.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 24, Seite 36—39.]

1.

Es ist eine für die Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung wichtige und von den Geometern oftmals zur Lösung empfohlene Aufgabe:

„Mit Hülfe von 9 beliebigen Punkten einer Oberfläche zweiter „Ordnung einen beliebigen zehnten derselben Oberfläche auf lineäre „Weise zu construiren.“

Soviel ich weiss, ist bis jetzt keine Auflösung der vorliegenden Aufgabe veröffentlicht worden. In den folgenden Paragraphen werde ich eine in ihren Principien einfache, wenn gleich in der Ausführung weitläuftige Auflösung jener Aufgabe auseinandersetzen.

2.

Diese Auflösung beruht auf der Anwendung folgenden Lehrsatzes:

„Die Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes P in einem Systeme „Oberflächen, welche durch sieben gegebene Punkte hindurch„gehen, schneiden sich in einem und demselben Punkte Q.“

Um diesen Lehrsatz (den ich irgendwo gelesen zu haben mich erinnere, und der auch aus dem unten[1]) angegebenen, von Lamé aufgestellten Satze leicht sich ableiten lässt) zu beweisen, nehmen wir an, U, V, W seien beliebige homogene Functionen des zweiten Grades zwischen den Variabeln x, y, z, p. Wir bezeichnen die Ausdrücke

$$x_1\frac{\partial U}{\partial x}+y_1\frac{\partial U}{\partial y}+z_1\frac{\partial U}{\partial z}+p_1\frac{\partial U}{\partial p};\qquad x_1\frac{\partial V}{\partial x}+y_1\frac{\partial V}{\partial y}+z_1\frac{\partial V}{\partial z}+p_1\frac{\partial V}{\partial p};$$
$$x_1\frac{\partial W}{\partial x}+y_1\frac{\partial W}{\partial y}+z_1\frac{\partial W}{\partial z}+p_1\frac{\partial W}{\partial p}$$

respective durch U_1, V_1, W_1. Nimmt man nun die Grössen $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{p}$, $\frac{z}{p}$ für die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume, so stellen die Gleichungen $U=0$, $V=0$, $W=0$ drei beliebige Oberflächen zweiter Ordnung dar, und die Gleichung

$$\varkappa U+\lambda V+\mu W=0,$$

in welcher die Coëfficienten $\varkappa$, λ, μ willkürlich sind, stellt jede beliebige Oberfläche zweiter Ordnung dar, welche durch die gemeinsamen Schnittpunkte der drei erwähnten Oberflächen hindurchgeht. Wir können also sagen, dass die letzte Gleichung das System Oberflächen repräsentire, welches durch die gemeinsamen Schnittpunkte der drei Oberflächen sich legen lässt. Die Anzahl der erwähnten gemeinsamen Schnittpunkte ist 8. Allein da jede Oberfläche zweiter Ordnung, die durch 7 gegebene Punkte hindurchgeht, noch einen durch die 7 bestimmten achten Punkt trifft[2]): da ferner jede beliebigen 7 Punkte als Schnittpunkte von drei bestimmten Oberflächen zweiter Ordnung betrachtet werden können, so stellt obige Gleichung, mit passend gewählten Functionen U, V, W des zweiten Grades, das ganze System Oberflächen zweiter Ordnung dar, welches durch 7 beliebige Punkte im Raume hindurchgeht. Bezeichnet man nun

---

1) Wenn man den Punkt P in die Unendlichkeit fallen lässt, so erhält man den Satz:

„Die parallelen Diameter conjugirter Diametral-Ebenen in einem System Oberflächen „zweiter Ordnung, welche durch 7 gegebene Punkte hindurchgehen, oder, was dasselbe „ist, welche alle dieselben Schnittpunkte haben, treffen in einem und demselben Punkte „zusammen.“

Diesen Satz stellt Lamé in seinem Werke auf: Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géometrie p. 37.

2) Man vergleiche Crelle's Journal Bd. 20, S. 297, Theorema 8. [Diese Ausgabe, Seite 37].

durch $\frac{x_1}{p_1}$, $\frac{y_1}{p_1}$, $\frac{z_1}{p_1}$ die Coordinaten eines bestimmten Punktes P im Raume, so repräsentiren die Gleichungen $U_1 = 0$, $V_1 = 0$, $W_1 = 0$ die Polar-Ebenen des Punktes P respective für die Oberflächen $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, und die Gleichung

$$\varkappa U_1 + \lambda V_1 + \mu W_1 = 0$$

repräsentirt das ganze System Polar-Ebenen des Punktes P in dem Systeme Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die 7 erwähnten Punkte hindurchgehen. Da aber die letzte Gleichung für den Schnittpunkt Q der Polar-Ebenen $U_1 = 0$, $V_1 = 0$, $W_1 = 0$ erfüllt wird, so geht das ganze System Polar-Ebenen durch eben diesen Punkt hindurch. Die Punkte P und Q können wir, mit Herrn Professor Steiner, zugeordnete Pole in Rücksicht auf jede Oberfläche des Systems nennen. Denn jede dieser Oberflächen schneidet die Gerade PQ in harmonischen Punkten.

3.

Es bietet sich nun zunächst folgende Aufgabe dar:

Aufgabe 1.

„Wenn beliebige 7 Punkte des Raumes gegeben sind (welche „wir durch 1, 2, 3, ... 7 bezeichnen wollen), und ausserdem ein „Punkt P: so soll man den harmonischen Pol Q des letztern „construiren, in Rücksicht auf das ganze System Oberflächen „zweiter Ordnung, welche durch die 7 Punkte hindurchgehen."

Die Auflösung dieser Aufgabe zerfällt 1. in die Construction der Generatricen von drei Hyperboloïden, welche durch die 7 Punkte gehen, 2. in die Construction der Polar-Ebenen des Punktes P rücksichtlich dieser Hyperboloïde, welche Ebenen sich in dem gesuchten Punkte Q schneiden werden.

1. Es ist leicht zu sehen, dass, wenn man die Punkte 1, 2 und 3, 4 durch zwei gerade Linien verbindet und durch die übrigen Punkte 5, 6, 7 die drei Linien zieht, deren jede die beiden ersten schneidet, dass dann diese drei Linien die Generatricen eines Hyperboloïds sein werden, welches durch die 7 Punkte hindurchgeht.

Man erhält auf diese Weise noch zwei andere Hyperboloïde, wenn man die vier ersten Punkte mit einander vertauscht und die drei letzten ungeändert lässt. Es lassen sich auf die beschriebene Weise durch Vertauschung aller Punkte dreimal die Zahl der Combinationen von 7 Elementen zur dritten Classe, also 105 Hyperboloïde angeben (wenn nicht einige derselben zusammenfallen), welche sämmtlich durch die 7 Punkte hindurchgehen.

2. Es bleibt nun noch zu zeigen übrig, wie man die Polar-Ebene des Punktes P für eines von den 105 Hyperboloïden construiren könne. Zieht man zu diesem Zwecke durch den Punkt P drei Linien, von welchen jede durch zwei Generatricen des in Rede stehenden Hyperboloïds hindurchgeht, so werden die Schnittpunkte Punkte der Oberfläche sein. Construirt man daher auf jeder von diesen Linien den vierten, dem Punkte P correspondirenden harmonischen Punkt, so liegen die drei construirten Punkte auf der Polar-Ebene des Punktes P und die, die drei Punkte verbindende Ebene wird die gesuchte Polar-Ebene des Punktes P sein.

Der gesuchte Punkt Q ergibt sich nun als der Schnittpunkt von drei solchen Polar-Ebenen des Punktes P, welche sich auf drei verschiedene Hyperboloïde des Systems beziehen.

4.

Der vorhergehende Paragraph enthält die Elemente zur Lösung der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 2.

> „Die Polar-Ebene eines beliebig im Raume angenommenen „Punktes P rücksichtlich einer Oberfläche zweiter Ordnung zu „construiren, welche durch irgend 9 in ihr beliebig gegebene „Punkte bestimmt ist."

Sondern wir von den gegebenen 9 Punkten 1, 2, 3, ... 9 die beiden letzten ab und construiren zum Punkte P den harmonischen Pol Q in dem Systeme Oberflächen, welche durch die Punkte 1, 2, ... 7 hindurchgehen, so ist dieser Punkt allen Polar-Ebenen des Punktes P

in dem Systeme gemeinschaftlich. Da aber unter den verschiedenen Oberflächen des Systems sich auch diejenige befindet, welche durch die 9 Punkte bestimmt wird, so muss der Punkt Q rücksichtlich dieser Oberfläche in der Polar-Ebene des Punktes P liegen. Wir sind also im Stande, indem wir die 9 Punkte mit einander vertauschen, auf die angegebene Weise so viel Punkte Q der gesuchten Polar-Ebene von P zu construiren, als sich 9 Elemente zur zweiten Classe combiniren lassen, d. i. 36 Punkte.

Wenn wir demnach drei von diesen Punkten bestimmen und eine Ebene durch dieselbe legen, so muss dieselbe die gesuchte Polar-Ebene sein, und die übrigen 33 Punkte werden in ihr liegen.

5.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen ergibt sich nun die Auflösung der § 1 vorgelegten Aufgabe wie folgt.

Man nehme im Raume einen Punkt P beliebig an, construire die Polar-Ebene dieses Punktes rücksichtlich der durch die gegebenen 9 Punkte bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung, verbinde den Punkt P durch eine gerade Linie mit einem der gegebenen 9 Punkte und bestimme zu letzterem, dem Schnittpunkte der Polar-Ebene mit der geraden Linie und dem Punkte P, den conjugirten harmonischen Punkt R: so liegt dieser auf der durch die 9 Punkte bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung.

Bewegt man endlich den Punkt P durch alle Punkte des Raumes oder einer beliebigen Ebene, so beschreibt der entsprechende Punkt R die gesuchte Oberfläche zweiter Ordnung.

Königsberg, den 5. Februar 1842.

4.

Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloïd.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 24, Seite 40—43.]

Wenn drei gerade, im Raum willkürlich liegende Linien a, b, c von drei andern a', b', c' geschnitten werden, so kann man die Linien aa', bb', cc' als die gegenüberliegenden Seiten eines Sechsecks betrachten, dessen aufeinanderfolgende Seiten ac', ba', cb' sind. Die gegenüberliegenden Ecken dieses Sechsecks bezeichnen wir durch AA', BB', CC', in der Art, dass die Linien cb', ac', ba', bc', ca', ab' respective in A, B, C, A', B', C' zusammenlaufen. Alsdann bemerkt man leicht, dass die drei durch die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks gelegten Ebenen sich gegenseitig in den drei Diagonalen AA', BB', CC' schneiden. Da aber diese Ebenen in einem Punkte p'' zusammenstossen, so werden sich die genannten Diagonalen in eben demselben Punkte schneiden.

Auf gleiche Weise schneiden sich die Ebenen der gegenüberliegenden Winkel des Sechsecks in drei geraden Linien, welche in einer und derselben Ebene P'' liegen. Denn verlängert man die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks aa', bb', cc', bis sie sich respective in den Punkten A'', B'', C'' schneiden, so werden die Linien $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$ die Schnittlinien der Ebenen der gegenüberliegenden Winkel CC', AA', BB' sein. Da aber diese Linien das Dreieck $A''B''C''$ bilden, so müssen sie in einer und derselben Ebene liegen.

Durch die 6 Linien a, b, c, a', b', c' lässt sich ein Hyperboloïd legen. In Rücksicht auf dieses Hyperboloïd sind ABC, $A'B'C'$ die Tangirungspunkte der Ebenen, in welchen die durch dieselben Buchstaben bezeichneten Winkel des Sechsecks liegen. Die Ebenen der Winkel A und A', welche zugleich die Tangenten-Ebenen des Hyperboloïds in den Punkten A und A' sind, schneiden sich in der Linie, welche wir durch $B''C''$ bezeichnet haben. Diese Schnittlinie der Tangenten-Ebenen ist aber die reciproke Polare der Verbindungslinie der Tangirungspunkte AA'. Auf gleiche Weise werden die Linien $C''A''$ und $A''B''$ als die reciproken Polaren von BB' und CC' erkannt. Da aber die Linien AA', BB', CC' sich in einem Punkte p'' schneiden, so müssen ihre reciproken Polaren in der Polar-Ebene des Punktes p'' liegen. Es ist mithin die Ebene P'' die Polar-Ebene von p''. Diese Bemerkungen lassen sich, wie folgt, zusammenfassen.

Lehrsatz 1.

Wenn man auf einem Hyperboloïd ein geradliniges Sechseck beschreibt, so schneiden sich die drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks paarweise verbinden, in einem und demselben Punkte, und die Ebenen der gegenüberliegenden Winkel des Sechsecks schneiden sich in drei Linien, welche in der Polar-Ebene des gemeinsamen Schnittpunktes der Diagonalen liegen.

Die blosse Anschauung der beschriebenen Figur lehrt, dass dieselbe in allen ihren Theilen vervollständigt werden kann: 1. wenn die drei Linien a, b, c und der Punkt p'' gegeben sind, oder 2. wenn die drei Linien a, b, c und die Ebene P'' gegeben sind. Die Vervollständigung der Figur im ersten Falle kommt mit der Lösung folgender Aufgabe überein.

Aufgabe 1.

Wenn drei Generatricen a, b, c eines Hyperboloïds und ein beliebiger Punkt p'' gegeben sind, die Polar-Ebene dieses Punktes zu construiren.

Lässt man, um die Polar-Ebene P'' des gegebenen Punktes p'' zu bestimmen, eine Ebene durch p'' und a gehen und verbindet die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Linien b und c durch eine Gerade a', legt hierauf eine zweite Ebene durch p'' und b und verbindet die Schnittpunkte

dieser Ebene mit a und c durch eine Gerade b', legt endlich eine Ebene durch p'' und c und verbindet die Schnittpunkte dieser Ebene mit a und b durch eine Gerade c', so schneiden sich die Linienpaare $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ in drei Punkten A'', B'', C'', durch welche die gesuchte Polar-Ebene hindurchgeht.

Im zweiten Falle hat man die folgende Aufgabe.

Aufgabe 2.

Wenn drei Generatricen a, b, c eines Hyperboloïds und eine Ebene P'' gegeben sind, den Pol dieser Ebene zu construiren.

Die drei Linien a, b, c schneiden die gegebene Ebene P'' in drei Punkten, welche wir durch A'', B'', C'' bezeichnen. Durch diese Punkte ziehe man die drei Linien a', b', c', von welchen die erste b und c, die zweite c und a, die dritte a und b schneidet. Legt man alsdann drei Ebenen durch $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Pole p'' der Ebene P''.[1])

Die sechs Linien a, b, c, a', b', c' bilden 6 Sechsecke π, π', π'', $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, welche wir, indem wir die gegenüberliegenden Ecken eines jeden Sechsecks zusammenstellen, durch folgendes Schema ausdrücken wollen:

$$\begin{array}{llll} \pi'' \ldots A A',\ B B',\ C C', & & \varkappa'' \ldots A B,\ A' B',\ A'' B'', \\ \pi\ \ \ldots A' A'',\ B' B'',\ C' C'', & & \varkappa\ \ \ldots B C,\ B' C',\ B'' C'', \\ \pi'\ \ldots A'' A,\ B'' B,\ C'' C, & & \varkappa'\ \ldots C A,\ C' A',\ C'' A''. \end{array}$$

Das Sechseck π'' ist dasjenige, welches wir betrachtet haben. Von den übrigen Sechsecken gilt ebenfalls der Lehrsatz 1. Bezeichnen wir demnach die Schnittpunkte der drei Diagonalen der Sechsecke der Reihe nach durch p'', p, p'; q'', q, q', so liegen die drei ersten in einer geraden Linie und die drei letzten in einer zweiten geraden Linie. Denn es liegen die Punkte p'', p, p', respective auf den Geraden $A A'$, $A' A''$, $A'' A$. Da diese aber ein Dreieck bilden, so wird die Ebene des Dreiecks durch die drei Punkte p'', p, p' gehen. Eben so lässt sich nachweisen, dass die Ebene des Dreiecks $B'' B B'$, sowie, dass die Ebene des Dreiecks $C'' C C'$

1) Nimmt man die Ebene P'' in der Unendlichkeit liegend an, so wird der Pol p'' zum Mittelpunkt des Hyperboloïds, dessen Construction Herr Prof. Steiner im 2. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik gegeben hat.

durch die genannten Punkte geht. Wenn aber mehrere Punkte zugleich in drei Ebenen liegen, so müssen sich die Ebenen in einer und derselben Linie schneiden und die Punkte in dieser Schnittlinie liegen.

Auf gleiche Weise liegen die Punkte q'', q, q' in den drei Ebenen ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, welche sich desshalb in einer und derselben geraden Linie schneiden müssen.

Den Punkt p'' haben wir aber als den Pol der Ebene $A''B''C''$ erkannt. Eben so werden p und p' die Pole der Ebenen ABC und $A'B'C'$ sein. Die gemeinsame Schnittlinie $q''qq'$ dieser Ebenen ist mithin die reciproke Polare der geraden Linie $p''pp'$. Dadurch ist folgender Lehrsatz bewiesen.

Lehrsatz 2.

Die Seiten des auf dem Hyperboloïd beschriebenen Sechsecks bilden noch 5 andere Sechsecke. Jedem der 6 Sechsecke entspricht ein Punkt, in welchem sich die Diagonalen schneiden, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks verbinden. Diese 6 Punkte liegen auf 2 geraden Linien, von denen die eine die reciproke Polare der andern ist.

Wenn man die drei Generatricen a, b, c sich einer Ebene unendlich nähern lässt, bis sie in dieselbe ihrer ganzen Länge nach hineinfallen, so fallen auch die drei andern Generatricen a', b', c' und das ganze Hyperboloïd, im Grenzfalle, mit der Ebene zusammen. Die sechs genannten Generatricen werden aber Tangenten eines Kegelschnittes, weil die Diagonalen der durch sie gebildeten 6 Sechsecke π'', π, π', $\varkappa''$, $\varkappa$, $\varkappa'$ sich respective in den Punkten p'', p, p', q'', q, q', schneiden. Die beiden geraden Linien $(p''pp')$ und $(q''qq')$ werden endlich harmonische Polaren des Kegelschnittes, d. h. solche Linien, welche mit den durch ihren gemeinsamen Schnittpunkt gelegten Tangenten des Kegelschnittes vier harmonische Linien bilden. Demnach können wir zu den Sätzen von Brianchon und Steiner: „Irgend 6 Tangenten eines Kegelschnittes bestimmen 60 umschriebene Sechsecke; in jedem derselben schneiden sich die drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, in einem Punkte $\mathfrak{P}$; die 60 Punkte $\mathfrak{P}$, welche den 60 Sechsecken entsprechen, liegen, zu dreien, auf 20 geraden Linien vertheilt“, noch hin-

zufügen, „dass die 20 geraden Linien 10 Paare harmonischer Polaren des Kegelschnitts bilden.“

Der Lehrsatz 2. kann mit andern Worten wie folgt ausgesprochen werden. „Wenn man auf einem Hyperboloïd ein Sechseck beschreibt, so schneiden sich die Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, in einem Punkte, die Ebenen der ungeraden Winkel des Sechsecks in einem zweiten, und die Ebenen der geraden Winkel in einem dritten Punkte. Diese drei Punkte liegen in einer geraden Linie. Ferner schneiden sich die Ebenen zweier gegenüberliegenden Winkel des Sechsecks und die Ebene, welche durch die Seiten der übrigen Winkel geht, in einem Punkte, welcher auf der reciproken Polare der genannten geraden Linie liegt.“

Königsberg, am 8. Juni 1842.

5.

De integratione aequationis differentialis partialis

$$A_1 - A_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - A_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \cdots - A_{n-1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} + A_n \left\{ x_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} - x_1 \right\} = 0,$$

designantibus A_1, A_2, ... A_n functiones quaslibet variabilium x_1, x_2, ... x_{n-1} lineares.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 25, Seite 171—177.]

1.

Commentatione duce, de integratione aequationis differentialis

$$(A_1' x_1 + A_1'' x_2 + A_1''') - (A_2' x_1 + A_2'' x_2 + A_2''') \frac{d x_1}{d x_2} + (A_3' x_1 + A_3'' x_2 + A_3''') \left(x_2 \frac{d x_1}{d x_2} - x_1 \right) = 0,$$

inscripta, et hoc in diario Tom. 24. ab ill. Jacobi edita, contigit mihi, ut aequationis differentialis partialis

$$1. \quad A_1 - A_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - A_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \cdots - A_{n-1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} + A_n \left\{ x_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} - x_1 \right\} = 0$$

designantibus A_1, $A_2 \ldots . A_p \ldots . A_n$ functiones variabilium x_1, x_2, $\ldots . x_{n-1}$ lineares hujusmodi:

$$A_p = A_p' x_1 + A_p'' x_2 + \cdots + A_p^{(n-1)} x_{n-1} + A_p^{(n)}$$

integrandae duas methodos invenirem, alteram cum ea, qua usus est ill. Jacobi, fere congruam, alteram aliquanto diversam nec a regulis aequationum differentialium partialium tractandarum traditis alienam. Utrasque methodos sequentibus breviter exponere mihi proposui.

2.

Aequationem differentialem (1) propositam, cum inter variabiles $x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}$, quas continet symmetria careat, in formam elegantiorem redigere convenit. Hac de causa statuamus $u = f(x_1\, x_2 \ldots . x_{n-1}) = 0$ esse integrale aliquod aequationis differentialis (1) propositae. Qua aequatione integrali variabilis x_1 ut functio reliquarum variabilium $x_2 \ldots . x_{n-1}$ independentium data est, secundum quas differentiando prodeunt aequationes

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_3} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} = 0,$$

quarum ope aequatio (1) proposita abit in hanc symmetricam:

$$2. \quad A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + A_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} - A_n \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} \right) = 0.$$

Integrata igitur erit aequatio differentialis (1) simulac solutionem $u = f(x_1\, x_2 \ldots . x_{n-1})$ maxime generalem aequationi (2) satisfacientem invenerimus. Solutionem enim u inventam aequando zero integrale aequationis differentialis (1) obtinemus.

3.

Ad aequationem (2) homogeneam reddendam ponamus:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_n}, \qquad x_2 = \frac{y_2}{y_n}, \quad \ldots . \; x_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n},$$

quo facto, cum sit $u = f(x_1, x_2, \dots x_{n-1}) = f\left(\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \dots \frac{y_{n-1}}{y_n}\right)$, habemus aequationes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= y_n \frac{\partial u}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= y_n \frac{\partial u}{\partial y_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} &= y_n \frac{\partial u}{\partial y_{n-1}}, \\ -\left\{x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right\} &= y_n \frac{\partial u}{\partial y_n}, \end{aligned}$$

quibus adjuvantibus aequatio (2) mutatur in

$$3. \qquad B_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + \dots + B_n \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0,$$

designantibus $B_1 \dots B_p \dots B_n$ functiones has lineares et homogeneas:

$$B_p = A'_p y_1 + A''_p y_2 + \dots + A_p^{(n-1)} y_{n-1} + A_p^{(n)} y_n.$$

Quaestio igitur proposita eo redit, ut functiones u variabilium y_1, $y_2, \dots y_n$ generales reperiantur, quae aequationi (3) satisfaciant, e quibus hujus formae $f\left(\frac{y_1}{y_n} \dots \frac{y_{n-1}}{y_n}\right)$ functio eligatur, in qua substitutionibus

$$4. \qquad y_1 = x_1 y_n, \; y_2 = x_2 y_n, \dots y_{n-1} = x_{n-1} y_n$$

factis evanescat variabilis y_n ac restet variabilium $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ functio. Quam enim functionem si aequamus zero aequationis propositae integrale habemus.

4.

Sed licet transformare aequationem (3) in simpliciorem hanc:

$$5. \qquad \lambda_1 Y_1 \frac{\partial u}{\partial Y_1} + \lambda_2 Y_2 \frac{\partial u}{\partial Y_2} + \dots + \lambda_n Y_n \frac{\partial u}{\partial Y_n} = 0,$$

vel hanc in illam, adhibitis substitutionibus hujusmodi:

$$6. \qquad \left\{\begin{aligned} Y_1 &= a'_1 \; y_1 + a'_2 \; y_2 + \dots + a'_n \; y_n \\ Y_2 &= a''_1 \; y_1 + a''_2 \; y_2 + \dots + a''_n \; y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_n &= a_1^{(n)} y_1 + a_2^{(n)} y_2 + \dots + a_n^{(n)} y_n, \end{aligned}\right.$$

unde aequationes nascuntur:

$$
7.\quad \begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial y_1} = a_1' \frac{\partial u}{\partial Y_1} + a_1'' \frac{\partial u}{\partial Y_2} + \cdots\cdots + a_1^{(n)} \frac{\partial u}{\partial Y_n}, \\
\frac{\partial u}{\partial y_2} = a_2' \frac{\partial u}{\partial Y_1} + a_2'' \frac{\partial u}{\partial Y_2} + \cdots\cdots + a_2^{(n)} \frac{\partial u}{\partial Y_n}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial u}{\partial y_n} = a_n' \frac{\partial u}{\partial Y_1} + a_n'' \frac{\partial u}{\partial Y_2} + \cdots\cdots + a_n^{(n)} \frac{\partial u}{\partial Y_n}.
\end{cases}
$$

Substituendo enim valores $\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, \ldots. \frac{\partial u}{\partial y_n}$ in aequatione (3) et valores $Y_1, Y_2, \ldots. Y_n$ in aequatione (5) et comparando coëfficientes ipsius $\frac{\partial u}{\partial Y_p}$ in utraque aequatione, nanciscimur:

$$B_1 a_1^{(p)} + B_2 a_2^{(p)} + \cdots\cdots + B_n a_n^{(p)} = \lambda_p \{a_1^{(p)} y_1 + a_2^{(p)} y_2 + \cdots\cdots + a_n^{(p)} y_n\},$$

e qua aequationum systema eruitur hoc:

$$
8.\quad \begin{cases}
(A_1' - \lambda_p)\, a_1^{(p)} + A_2' a_2^{(p)} + \cdots\cdots + A_n' a_n^{(p)} = 0, \\
A_1'' a_1^{(p)} + (A_2'' - \lambda_p)\, a_2^{(p)} + \cdots\cdots + A_n'' a_n^{(p)} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_1^{(n)} a_1^{(p)} + A_2^{(n)} a_2^{(p)} + \cdots\cdots + (A_n^{(n)} - \lambda_p)\, a_n^{(p)} = 0,
\end{cases}
$$

et eliminando quantitates $a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \ldots. a_n^{(p)}$ aequatio algebraica quaedam

$$9.\quad U = 0$$

n ti gradus componitur, quae radices $\lambda_1, \lambda_2, \ldots. \lambda_n$ diversas suppeditat. Quibus determinatis ex aequationibus (8) numeros $1, 2, \ldots. n$ loco p ponendo n systemata aequationum sequuntur, e quarum solutione rationes tantum ipsarum $a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \ldots. a_n^{(p)}$ reperiuntur. Unde elucet n quantitates, exempli gratia $a_1', a_1'', \ldots. a_1^{(n)}$, ex arbitrio sumi posse, quo facto reliqui substitutionum (6) coëfficientes plane determinantur.

5.

Hac ratione et aequatione (5) et substitutionibus (6), quibus illa transformetur in (3), determinatis, observo, si per $\Pi(c_1, c_2, \ldots. c_{n-1})$ functionem quantitatum $c_1, c_2, \ldots. c_{n-1}$ arbitrariam designamus posito

10. $$c_1 = \frac{Y_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{Y_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}, \quad c_2 = \frac{Y_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{Y_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}, \quad \ldots . \quad c_{n-1} = \frac{Y_{n-1}^{\frac{1}{\lambda_{n-1}}}}{Y_n^{\frac{1}{\lambda_n}}},$$

solutiones aequationis (5) omnes formula contineri hac:

$$u = \Pi(c_1\, c_2 \ldots . c_{n-1})$$

e qua substituendo valores pro $Y_1, Y_2, \ldots . Y_n$ e (6) integrale fluit aequationis (3). Sed, ut adhibitis ad Π substitutionibus (6) et (4) $\Pi = u$ fiat integrale aequationis (2), necesse est, ut eligatur e diversis functionibus Π maxime generalis formae $\varphi\left\{\frac{Y_1}{Y_n}, \frac{Y_2}{Y_n}, \ldots . \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right\}$. Talis functio est:

$$F\{d_1\, d_2 \ldots . d_{n-2}\}$$

designante F functionem quamlibet quantitatum $d_1, d_2, \ldots . d_{n-2}$, quibus tribuendi sunt valores:

11. $$d_q = \frac{c_q^{\lambda_q \lambda_{n-1}} . c_{n-1}^{\lambda_n \lambda_{n-1}}}{c_q^{\lambda_q \lambda_n} . c_{n-1}^{\lambda_q \lambda_{n-1}}} = \left\{\frac{Y_q}{Y_n}\right\}^{\lambda_{n-1} - \lambda_n} . \left\{\frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right\}^{\lambda_n - \lambda_q}.$$

Unde denique concludendum est:

„Aequationem:

$$F(d_1\, d_2 \ldots . d_{n-2}) = 0$$

„substitutionibus (11. 6. 4.) deinceps factis in integrale aequationis „differentialis (1) propositae completum transire nihil variabilium „continens nisi $x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}$.

Inter functiones $u = \Pi(c_1\, c_2 \ldots . c_{n-1})$, quae substitutionibus (10) factis formam $\varphi\left\{\frac{Y_1}{Y_n}, \frac{Y_2}{Y_n}, \ldots . \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right\}$ induunt, notatu dignae sunt hae particulares:

$$u_p = c_1^{\frac{\lambda_1^p}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots.(\lambda_1-\lambda_n)}} . c_2^{\frac{\lambda_2^p}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\ldots.(\lambda_2-\lambda_n)}} \ldots . c_{n-1}^{\frac{\lambda_{n-1}^p}{(\lambda_{n-1}-\lambda_1)(\lambda_{n-1}-\lambda_2)\ldots.(\lambda_{n-1}-\lambda_n)}},$$

designante p numeros $1, 2, \ldots . (n-2)$.

Transeunt enim commemoratis substitutionibus in has symmetricas:

12. $$u_p = Y_1^{\frac{\lambda_1^{p-1}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots\ldots(\lambda_1-\lambda_n)}} \cdot Y_2^{\frac{\lambda_2^{p-1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\ldots\ldots(\lambda_2-\lambda_n)}} \ldots\ldots Y_n^{\frac{\lambda_n^{p-1}}{(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}},$$

e quibus hanc solutionem $u = F(u_1\, u_2 \ldots\ldots u_{n-2})$ ejusdem proprietatis generalem conflare licet.

„Si igitur symmetricum aequationis (1) propositae integrale „generale desideratur, tale ex aequatione $F(u_1\, u_2 \ldots\ldots u_{n-2}) = 0$ „substitutionibus (12. 6. 4.) deinceps factis nasci videmus."

6.

Addo alteram methodum aequationis (3) integrandae:

I. $$B_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + \cdots\cdots + B_n \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0,$$

cujus integrale nota ratione ab integratione aequationum vulgarium pendet:

II. $$d y_1 : d y_2 : \ldots\ldots : d y_n = B_1 : B_2 : \ldots\ldots : B_n.$$

Determinare licet dt ita ut habeamus:

III. $$\begin{cases} y_1' = B_1 \\ y_2' = B_2 \\ \cdots\cdots \\ y_n' = B_n, \end{cases}$$

ubi brevitatis causa signa y_1', $y_2' \ldots\ldots$ pro $\frac{d y_1}{d t}$, $\frac{d y_2}{d t} \ldots\ldots$ scripta sunt.

Talibus aequationibus differentialibus satisfieri potest valorum particularium systemate hoc:

$$y_1 = b_1\, e^{\lambda t}, \quad y_2 = b_2\, e^{\lambda t}, \quad \ldots\ldots \quad y_n = b_n\, e^{\lambda t},$$

quos enim si substituimus in aequationibus antecedentibus aequationes nanciscimur conditionales:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} (A_1' - \lambda)\, b_1 + A_1''\, b_2 + \cdots\cdot + A_1^{(n)}\, b_n = 0, \\ A_2'\, b_1 + (A_2'' - \lambda)\, b_2 + \cdots\cdot + A_2^{(n)}\, b_n = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_n'\, b_1 + A_n''\, b_2 + \cdots\cdot + (A_n^{(n)} - \lambda)\, b_n = 0, \end{cases}$$

quibus satisfieri potest. Quantitates $b_1,\ b_2,\ \ldots.\ b_n$ eliminando eadem aequatio obtinetur, quam antea designavimus per $U = 0$, cujus radices sunt $\lambda_1\ \ldots.\ \lambda_n$. Jam patet hujus aequationis cuique radici λ_p systema quoddam coëfficientium $b_1^{(p)}, b_2^{(p)} \ldots.\ b_n^{(p)}$ respondere, e quibus unum ex. gr. $b_1^{(p)}$ ex arbitrio sumere licet, quo reliqui determinantur. Habemus igitur tot systemata valorum particularium ipsarum $y_1,\ y_2,\ \ldots.\ y_n$ quot radices aequationis $U = 0$ diversas.

Ex his valoribus aequationes integrales completas hoc modo componere licet:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} y_1 = \gamma_1\, b_1'\, e^{\lambda_1 t} + \gamma_2\, b_1''\, e^{\lambda_2 t} + \cdots\cdot + \gamma_n\, b_1^{(n)}\, e^{\lambda_n t}, \\ y_2 = \gamma_1\, b_2'\, e^{\lambda_1 t} + \gamma_2\, b_2''\, e^{\lambda_2 t} + \cdots\cdot + \gamma_n\, b_2^{(n)}\, e^{\lambda_n t}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n = \gamma_1\, b_n'\, e^{\lambda_1 t} + \gamma_2\, b_n''\, e^{\lambda_2 t} + \cdots\cdot + \gamma_n\, b_n^{(n)}\, e^{\lambda_n t}, \end{cases}$$

n constantes $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots.\ \gamma_n$ arbitrarias continentes. Sed has aequationes secundum constantes arbitrarias solvere convenit, quo facto nanciscimur aequationes hujusmodi:

$$\text{VI.}\quad \begin{cases} y_1\, \alpha_1' + y_2\, \alpha_2' + \cdots\cdot + y_n\, \alpha_n' = \gamma_1\, e^{\lambda_1 t}, \\ y_1\, \alpha_1'' + y_2\, \alpha_2'' + \cdots\cdot + y_n\, \alpha_n'' = \gamma_2\, e^{\lambda_2 t}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_1\, \alpha_1^{(n)} + y_2\, \alpha_2^{(n)} + \cdots\cdot + y_n\, \alpha_n^{(n)} = \gamma_n\, e^{\lambda_n t}, \end{cases}$$

quae aeque ac antecedentes aequationes sunt integrales aequationum (III). Ad coëfficientes $\alpha_q^{(p)}$ determinandos, aequationes (III) per $\alpha_1^{(p)},\ \alpha_2^{(p)},\ \ldots.\ \alpha_n^{(p)}$ multiplicemus, unde facta additione obtinemus:

$$\alpha_1^{(p)}\, y_1' + \alpha_2^{(p)}\, y_2' + \cdots\cdot + \alpha_n^{(p)}\, y_n' = \alpha_1^{(p)}\, B_1 + \alpha_2^{(p)}\, B_2 + \cdots\cdot + \alpha_n^{(p)}\, B_n,$$

vel aequationum antecedentium ope:

$$\gamma_p \lambda_p e^{\lambda_p t} = \alpha_1^{(p)} B_1 + \alpha_2^{(p)} B_2 + \cdots + \alpha_n^{(p)} B_n,$$

vel

$$\lambda_p \{y_1 \alpha_1^{(p)} + y_2 \alpha_2^{(p)} + \cdots + y_n \alpha_n^{(p)}\} = \alpha_1^{(p)} B_1 + \alpha_2^{(p)} B_2 + \cdots + \alpha_n^{(p)} B_n,$$

unde coëfficientes aequalium variabilium comparando hoc fluit aequationum systema:

$$\begin{array}{l}
(A_1' - \lambda_p)\alpha_1^{(p)} + A_2' \alpha_2^{(p)} + \cdots + A_n' \alpha_n^{(p)} = 0, \\
A_1'' \alpha_1^{(p)} + (A_2'' - \lambda_p)\alpha_2^{(p)} + \cdots + A_n'' \alpha_n^{(p)} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_1^{(n)} \alpha_1^{(p)} + A_2^{(n)} \alpha_2^{(p)} + \cdots + (A_n^{(n)} - \lambda_p)\alpha_n^{(p)} = 0,
\end{array}$$

quod easdem praebet rationes ipsarum $\alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)}, \ldots . \alpha_n^{(p)}$ ac aequationes (8) ipsarum $a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \ldots . a_n^{(p)}$. Quam ob rem pro $\alpha_q^{(p)}$ etiam $a_q^{(p)}$ scribere licet. Denique eliminata e^t ex aequationibus (VI) vulgarium aequationum (II) differentialium integrales aequationes obtinentur hae:

$$\frac{(y_1 a_1' + y_2 a_2' + \cdots\cdots + y_n a_n')^{\frac{1}{\lambda_1}}}{(y_1 a_1^{(n)} + y_2 a_2^{(n)} + \cdots + y_n a_n^{(n)})^{\frac{1}{\lambda_n}}} = \frac{\gamma_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{\gamma_n^{\frac{1}{\lambda_n}}} = c_1,$$

$$\frac{(y_1 a_1'' + y_2 a_2'' + \cdots\cdots + y_n a_n'')^{\frac{1}{\lambda_2}}}{(y_1 a_1^{(n)} + y_2 a_2^{(n)} + \cdots + y_n a_n^{(n)})^{\frac{1}{\lambda_n}}} = \frac{\gamma_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{\gamma_n^{\frac{1}{\lambda_n}}} = c_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(y_1 a_1^{(n-1)} + y_2 a_2^{(n-1)} + \cdots + y_n a_n^{(n-1)})^{\frac{1}{\lambda_{n-1}}}}{(y_1 a_1^{(n)} + y_2 a_2^{(n)} + \cdots + y_n a_n^{(n)})^{\frac{1}{\lambda_n}}} = \frac{\gamma_{n-1}^{\frac{1}{\lambda_{n-1}}}}{\gamma_n^{\frac{1}{\lambda_n}}} = c_{n-1},$$

unde secundum regulam notam integrale aequationis (I) propositae componitur hoc:

$$\Pi(c_1 c_2 \ldots . c_{n-1}) = 0$$

quod jam antea reperimus.

N o t a. Si proponuntur integrandae aequationes

$$\frac{d x_1}{d t} - A_1 + x_1 A_n = 0,$$

$$\frac{d x_2}{d t} - A_2 + x_2 A_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d x_{n-1}}{d t} - A_{n-1} + x_{n-1} A_n = 0,$$

earum integralia completa inveniuntur haec:

$$x_1 = \frac{\gamma_1 b'_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b''_1 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \gamma_n b_1^{(n)} e^{\lambda_n t}}{\gamma^1 b'_n e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b''_n e^{\lambda_2 t} + \cdots + \gamma_n b_n^{(n)} e^{\lambda_n t}},$$

$$x_2 = \frac{\gamma_1 b'_2 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b''_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \gamma_n b_2^{(n)} e^{\lambda_n t}}{\gamma_1 b'_n e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b''_n e^{\lambda_2 t} + \cdots + \gamma_n b_n^{(n)} e^{\lambda_n t}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = \frac{\gamma_1 b'_{n-1} e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b''_{n-1} e^{\lambda_2 t} + \cdots + \gamma_n b_{n-1}^{(n)} e^{\lambda_n t}}{\gamma_1 b'_n e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b''_n e^{\lambda_2 t} + \cdots + \gamma_n b_n^{(n)} e^{\lambda_n t}}.$$

R e g i o m o n t i, d. 18. Octob. 1842.

6.

Ueber die lineäre Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpunkte derselben gegeben sind.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 26, Seite 147—154.]

Die Abhandlung „De curvis et superficiebus sec. ord.“ Bd. 20 p. 285 dieses Journals [1]), enthält unter andern auch die Lösung der Aufgabe:

„Wenn sieben Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ord-„nung gegeben sind, den achten Schnittpunkt auf lineäre [2]) Weise „zu construiren“.

Dass ich diese Aufgabe zum Gegenstande eines neuen Aufsatzes mache, geschieht in der Absicht, die Auflösung als das Resultat rein geometrischer Betrachtungen darzustellen, welche mir bei der ersten Behandlung der Aufgabe in der angeführten Abhandlung wegen der Neuheit des Gegenstandes entgangen sind.

[1) Nr. 2 (pag. 49) dieser Ausgabe.]

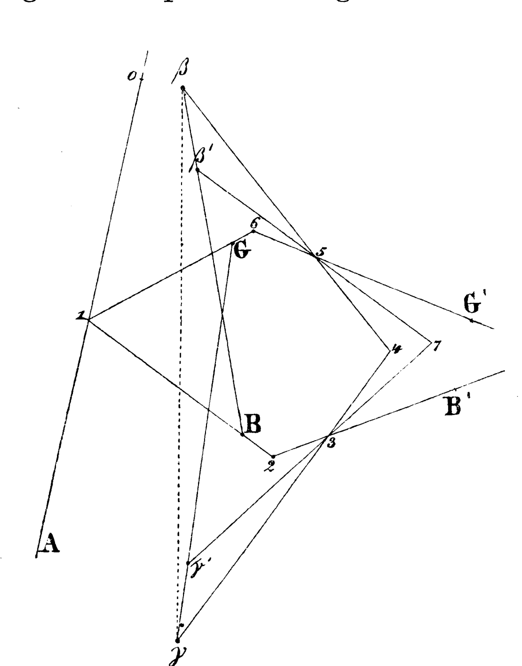
2) Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, dass ich unter einer lineären Construction eine solche verstehe, welche, von gegebenen Punkten ausgehend, sich in der Ebene nur der geraden Linie, im Raume nur der Ebene bedient. Wenn also z. B. ein Punkt als der vierte Schnittpunkt zweier Kegelschnitte bestimmt wird, von denen jeder durch fünf bekannte Punkte auf ihm gegeben ist, so wird diese Bestimmung nicht lineär zu nennen sein, wenn auch die drei andern Schnittpunkte gegeben sind. Lineäre Constructionen können im Allgemeinen nur da verlangt werden, wo durch gewisse gegebene Punkte nur ein einziger gesuchter Punkt von einer bekannten Relation zu den gegebenen bestimmt ist. In diesem Sinne kann man einen beliebigen Punkt der Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung, von welcher irgend acht gegeben sind, nicht lineär, wohl aber mit Hilfe eines Kreises construiren. Dagegen lässt sich der Punkt lineär bestimmen, in welchem alle Curven dritter Ordnung zusammen kommen, welche sämmtlich durch acht gegebene Punkte hindurchgehen.

Wir beginnen mit der Untersuchung der

Aufgabe 1.

„Es sind im Raume fünf beliebige Punkte und eine beliebige „gerade Linie gegeben: man soll die Spitze eines Kegels zweiter „Ordnung construiren, der durch die gegebenen Punkte hin- „durchgeht und die gerade Linie als Kante auf seiner Mantel- „fläche enthält.“

Die gegebenen Punkte seien 2, 3, 4, 5, 6 (vergl. beistehende Figur), und A die gegebene gerade Linie. Bezeichnen wir alsdann mit 0 die gesuchte Spitze des Kegels, welche auf der geraden Linie A liegen muss, weil jede Kante des Kegels durch seine Spitze hindurchgeht, so schneiden sich nach dem Satze von Pascal die drei Ebenenpaare 023, 056; A 2, 045; A 6, 034 in drei geraden Linien a, b, c, welche in einer und derselben Ebene P liegen (die genannten Ebenenpaare sind nämlich die gegenüberliegenden Seitenflächen einer sechsseitigen Pyramide, deren Kanten zugleich Kanten des Kegels sind). Umgekehrt: wenn ein Punkt 0 auf der geraden Linie A gefunden wird, von der Eigenschaft, dass die drei auf die angegebene Art construirten Linien a, b, c in einer und derselben Ebene liegen, so muss dieser Punkt 0 die gesuchte Spitze des Kegels sein.



Wenn nun gleich durch die sechs Punkte und die gerade Linie A die Linien b und c nicht bekannt sind, so ist doch auf jeder dieser Linien ein Punkt gegeben: auf der Linie b der Schnittpunkt β der Ebene A 2 und der Linie 45, und auf der Linie c der Schnittpunkt γ der Ebene A 6 und der Linie 34. Die Linie $\beta\gamma$ liegt aber in der Ebene P, weil die Linien b und c in ihr liegen. Von der Linie a weiss man endlich,

dass sie die Linien A, 2 3, 5 6 schneidet, und, da sie ebenfalls in der Ebene P liegt, dass sie auch die Linie $\beta\gamma$ schneiden muss. Unsere Aufgabe führt also darauf hinaus:

„Eine gerade Linie a zu construiren, welche vier gegebene „gerade Linien A, 2 3, 5 6 und $\beta\gamma$ schneidet."

Denn wenn man diese Linie gefunden hat, so wird der Schnittpunkt derselben mit der ersten Linie A die gesuchte Spitze des Kegels sein. Man bemerkt auch leicht den Zusammenhang der vorhergehenden Aufgabe mit der folgenden:

„Den Schnittpunkt der geraden Linie A und eines Hyper- „boloïds, welches durch die Generatricen derselben Gattung 2 3, „5 6, $\beta\gamma$ gegeben ist, zu construiren."

Denn durch diesen Schnittpunkt kann man eine Generatrice zweiter Gattung des genannten Hyperboloïds (2 3, 5 6, $\beta\gamma$) ziehen, welche alle Generatricen erster Gattung, mithin auch die Linien 2 3, 5 6, $\beta\gamma$ schneidet.

Es genügt die vorgelegte Aufgabe auf die letztere zurückzuführen, von welcher der Herr Prof. Steiner im zweiten Bande dieses Journals pag. 268 eine sehr elegante Auflösung gegeben hat. Wir bemerken nur, dass die Linie A das Hyperboloïd in zwei Punkten o und O schneidet. Man kann daher zwei Kegel, die wir, wie ihre Spitzen, mit o und O bezeichnen wollen, construiren, welche auf ihrer Mantelfläche die Kante A und die gegebenen fünf Punkte enthalten. Hat man nun die Spitzen der beiden Kegel construirt, so sind unmittelbar noch fünf andere Kanten jedes dieser Kegel bestimmt. Der Satz von Pascal lehrt endlich, alle anderen Kanten aus fünf gegebenen zu finden. Demnach können wir auf dem angedeuteten Wege die Construction der Kegel selbst vollenden.

Die beiden Kegel o und O schneiden sich in der ihnen gemeinsamen Kante A, welche ihre Spitzen verbindet, und ausserdem in einer Curve doppelter Krümmung 2 3 4 5 6 . . . . Da durch die Data unserer Aufgabe die beiden Kegel o und O bestimmt sind, so wird auch ihre gemeinsame Schnittcurve dadurch gegeben sein, und wir können es unternehmen, einen beliebigen Punkt dieser Curve mit Hilfe der gegebenen Bestimmungsstücke zu construiren. Zu diesem Ende bemerken wir, dass das Hyperboloïd (2 3, 5 6, $\beta\gamma$) von der besondern Lage des Punktes 4

auf der Schnittcurve 2 3 4 5 6 .... der beiden Kegel unabhängig ist. Denn wenn man durch o und O die beiden Linien zieht, welche die Linien 2 3 und 5 6 schneiden, so werden diese und die Linie 3 5 für das Hyperboloïd zu drei Generatricen zweiter Gattung, durch welche das Hyperboloïd ebenfalls bestimmt ist. Zieht man demnach durch einen beliebigen Punkt 7 der Schnittcurve 2 3 4 5 6 .... die Geraden 7 5 und 7 3, welche die Ebenen A 2 und A 6 in den Punkten $\beta' \gamma'$ schneiden, so wird die Gerade $\beta' \gamma'$ zu einer Generatrice erster Gattung. Umgekehrt: wenn man durch die Schnittpunkte β' und γ' einer beliebigen Generatrice erster Gattung, mit den Ebenen A 2 und A 6 die Linien β' 5 und γ' 3 zieht, so schneiden sich dieselben in einem beliebigen Punkte 7 der Curve, welcher in dem Falle, dass man statt $\beta' \gamma'$ die Generatrice $\beta \gamma$ wählt, mit dem Punkte 4 zusammenfällt. Auf diese Weise entspricht jeder Generatrice erster Gattung ein Punkt der Curve. Den Punkten 2 und 6 entsprechen die Generatricen 2 3 und 5 6. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Linie 3 5 und der Ebene A 2 mit β'', so entspricht die durch diesen Punkt gezogene Generatrice erster Gattung dem Punkte 3, und auf gleiche Weise entspricht die Generatrice von derselben Gattung, welche durch den Schnittpunkt γ'' von 3 5 und A 6 geht, dem Punkte 5.

Den durch o und O gezogenen Generatricen erster Gattung entsprechen ferner die Punkte o und O. Es schneidet also die Curve 2 3 4 5 6 .... die Gerade A zwei Mal, und zwar in den Spitzen der Kegel, welche die vorgelegte Aufgabe verlangt. Wir haben also folgenden Satz:

Lehrsatz 1.

> „Wenn zwei Kegel zweiter Ordnung sich in einer geraden „Linie schneiden, so schneiden sie sich überdies noch in einer „Curve doppelter Krümmung, welche von der geraden Linie in „zwei Punkten getroffen wird."

Woraus erhellt, dass unsere Aufgabe darin besteht, diese beiden Schnittpunkte zu construiren, wenn die gerade Linie und fünf Punkte der Curve gegeben sind. Zugleich entnehmen wir aus dem Vorhergehenden die Auflösung folgender Aufgabe:

Aufgabe 2.

„Zwei Kegel zweiter Ordnung schneiden sich in einer beliebig „gegebenen geraden Linie A und gehen überdies durch fünf be„liebig gegebene Punkte 2, 3, 4, 5, 6: es soll ein beliebiger „anderer, den beiden Kegeln gemeinsamer Punkt 7 auf lineäre „Weise construirt werden."

Dieser Punkt wird auf folgende Art gefunden. Man ziehe die Linien 45 und 43, welche die Ebenen $A2$ und $A6$ respective in den Punkten β und γ schneiden. Die drei Geraden 23, 56, $\beta\gamma$ betrachte man als die Generatricen gleicher Gattung eines Hyperboloïds und construire auf demselben eine beliebige andere Generatrice gleicher Gattung. Diese schneide die Ebenen $A2$ und $A6$ in den Punkten β' und γ'. Zieht man alsdann die Linien $\beta' 5$ und $\gamma' 3$, so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Punkte 7.

Die in den vorhergehenden Paragraphen beschriebene Figur haben wir construirt, indem wir die fünf Punkte 2, 3, 4, 5, 6 und die gerade Linie A als beliebig gegeben annahmen. Es lässt sich aber auch diese Figur vervollständigen, wenn wir die sechs Punkte 2, 3, 4, 5, 6, 7 auf der Schnittcurve der beiden Kegel als beliebig gegeben annehmen und ausserdem die Bestimmung machen, dass die nicht gegebene Gerade A, in welcher sich die beiden Kegel schneiden, durch einen beliebig gegebenen Punkt 1 hindurchgehen soll. Dadurch ist sowohl das Hyperboloïd (23, 56, $\beta\gamma$), als auch die Gerade A bestimmt; was wir jetzt darthun wollen. Zu diesem Zwecke ziehen wir die Linien $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$. Die erstere schneide die Gerade 12 in B, die andere die Gerade 16 in G. Diese beiden Punkte sind durch die gegebenen Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bestimmt. Der erstere nämlich als Schnittpunkt der Geraden 12 und der Ebene 457, der andere als Schnittpunkt der Geraden 16 und der Ebene 437. Es schneide ferner die Ebene 237 die Gerade 56 im Punkte G' und die Ebene 567 die Gerade 23 im Punkte B'. Alsdann sind die Geraden $\beta' B'$ und $\gamma' G'$ Generatricen von der zweiten Gattung und schneiden mithin jede Generatrice von der ersten Gattung, unter diesen auch die Gerade $\beta\gamma$. Nun haben wir aber zwei vom Punkte β' ausgehende Linien $\beta' B'$ und $\beta' \beta B$, welche die

Generatrice $\beta\gamma$ schneiden; woraus wir schliessen, dass die Punkte β', B', β, B in derselben Ebene liegen. Mithin wird die Generatrice $\beta\gamma$ von der Geraden BB' und auf gleiche Weise von der Geraden GG' geschnitten. Dieses sind aber Geraden, welche sich durch die gegebenen Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bestimmen lassen. Bemerken wir endlich, dass die Generatrice $\beta\gamma$ in der Ebene 345 liegt, so ist es ersichtlich, dass die genannte Ebene von den Geraden GG' und BB' in zwei Punkten dieser Generatrice getroffen wird. Durch diese Schnittpunkte ist aber die dritte Generatrice und mit ihr das ganze Hyperboloïd (23, 56, $\beta\gamma$) bekannt, zu dessen Bestimmung die beiden ersten Generatricen 23 und 56 gegeben sind.

Die Punkte $\beta\gamma$ auf der dritten Generatrice werden als die Schnittpunkte dieser Linie und der Geraden 45 und 43 gefunden. Die Gerade A bestimmt man endlich als die Schnittlinie der Ebenen 12β und 16γ.

Diese Betrachtung enthält die Lösung folgender Aufgabe:

Aufgabe 3.

„Zwei Kegel zweiter Ordnung schneiden sich in einer Ge- „raden A und überdies in einer Curve doppelter Krümmung: es „soll die Gerade A construirt werden, wenn ein Punkt 1 auf ihr, „und 6 Punkte 2, 3, 4, 5, 6, 7 der Schnittcurve der beiden Kegel „beliebig im Raume gegeben sind.“

Man bestimme die Punkte

$$B = (745,12), \qquad G = (734,61),$$
$$B' = (756,23), \qquad G' = (723,56).$$

B bedeute den Schnittpunkt der Ebene 745 und der Geraden 12 etc. Die Schnittpunkte der Geraden BB' und GG' mit der Ebene 345 verbinde man durch eine gerade Linie und bezeichne die Schnittpunkte dieser Linie mit den Linien 45 und 43 mit β und γ. Alsdann schneiden sich die Ebenen 16γ und 12β in der gesuchten Geraden A.

Wir wollen nun zeigen, wie mit der vorhergehenden Aufgabe zugleich die folgende gelöset ist.

Aufgabe 4.

„Es sind irgend sieben Punkte als die Schnittpunkte dreier „Oberflächen zweiter Ordnung gegeben: man soll auf lineäre Weise „den achten Schnittpunkt construiren."

Bezeichnen wir die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und ziehen eine Gerade A durch die Punkte 1 und 8, so können wir, wie in der Auflösung der Aufgabe 1 angedeutet ist, zwei Kegel zweiter Ordnung construiren, die sich in der Geraden A schneiden und durch die fünf Punkte 2, 3, 4, 5, 6 hindurchgehen. Diese Kegel gehen aber durch die sieben Punkte 1, 8, 2, 3, 4, 5, 6 hindurch: sie gehen also auch durch den Punkt 7, weil bekanntlich alle Oberflächen zweiter Ordnung, die durch sieben Punkte hindurchgehen, sich noch in einem durch diese bestimmten achten Punkt schneiden. Der Punct 7 liegt also in der Curve doppelter Krümmung, in welcher sich die beiden Kegel schneiden. Nehmen wir nun die sechs auf dieser Curve gelegenen Punkte 2, 3, 4, 5, 6, 7 und den Punkt 1 auf der Geraden A als gegeben an, so lehrt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe diese Gerade A finden, welche durch den gesuchten achten Punkt 8 hindurchgeht. Vertauschen wir endlich den Punkt 1 mit irgend einem anderen Punkte 2, 3, 4, 5, 6, 7, so finden wir auf gleiche Weise eine zweite Gerade A, welche die erste in dem gesuchten Punkte 8 schneidet.

Um der angedeuteten Lösung der vorliegenden Aufgabe eine übersichtlichere Form zu geben, wollen wir die angestellten Betrachtungen dazu benutzen, einen Lehrsatz über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung herzuleiten, aus welchem unmittelbar die Construction eines dieser Punkte, wenn die andern gegeben sind, sich ergiebt. Zu diesem Zwecke wiederholen wir, dass die Gerade $\beta\gamma$ von der Geraden BB' (so wie von GG') geschnitten wird. Wenn wir demnach die Endpunkte BB' der letzteren Geraden, wie vorhin, durch die übersichtlicheren Zeichen $B = (745,12)$ $B' = (756,23)$ etc. .... darstellen, so haben wir, da β der Schnittpunkt von $A2$ und 45, γ der Schnittpunkt von $A6$ und 34 ist, und die Punkte 1 und 8 in der Geraden A liegen, ganz analog: $\beta = (812,45)$, $\gamma = (861,34)$; woraus sich folgender Lehrsatz ergiebt:

Lehrsatz 2.

„Wenn die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ord-„nung mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bezeichnet werden, so liegen „die 4 Punkte

(812,45), (861,34), (745,12), (756,23)

„oder, was dasselbe ist, die Schnittlinie (745,812) und die beiden „Punkte (861,34) und (756,23) in einer und derselben Ebene."

Man erhält aus diesen andere Relationen, wenn man die Zeichen für die acht Schnittpunkte beliebig vertauscht. Wir bezeichnen ferner die Gerade $\beta\gamma$ mit (812,45) (861,34) und mit (IV), die Gerade BB' mit (745,12) (756,23) und mit II und auf analoge Weise die Geraden:

(734,61) (745,12)	mit	I	(834,61) (845,12)	mit	(I)
(745,12) (756,23)	„	II	(845,12) (856,23)	„	(II)
(756,23) (761,34)	„	III	(856,23) (861,34)	„	(III)
(761,34) (712,45)	„	IV	(861,34) (812,45)	„	(IV)
(712,45) (723,56)	„	V	(812,45) (823,56)	„	(V)
(723,56) (734,61)	„	VI	(823,56) (834,61)	„	(VI).

Diese Ausdrücke sind so gebildet, dass jeder folgende aus dem vorhergehenden entsteht, wenn man für 1, 2, 3, 4, 5, 6 respective 2, 3, 4, 5, 6, 1 setzt. Die ersten auf diese Weise bezeichneten sechs Linien bilden nun ein nicht ebenes Sechseck A, dessen gegenüberliegende Seiten sich schneiden. Man kann daher durch je zwei gegenüberliegende Seiten dieses Sechsecks eine Ebene legen. Diese drei Ebenen schneiden sich in dem Punkte 7. Ebenso bilden die zweiten sechs Linien ein Sechseck B. Legt man durch je zwei gegenüberliegende Seiten dieses Sechsecks eine Ebene, so schneiden sich die drei Ebenen im Punkte 8. In jedem dieser Sechsecke schneidet also jede ungerade Seite jede gerade Seite. Wenn wir aber die beiden Sechsecke mit einander vergleichen, so finden wir, dass jede gerade Seite des einen jede gerade Seite des andern und jede ungerade Seite des einen jede ungerade Seite des andern schneidet. Denn es schneidet z. B., wie oben bemerkt wurde, die Gerade II die Gerade (IV). Da aber (IV) in II und II in (VI) übergeht, wenn man statt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 respective 5, 6, 1, 2, 3, 4, 8, 7 setzt, so schneiden sich auch II

und (VI). Endlich schneiden sich die Geraden II und (II), weil beide in derselben Ebene 1 2 3 liegen, etc..... Um die Eckpunkte des Sechsecks A zu bestimmen, verbinde man die Punkte 1, 2, ... 6 der Reihe nach durch gerade Linien, wodurch ein Sechseck H entsteht. Jede Seite dieses Sechsecks wird von der durch die gegenüberliegende Seite und den Punkt 7 gelegten Ebene in einem Punkte geschnitten, der zugleich eine Ecke des Sechsecks A ist. Ferner wird jede Seite des Sechsecks H von der durch die gegenüberliegende Seite und den Punkt 8 gelegten Ebene in einem Punkte geschnitten, der zugleich eine Ecke des Sechsecks B ist. Diese Bemerkungen lassen sich nun in folgendem Satze zusammenfassen:

Lehrsatz 3.

„Von den acht Schnittpunkten dreier Oberflächen zweiter Ord-„nung betrachte man irgend sechs als die Ecken eines Sechsecks H „und schneide die aufeinander folgenden Seiten dieses Sechsecks „durch Ebenen, welche durch die gegenüberliegenden Seiten und „den siebenten Schnittpunkt gelegt sind. Die Schnittpunkte der „Seiten betrachte man in der Reihe, wie sie auf den auf einander „folgenden Seiten des Sechsecks H liegen, als die Ecken eines „zweiten Sechsecks A. Auf gleiche Weise bilde man ein drittes, „dem ersten H in dem Sinne der Peripherie einbeschriebenes Sechs-„eck B, von welchem jede Ecke in einer Seite des Sechsecks H „und in der durch die gegenüberliegende Seite und den achten „Schnittpunkt gelegten Ebene liegt. Alsdann liegen die Seiten „der Sechsecke A und B auf demselben Hyperboloïd."

Wenn von diesen drei Sechsecken irgend zwei gegeben sind, so kann man durch eine leichte Construction das dritte finden. Sind nun von den acht Schnittpunkten 1, 2, ... 8 dreier Oberflächen zweiter Ordnung die sieben ersten gegeben, so sind mit ihnen auch die Sechsecke H und A gegeben. Das Sechseck B lässt sich aber mit Hülfe der beiden ersten leicht construiren. Legt man, nachdem man diese Construction ausgeführt hat, drei Ebenen durch die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks B, so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Punkte 8.

Königsberg, am 10. Mai 1843.

7.

Ueber die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht, und die Bestimmung ihres Grades.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 27, Seite 1—5.]

Die Aufgabe, eine Variable aus zwei algebraischen Gleichungen zu eliminiren, kann auf die Bildung einer aus den Coëfficienten der nach den Potenzen der Variabeln geordneten Gleichungen zusammengesetzten Determinante zurückgeführt werden, und die Eigenschaften der Endgleichung ergeben sich leicht aus der Untersuchung dieser Determinante. Die Determinanten sind aber ein Gegenstand vielfältiger Untersuchungen gewesen, so dass es kaum mehr als der Zurückführung der ersten Aufgabe auf die zweite bedarf, um den Grad der Endgleichung zu bestimmen oder damit verwandte Aufgaben zu lösen. Die Idee, die Endgleichung unter der Form einer gleich 0 gesetzten Determinante zu betrachten, finden wir zuerst von Herrn Professor Jacobi Bd. 15 S. 101 dieses Journals ausgeführt. Während aber an dem angeführten Orte die Componenten der Determinante bestimmte Functionen der Coëfficienten der nach den Potenzen der Variabeln geordneten Gleichungen sind, werden wir im Folgenden die Endgleichung unmittelbar aus den erwähnten Coëfficienten zusammensetzen, wodurch wir eine bequeme Einsicht in die Natur dieser Gleichung erhalten.

Die gegebenen und nach den Potenzen der Variabeln x geordneten Gleichungen vom $n$ten und $m$ten Grade seien:

$$B_0 = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0 x^0 = 0.$$
$$A_0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 x^0 = 0,$$

Setzt man alsdann $x^p A_0 = A_p$, $x^q B_0 = B_q$, so erhält man, wenn man der Grösse p nach einander die Werthe $m-1$, $m-2$, ... 1, 0, und der Grösse q die Werthe $n-1$, $n-2$, ... 1, 0 zutheilt:

$$\begin{aligned}
A_{m-1} &= a_n x^{m+n-1} + a_{n-1} x^{m+n-2} + a_{n-2} x^{m+n-3} + \cdots a_1 x^m + a_0 x^{m-1}, \\
A_{m-2} &= \qquad a_n x^{m+n-2} + a_{n-1} x^{m+n-3} + \cdots a_2 x^m + a_1 x^{m-1} + a_0 x^{m-2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_0 &= \qquad\qquad a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 x^0, \\
B_{n-1} &= b_m x^{m+n-1} + b_{m-1} x^{m+n-2} + b_{m-2} x^{m+n-3} + \cdots b_1 x^n + b_0 x^{n-1}, \\
B_{n-2} &= \qquad b_m x^{m+n-2} + b_{m-1} x^{m+n-3} + \cdots b_2 x^n + b_1 x^{n-1} + b_0 x^{n-2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
B_0 &= \qquad\qquad b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 x^0.
\end{aligned}$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen die verschiedenen Potenzen von x, nämlich x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, ... x, x^0, als die Unbekannten, so erhält man durch Auflösung dieser, wie zu bemerken, linearen Gleichungen, Brüche von demselben Nenner, der mit P bezeichnet werden mag. Dieser Nenner ist die Determinante der Coëfficienten der Unbekannten. Setzt man nun $A_0 = A_1 \ldots = A_{m-1} = B_0 = B_1 \ldots = B_{n-1} = 0$, so hat man $m+n$ lineäre und homogene Gleichungen in Rücksicht auf die $m+n$ Unbekannten. Diese Gleichungen können im Allgemeinen nicht zugleich erfüllt werden. Die Bedingung, unter welcher dieses möglich ist, oder, mit andern Worten, das Resultat der Elimination ist bekanntlich: $P = 0$.

Diese Gleichung ist die gesuchte Endgleichung. Denn wenn man x den Werth der Variabeln bedeuten lässt, welcher den beiden Gleichungen $A_0 = 0$ und $B_0 = 0$ zu gleicher Zeit genügt, so hat man $A_0 = A_1 = \cdots = A_{m-1} = B_0 = B_1 = \cdots = B_{n-1} = 0$. Eliminirt man daher aus obigen $m+n$ Gleichungen, in welchen $A_0 = A_1 = \cdots = A_{n-1} = B_0 = B_1 = \cdots = B_{n-1} = 0$ gesetzt worden, sämmtliche Potenzen von x, als ob sie verschiedene Unbekannten wären, so wird das Resultat der Elimination die genannte Gleichung $P = 0$ sein, welche mit $A_0 = 0$ und $B_0 = 0$ zugleich erfüllt wird und nicht mehr die Variable x enthält.

Um die einzelnen Glieder der Determinante P zu bilden, kann man sich bequem folgender Tafel bedienen.

	1	2	3	....	....	....	....	....	....	....	$m+n-1$	$m+n$
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_2	a_1	a_0	0	0	0	0	0
2	0	a_n	a_{n-1}	....	a_3	a_2	a_1	a_0	0	0	0	0
3	0	0	a_n	....	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	0	0	0
⋮												
$m-1$	0	0	0	0	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_2	a_1	a_0	0
m	0	0	0	0	0	a_n	a_{n-1}	....	a_3	a_2	a_1	a_0
$m+1$	b_m	b_{m-1}	b_{m-2}	....	b_2	b_1	b_0	0	0	0	0	0
$m+2$	0	b_m	b_{m-1}	....	b_3	b_2	b_1	b_0	0	0	0	0
$m+3$	0	0	b_m	....	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	0	0	0
⋮												
$m+n-1$	0	0	0	0	b_m	b_{m-1}	b_{m-2}	....	b_2	b_1	b_0	0
$m+n$	0	0	0	0	0	b_m	b_{m-1}	....	b_3	b_2	b_1	b_0

Bezeichnet man nämlich die in der $k$ten Horizontalreihe und in der $i_k$ten Verticalreihe stehende Grösse mit

$$\binom{k}{i_k}$$

und lässt $i_1, i_2, \ldots . i_{m+n}$ die Zahlen $1, 2, 3, \ldots . m+n$ in beliebiger Reihenfolge bedeuten, so ist ein beliebiges Glied der Determinante das Product

$$\binom{1}{i_1} \cdot \binom{2}{i_2} \cdot \binom{3}{i_3} \cdots \binom{m+n}{i_{m+n}}.$$

Aus diesem Gliede erhält man durch alle möglichen Permutationen der untern Zahlen $i_1, i_2, \ldots . i_{m+n}$ alle Glieder der Determinante; wobei man jedem Gliede das positive oder negative Zeichen zu geben hat, je nachdem die entsprechende Permutation eine positive oder eine negative ist (welche Benennung durch die Abhandlung des Herrn Prof. Jacobi über die Determinanten Bd. 22 genugsam bekannt ist).

Aus dieser Bildungsweise der Gleichung $P=0$ ist ersichtlich, dass dieselbe in Rücksicht auf die Coëfficienten $a_n \ldots . a_0$ den Grad m, in Rücksicht auf die Coëfficienten $b_m \ldots . b_0$ den Grad n, endlich in Rücksicht auf sämmtliche Coëfficienten den Grad $m+n$ erreicht. Nun weist aber Euler

in den Memoiren der Berl. Akad. Tom. IV, 1748, pag. 234 etc. nach, dass die Endgleichung, wenn sie keinen überflüssigen Factor enthält, in Rücksicht auf alle Coëfficienten der gegebenen Gleichungen vom Grade $m+n$ ist. Mithin enthält unsere Gleichung $P=0$ keinen überflüssigen Factor.

Nehmen wir nun an, die Coëfficienten a_p und b_p seien Functionen einer zweiten Variabeln, und bezeichnen der Kürze wegen durch dieselben Buchstaben a_p und b_p respective die Grade dieser Functionen, so wird der Grad des beliebigen, oben angegebenen Gliedes in P durch die Summe ausgedrückt werden:

$$\binom{1}{i_1}+\binom{2}{i_2}+\binom{3}{i_3}+\cdots\binom{m+n}{i_{m+n}}.$$

Da aber das Glied vom höchsten Grade zugleich den Grad der Gleichung bestimmt, so wird das Maximum der genannten Summe für die verschiedenen Permutationen der untern Zahlen den Grad der Endgleichung ergeben.

Ueber die Bestimmung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung.

Irgend ein Glied einer gegebenen ganzen rationalen Function U vom $p$ten Grade der n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Gleichung $A_0=0$ lässt sich in der Form

$$c \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

darstellen, wo die Exponenten $\alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ irgend welche gleiche oder ungleiche unter den Zahlen 0, 1, 2, 3, ... p bedeuten, unter der Voraussetzung, dass $\alpha_1+\alpha_2 \ldots + \alpha_n \leqq p$ sei. Der von den Wurzeln unabhängige Coëfficient c dieses Gliedes möge der Bequemlichkeit wegen durch

$$(\alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 \ldots \alpha_n)$$

bezeichnet werden, worauf dann das aus der symmetrischen Function U herausgehobene Glied die Form

$$(\alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

erhält. Die Natur der symmetrischen Function verlangt aber, dass in ihr alle verschiedenen Glieder vorkommen, welche durch die Permutation der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit einander aus diesem Gliede entstehen. Die Summe dieser Glieder wollen wir durch

$$(\alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \, \Sigma \, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

oder kürzer durch

$$(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_n)\, [\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_n]$$

bezeichnen. Unter dieser Voraussetzung kann die symmetrische Function U als die Summe der Glieder $(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_n)\, [\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_n]$ dargestellt werden, indem man für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$ alle gleichen und ungleichen Zahlen 0, 1, 2, ... p setzt; unter der Beschränkung, dass die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ die Zahl p nicht übersteigen dürfe. Demnach haben wir:

$$U = \Sigma (\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_n)\, [\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_n].$$

Nehmen wir an, q sei eine ganze Zahl, kleiner als p, so wird unter der Bedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = q$$

jene Function U homogen und vom $q$ten Grade sein.

Da eine beliebige symmetrische Function der Wurzeln auf die genannte Weise aus den einfachen symmetrischen Functionen

$$[\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_n]$$

zusammengesetzt werden kann, so wollen wir letztere die Elemente der symmetrischen Function nennen. Wir werden nun zeigen, wie diese Elemente durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung $A_0 = 0$ ausgedrückt werden können.

Euler gelangt an dem oben angegebenen Orte zu der durch Elimination von x aus den Gleichungen $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ (welche wir jetzt durch $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ bezeichnen wollen), hervorgehenden Endgleichung, indem er die Wurzeln der ersten Gleichung $x_1, x_2, \ldots . x_n$ nach einander in die zweite setzt; wodurch sich n Gleichungen ergeben, deren Product:

$$\varphi(x_1) . \varphi(x_2) \ldots . \varphi(x_n) = 0$$

die gesuchte Endgleichung wird, wenn man den linken Theil der Gleichung nach den verschiedenen Producten der Coëfficienten $b_m, b_{m-1}, \ldots . b_0$ der zweiten Gleichung entwickelt und die symmetrischen Functionen der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots . x_n$, mit welchen jene Producte multiplicirt sind, durch die Coëfficienten der ersten Gleichung ausdrückt. Ein beliebiges Glied der Entwicklung jenes Products ist von der Form:

$$b_{\alpha_1} . b_{\alpha_2} \ldots . b_{\alpha_n} [\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_n],$$

und die Gleichung selbst ist

$$\Sigma\, b_{\alpha_1} . b_{\alpha_2} \ldots . b_{\alpha_n} [\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \alpha_n] = 0;$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$ die Zahlen 0, 1, 2, ... m, gleiche oder ungleiche, bedeuten.

Man erhält also die Endgleichung, wenn man die Elemente $[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]$ der symmetrischen Function durch die Coëfficienten der Gleichung $f(x) = 0$ ausdrückt und in die angegebene Gleichung substituirt. Die Bildung dieser Ausdrücke der Elemente macht aber grössere Schwierigkeit, als die angegebene Bildung der Endgleichung $P = 0$. Man wird es daher vorziehen, umgekehrt durch die Endgleichung die Elemente der symmetrischen Functionen zu bestimmen.

Die durch die Elimination von x aus den Gleichungen $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ hervorgehende Endgleichung ist sowohl

$$\Sigma\, b_{\alpha_1} . b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_n} [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n] = 0, \qquad \text{als} \quad P = 0,$$

deren linke Theile, wenn man die Coëfficienten $b_m, b_{m-1}, \dots b_0$ der Gleichung $\varphi(x) = 0$ als variabel betrachtet, abgesehen von einem constanten Factor, gleich sein müssen. Nun ist aber in dem linken Theile der ersten Gleichung der Coëfficient von b_0^n gleich $[0\,0 \dots 0] = 1$. Dividiren wir daher P durch den Coëfficienten von b_0^n, welchen diese Potenz in der Entwicklung von P hat, und den wir mit δ bezeichnen wollen, so wird

$$\Sigma\, b_{\alpha_1} . b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_n} [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n] = \frac{P}{\delta};$$

aus welcher Gleichung durch Gleichstellung der Coëfficienten gleicher Producte der Variabeln $b_m, b_{m-1}, \dots b_0$ die Elemente der symmetrischen Functionen der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ sich als Functionen der Coëfficienten dieser Gleichung ergeben.

Will man auf diese Weise sämmtliche Elemente einer symmetrischen Function vom $p$ten Grade bestimmen, so wird man, um unnöthige Rechnungen zu vermeiden, m, welches den Grad der Gleichung $\varphi(x) = 0$ angiebt, und über welches man nach Belieben verfügen kann, gleich p setzen. Unter dieser Voraussetzung, oder auch wenn $m > p$ ist, geht der Ausdruck $P : \delta$ in den Werth der symmetrischen Function U über, wenn man in der Entwicklung des ersteren nach den verschiedenen Producten der Coëfficienten $b_m, b_{m-1}, \dots b_0$ statt der Producte $b_{\alpha_1} . b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_n}$ die Null oder $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ setzt, je nachdem die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ die Zahl p übersteigt, oder nicht.

Königsberg, den 2. October 1843.

8.

Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 28, Seite 68—96.]

1.

Wenn man aus zwei gegebenen vollständigen Gleichungen mit einer Variabeln vom $m$ten und $n$ten Grade diese Variable auf irgend eine Weise eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen den Coëfficienten der gegebenen Gleichungen, welche erfüllt wird, sobald ein Werth der Variabeln den beiden gegebenen Gleichungen zugleich genügt. Wenn umgekehrt diese Gleichung zwischen den Coëfficienten erfüllt wird, so braucht nicht immer ein Werth der Variabeln zu existiren, der den beiden gegebenen Gleichungen zugleich genügt. Durch eine geschickt angestellte Elimination der Variabeln kann man aber eine Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der gegebenen Gleichungen finden, unter welcher jedesmal ein Werth der Variabeln existirt, welcher den gegebenen Gleichungen zugleich genügt, und die erfüllt wird, wenn ein Werth der Variabeln die beiden gegebenen Gleichungen zugleich erfüllt. Diese Gleichung, die in allen durch Elimination der Variabeln entstandenen Gleichungen als Factor enthalten ist, führt den Namen der Endgleichung, während die andern Factoren mit dem Namen der überflüssigen Factoren bezeichnet werden. Durch Euler (Mem. d. Berl. Akad. an. 1748 und 1760) ist bekannt, dass die Endgleichung homogen ist und in Rücksicht auf die Coëfficienten der Gleichung vom $m$ten Grade bis auf den $n$ten, in Rücksicht auf die Coëfficienten der Gleichung vom

$n$ten Grade bis auf den $m$ten, endlich in Rücksicht auf alle Coëfficienten der gegebenen Gleichungen bis auf den $(m+n)$ten Grad steigt. Unter den bekannten Verfahrungsweisen, die Endgleichung zu bilden, verdient die Zurückführung der Aufgabe auf die Elimination der Unbekannten aus linearen Gleichungen, welche der Herr Professor Richelot als einer Entdeckung des Herrn Sylvester in dem 21. Bande dieses Journals erwähnt, und welche ich, ohne sie zu kennen, im 27. Bande[1]) wieder aufgenommen habe, unstreitig den Vorzug.

Für drei Gleichungen mit zwei Variabeln ist, soviel ich weiss, Aehnliches noch nicht geleistet worden. Ich werde daher im Folgenden die Euler'sche Methode zu verallgemeinern suchen.

2.

Es seien:

$$1.\quad f(x,y)=0,\qquad 2.\quad \varphi(x,y)=0,\qquad 3.\quad \psi(x,y)=0$$

drei vollständige Gleichungen zwischen den beiden Variabeln x und y, vom $m$ten, $n$ten und $p$ten Grade. Diesen Gleichungen wird man im Allgemeinen nicht durch ein Wurzelnpaar x und y genügen können, wenn nicht eine bestimmte Relation zwischen den Coëfficienten der gegebenen Gleichungen stattfindet; und wenn diese Relation stattfindet, wird man immer ein Wurzelnpaar finden, welches den gegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit genügt. Um diese Relation zu finden, welche im Folgenden den Namen der Endgleichung führen wird, suche man die Bedingung zwischen den Coëfficienten der dritten Gleichung, unter welcher ein Wurzelnpaar der beiden ersten Gleichungen der dritten Gleichung genügt.

Unter der Voraussetzung, dass $m.n$ die Anzahl der Wurzelnpaare der beiden ersten Gleichungen ist, was Euler an dem genannten Orte bewiesen hat, ist die gesuchte Bedingung:

$$4.\qquad \Psi=\psi(x_1,y_1).\psi(x_2,y_2)\ldots\ldots\psi(x_{m.n},y_{m.n})=0,$$

wenn man durch $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots\ldots x_{m.n}, y_{m.n}$ die Wurzelnpaare der ersten und zweiten Gleichung bezeichnet. Denn wenn ein Wurzelnpaar der beiden ersten Gleichungen zugleich der dritten genügt, so wird auch die Gleichung (4) erfüllt; und umgekehrt, wenn die Gleichung (4) er-

1) [Seite 83 und ff. dieser Ausgabe].

füllt wird, so gibt es immer ein Wurzelnpaar der beiden ersten Gleichungen, welches der dritten Gleichung genügt. Entwickelt man den linken Theil der Gleichung (4) nach Potenzen und Producten der Coëfficienten der dritten Gleichung, welche Entwicklung mit Ψ bezeichnet werden mag, so wird die Gleichung $\Psi = 0$ in Rücksicht auf die Coëfficienten der dritten Gleichung homogen und vom Grade $m.n$ und die Coëfficienten dieser Potenzen und Producte werden bestimmte Functionen der Wurzeln der beiden ersten Gleichungen sein. Es bleibt also noch übrig, diese Functionen in der Entwicklung Ψ durch die Coëfficienten der beiden ersten Gleichungen auszudrücken, um die gesuchte, von jedem überflüssigen Factor freie Endgleichung zu erhalten.

3.

Wenn man auf irgend eine Weise aus den drei gegebenen Gleichungen die Variabeln eliminirt, so erhält man eine Gleichung

5. $$P = 0,$$

welche immer erfüllt wird, sobald ein Wurzelnpaar den drei gegebenen Gleichungen zugleich genügt. Den drei gegebenen Gleichungen wird aber durch ein Wurzelnpaar genügt, wenn die Gleichung (4) erfüllt wird. Daraus folgt, dass die Gleichung (5) erfüllt wird, wenn die Gleichung (4) erfüllt wird. Angenommen, dass man die Gleichung (5) gefunden habe, und dass sie in Rücksicht auf die Coëfficienten der dritten Gleichung homogen und vom Grade $m.n$ sei. Da dieselbe für alle Werthe der Coëfficienten der dritten Gleichung erfüllt wird, welche der Gleichung (4) genugthun, so folgt hieraus, dass die Ausdrücke P und Ψ nur durch einen von den Coëfficienten der dritten Gleichung unabhängigen Factor von einander verschieden sein können. Bezeichnet man daher das in der Function ψ von den Variabeln x, y freie Glied mit c und den Coëfficienten von $c^{m.n}$ in der Entwicklung der Function P mit γ, so wird man

6. $$\frac{P}{\gamma} = \Psi$$

haben, woraus sich durch Gleichsetzung der Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Coëfficienten der dritten Gleichung auf beiden Seiten der angeführten Gleichung die gesuchten Functionen der Wurzeln, ausgedrückt durch die Coëfficienten der beiden ersten Gleichungen, ergeben.

12*

Es kommt also darauf an, aus den drei gegebenen Gleichungen durch eine geschickt angestellte Elimination der Variabeln eine homogene Gleichung $P = 0$ vom mnten Grade in Rücksicht auf die Coëfficienten der dritten Gleichung abzuleiten. Man wird sogleich sehen, wie dies auszuführen sei, wenn die dritte Gleichung vom ersten Grade ist.

4.

Es sei die gegebene dritte Gleichung

7. $$\psi_\lambda(x, y) = a_\lambda x + b_\lambda y + c_\lambda = 0$$

lineär. Alsdann geht die Gleichung (4) in

8. $$\Psi_\lambda = (a_\lambda x_1 + b_\lambda y_1 + c_\lambda)(a_\lambda x_2 + b_\lambda y_2 + c_\lambda) \ldots (a_\lambda x_{m.n} + b_\lambda y_{m.n} + c_\lambda) = 0$$

über. Man eliminirt aber die Variable y aus den gegebenen drei Gleichungen, indem man aus der letzten den Werth

$$y = -\frac{a_\lambda x + c_\lambda}{b_\lambda}$$

in die beiden ersten setzt, wodurch man, wenn man mit b_λ^m und b_λ^n multiplicirt, folgende in Rücksicht auf a_λ, b_λ, c_λ homogene Gleichungen:

9. $$b_\lambda^m f\left(x, -\frac{a_\lambda x + c_\lambda}{b_\lambda}\right) = 0, \qquad b_\lambda^n \varphi\left(x, -\frac{a_\lambda x + c_\lambda}{b_\lambda}\right) = 0$$

erhält. Diese Gleichungen sind in Rücksicht auf a_λ, b_λ, c_λ respective vom $m$ten und vom $n$ten Grade, so wie auch in Rücksicht auf die Variable x. Eliminirt man daher die noch übrig bleibende Variable x nach der bekannten Methode, so wird man eine Gleichung

10. $$P_\lambda = 0$$

erhalten, welche in Rücksicht auf die Coëfficienten in f, φ, ψ_λ respective vom $n$ten, $m$ten und $m.n$ten, in Rücksicht auf die Coëfficienten in f und φ vom $(m+n)$ten und in Rücksicht auf alle Coëfficienten homogen und vom Grade $m+n+m.n$ ist. Bezeichnet man daher durch g den Coëfficienten von $c_\lambda^{m.n}$ in der Entwicklung des nach Potenzen und Producten der Grössen a_λ, b_λ, c_λ geordneten Ausdrucks P_λ, der in Rücksicht auf die Coëfficienten in f und φ vom $n$ten und vom $m$ten und in Rücksicht auf beiderlei Coëfficienten vom Grade $m+n$ ist, so erhält man:

11. $$\frac{P_\lambda}{g} = \Psi_\lambda.$$

Entwickelt man beide Seiten der Gleichung nach Potenzen und Producten der Grössen a_λ, b_λ, c_λ und setzt die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so erhält man Functionen der Wurzeln der beiden ersten Gleichungen, welche sich in der Entwicklung Ψ der Gleichung (4) wiederfinden, ausgedrückt durch die Coëfficienten jener beiden Gleichungen. Auf diese Weise kann man aber nur gewisse Functionen der Wurzeln, welche in der Entwicklung Ψ enthalten sind, durch die Coëfficienten der beiden ersten Gleichungen ausdrücken. Um alle jene Functionen der Wurzeln auszudrücken, nehme man statt der linearen Gleichung (7) nach einander die linearen Gleichungen

$$\psi_1(x, y) = 0, \quad \psi_2(x, y) = 0, \; \ldots . \; \psi_p(x, y) = 0,$$

welche aus jener entstehen, indem man für den Index λ nach einander die Indices 1, 2, ... p setzt, und bilde die ihnen entsprechenden Gleichungen (8 bis 11), welche durch die entsprechenden Indices bezeichnet werden sollen. Endlich nehme man an, dass die gegebene dritte Gleichung in das Product der linearen Factoren $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, ... $\psi_p(x, y)$ zerfällbar sei.

5.

Wenn die gegebene dritte Gleichung

12. $$\psi_1(x, y) \,.\, \psi_2(x, y) \ldots . \psi_p(x, y) = 0$$

ist, so geht die Gleichung (4) in

13. $$\Psi_1 \,.\, \Psi_2 \ldots . \Psi_p = 0$$

über, und wenn ein Wurzelnpaar den Gleichungen (1), (2), (12) zugleich genügt, so hat man

14. $$P_1 \, P_2 \ldots . P_p = 0.$$

Demnach wird die Gleichung (14) erfüllt für alle Werthe von a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, ..., welche der Gleichung (13) genügen. Es können daher die linken Theile derselben, welche in Rücksicht auf die genannten Grössen homogen und von demselben Grade sind, nur durch einen von a_1, b_1, ... unabhängigen Factor sich von einander unterscheiden. Bezeichnet man also durch Ψ_0 und P_0 die linken Theile jener Gleichungen, so hat man

15. $$\frac{P_0}{g^p} = \Psi_0.$$

Entwickelt man beide Theile dieser Gleichung nach Potenzen und Producten der Grössen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, ... und setzt die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so erhält man gerade die gesuchten Functionen der Wurzeln der beiden ersten Gleichungen, welche in der Entwicklung des linken Theils der Gleichung (4) vorkommen, ausgedrückt durch die Coëfficienten der Gleichungen (1) und (2).[1] Alle diese Ausdrücke haben den gemeinschaftlichen Nenner g^p, welcher in Rücksicht auf die Coëfficienten der ersten und zweiten Gleichung homogen und respective vom np und mpten, und überhaupt vom $(m+n)p$ten Grade ist. Da nun, wie man gesehen hat, die Coëfficienten der Entwicklung von P_λ nach Potenzen und Producten von a_λ, b_λ, c_λ in Rücksicht auf die Coëfficienten der ersten und zweiten Gleichung vom $n$ten und $m$ten Grade sind, so wird P_0 respective vom np und mpten und in Rücksicht auf alle Coëfficienten der ersten und zweiten Gleichung vom Grade $(m+n)p$ sein. Dasselbe gilt von den Zählern der Ausdrücke für die genannten Functionen der Wurzeln der ersten und zweiten Gleichung.

6.

Die aus den gegebenen Gleichungen (1), (2), (3) hervorgehende Endgleichung erhält man nun aus der entwickelten Gleichung (4), wenn man darin die Ausdrücke der Functionen der Wurzeln der beiden ersten Gleichungen substituirt und mit dem gemeinsamen Nenner g^p derselben multiplicirt. Aus dieser Bildungsweise der Endgleichung ergibt sich aber folgender

Lehrsatz 1.

Die durch Elimination zweier Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom mten, nten und pten Grade hervorgehende Endgleichung ist in Rücksicht auf alle Coëfficienten dieser Gleichungen homogen und vom Grade $mn+np+pm$, und in Rücksicht auf die Coëfficienten der einzelnen Gleichungen ebenfalls homogen und von den Graden np, pm, mn.

7.

Obwohl die auseinandergesetzte Eliminationsmethode immer zum Ziele führt, so lassen sich die angewendeten Operationen wegen ihrer

1) [Man vgl. hierzu die Anmerkung zu Nr. 8 am Schlusse des Bandes].

Unsymmetrie doch zu wenig verfolgen, als dass man daraus die wahre Natur der Endgleichung mit Leichtigkeit erforschen könnte. Da die Endgleichung, selbst in dem Falle, wo die gegebenen Gleichungen sämmtlich nur vom zweiten Grade sind, aus einer nicht übersehbaren Menge von Termen besteht, welche Bezout in seiner Theorie der algebraischen Gleichungen nicht ohne Mühe berechnet hat, so wird man es nicht versuchen, aus der Endgleichung selbst Nutzen zu ziehen, vielmehr symmetrische und leicht zu verfolgende Eliminationsmethoden sich schaffen müssen, die eine Einsicht in die Natur der Endgleichung gestatten. Für den Fall dreier Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln werde ich eine solche Methode entwickeln, und zugleich Folgerungen ziehen, die für die Theorie der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung wichtig sind. Denn während die Bestimmung der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung auf eine Gleichung vom neunten Grade führt, bietet die genannte Eliminationsmethode die Mittel, diese Gleichung vom neunten Grade durch eine vom vierten und eine Gleichung vom dritten Grade zu ersetzen. Von den geometrischen Eigenschaften der Curven dritter Ordnung, welche sich aus dieser Eliminationsmethode ergeben, führe ich vorläufig nur diese an: „Dass die Wendepunkte aller Curven dritter Ordnung, von denen jede durch sämmtliche Wendepunkte einer und derselben Curve derselben Ordnung hindurchgeht, mit den Schnittpunkten zusammenfallen."

8.

Wenn man durch f_1, f_2, f_3 drei gegebene homogene Functionen vom zweiten und durch φ und ψ zwei gegebene homogene Functionen vom dritten Grade der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet, so kann man immer drei lineäre homogene Multiplicatoren $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ und einen constanten Multiplicator p so bestimmen, dass

$$p\,\varphi + A^{(1)} f_1 + A^{(2)} f_2 + A^{(3)} f_3 = \psi$$

ist. Denn wenn man die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der entwickelten Gleichung einander gleich setzt, so erhält man zehn lineäre Gleichungen zwischen den neun in $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ enthaltenen Constanten und der zehnten p. Bestimmt man daraus die unbekannten zehn Constanten, so stellen sich die Werthe

derselben als Brüche dar, mit demselben Nenner R. Dieser Nenner ist unabhängig von den Coëfficienten der Variabeln in der Function ψ; er ist homogen und lineär in Rücksicht auf die Coëfficienten in φ; ferner ist er homogen und vom dritten Grade, sowohl in Rücksicht auf die Coëfficienten in f_1, als in Rücksicht auf die Coëfficienten in f_2 und f_3; endlich ist er homogen und vom zehnten Grade in Rücksicht auf alle in f_1, f_2, f_3 und φ enthaltenen Coëfficienten. Was den Zähler des Werthes der Unbekannten p betrifft, so kann man die Bemerkung machen, dass er unabhängig von den Coëfficienten in φ ist, homogen aber und vom ersten Grade in Rücksicht auf die Coëfficienten in ψ, homogen und vom dritten Grade sowohl in Rücksicht auf die Coëfficienten in f_1 als in f_2 und f_3; endlich homogen und vom zehnten Grade in Rücksicht auf alle in f_1, f_2, f_3, ψ enthaltenen Coëfficienten.

Die Nenner der unbekannten Coëfficienten lassen sich vermeiden, wenn man $R.\psi$ statt ψ setzt, wodurch die in Rede stehende Gleichung in

16. $$p\,\varphi + A^{(1)} f_1 + A^{(2)} f_2 + A^{(3)} f_3 = R\,.\,\psi$$

übergeht. Denn bestimmt man in der angegebenen Weise die unbekannten Coëfficienten in dieser Gleichung, so werden dieselben gleich den Zählern der unbekannten Coëfficienten in der vorhergehenden Gleichung, und folglich zu ganzen Functionen der in f_1, f_2, f_3, φ und ψ enthaltenen Coëfficienten.

Da die Grösse R unabhängig von den Coëfficienten in ψ ist, so wird sich dieselbe auch nicht ändern, wenn man für ψ das Product $x_\varkappa\,.\,x_\lambda\,.\,x_\mu$ setzt, wo $\varkappa$, λ, μ irgend welche gleiche oder ungleiche unter den Zahlen 1, 2, 3 bedeuten. Die andern Multiplicatoren werden sich aber ändern und mögen durch $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}$ bezeichnet werden, wobei angenommen werden soll, dass die verschiedenen Zeichen, welche aus den angegebenen durch Permutation der unteren Indices unter einander entstehen, immer für dieselbe Grösse gelten, so dass z. B.

$$p_{\varkappa,\lambda,\mu} = p_{\varkappa,\mu,\lambda} = p_{\lambda,\varkappa,\mu} = \cdots$$

ist. Dasselbe soll auch künftig für alle ähnlichen Bezeichnungen gelten.

Demnach hat man

17. $$p_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\varphi + A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu} f_1 + A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu} f_2 + A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu} f_3 = R\,x_\varkappa\,x_\lambda\,x_\mu,$$

woraus sich, wenn man für $\varkappa$, λ, μ alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3

mit Wiederholung setzt, zehn verschiedene Gleichungen ergeben. Die Gleichung (17) stellt also ein System von zehn Gleichungen mit dreissig Multiplicatoren A und zehn Multiplicatoren p dar. Nimmt man nun an, dass die gegebene Function ψ

$$= c_{1,1,1}x_1x_1x_1 + c_{2,2,2}x_2x_2x_2 + c_{3,3,3}x_3x_3x_3 + 3\,c_{1,1,2}x_1x_1x_2 + 3\,c_{1,1,3}x_1x_1x_3 + 3\,c_{2,2,1}x_2x_2x_1 + 3\,c_{2,2,3}x_2x_2x_3 + 3\,c_{3,3,1}x_3x_3x_1 + 3\,c_{3,3,2}x_3x_3x_2 + 6\,c_{1,2,3}x_1x_2x_3$$

sei, welcher Ausdruck kürzer durch $\Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}\, x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu$ bezeichnet werden kann, da man aus dem Gliede $c_{\varkappa,\lambda,\mu}\, x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu$ die ganze Summe erhält, wenn man für $\varkappa$, λ, μ nach einander die Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 mit Wiederholung und ihre Permutationen setzt und addirt, auch wie oben annimmt, dass $c_{\varkappa,\lambda,\mu} = c_{\varkappa,\mu,\lambda} = \cdots$ sei: so kann man die Multiplicatoren in der Gleichung (16) durch die vierzig Multiplicatoren in dem Systeme von Gleichungen (17) auf folgende Art ausdrücken:

$$18.\quad \begin{cases} p = \Sigma\, c_{\varkappa,\lambda,\mu} \,.\, p_{\varkappa,\lambda,\mu}, & A^{(2)} = \Sigma\, c_{\varkappa,\lambda,\mu} \,.\, A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}, \\ A^{(1)} = \Sigma\, c_{\varkappa,\lambda,\mu} \,.\, A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}, & A^{(3)} = \Sigma\, c_{\varkappa,\lambda,\mu} \,.\, A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}. \end{cases}$$

9.

Es bleiben noch die vierzig Multiplicatoren des durch (17) dargestellten Systems von Gleichungen zu bestimmen übrig. Da hierzu die Kenntniss der gegebenen Functionen erforderlich ist, so nehme man an, es sei

$$19.\quad \begin{cases} f_1 = \Sigma\, a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda, \quad f_2 = \Sigma\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda, \quad f_3 = \Sigma\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda, \\ \varphi = \Sigma\, b_{\varkappa,\lambda,\mu}\, x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu, \end{cases}$$

wo $a^{(\mu)}_{\varkappa,\lambda} = a^{(\mu)}_{\lambda,\varkappa}$ und für $\varkappa$, λ die Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 zu zweien mit Wiederholung und ihre Permutationen zu setzen sind. Multiplicirt man nun die Gleichung (17) mit dem unbestimmten Factor $\pi_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und bildet ein System von Gleichungen, indem man für $\varkappa$, λ, μ alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 mit Wiederholung und die Permutationen derselben setzt, so erhält man durch Addition:

$$20.\quad \varphi\, \Sigma\, p_{\varkappa,\lambda,\mu}\, \pi_{\varkappa,\lambda,\mu} + f_1\, \Sigma\, A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\, \pi_{\varkappa,\lambda,\mu} + f_2\, \Sigma\, A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\, \pi_{\varkappa,\lambda,\mu} + f_3\, \Sigma\, A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\, \pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = R\, \Sigma\, \pi_{\varkappa,\lambda,\mu}\, x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu.$$

Die zehn unbestimmten Factoren π lassen sich aber so bestimmen, dass den drei Gleichungen

$$\Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0; \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0; \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0$$

Genüge geschieht, worauf die Gleichung (20) in

$$\varphi\,\Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = R\,\Sigma \pi_{\varkappa,\lambda,\mu}\,x_\varkappa\,x_\lambda\,x_\mu$$

übergeht. Jede der drei ersten Gleichungen zerfällt, da die Grössen A lineäre und homogene Functionen der Variabeln sind, von welchen die Bestimmung der Factoren π unabhängig sein muss, in drei andere, so dass man zur Bestimmung der zehn Factoren π nur neun Gleichungen hat. Bemerkt man nun, dass die letzte Gleichung unabhängig von den besondern Werthen der Variabeln stattfindet, so folgt hieraus, dass die Grössen b den entsprechenden Grössen π proportional sind. Setzt man daher einen der Factoren π, z. B. $\pi_{1,1,1}$, der willkürlich bestimmt werden kann, gleich $b_{1,1,1}$, so werden auch die übrigen Grössen π den mit gleichen Indices behafteten Grössen b gleich sein. Dieses vorausgesetzt, so folgt aus der letzten Gleichung und den drei vorhergehenden:

$$21. \quad \begin{cases} R = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}\,b_{\varkappa,\lambda,\mu}, \\ \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,b_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0, \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,b_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0, \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,b_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0. \end{cases}$$

Man kann die zehn Factoren π aber auch aus den folgenden Gleichungen bestimmen, indem man mit ν irgend eine der Zahlen 1, 2, 3 bezeichnet:

$$\Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0,$$
$$\Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = R\,x_\nu, \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0, \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0,$$

von denen jede, mit Ausnahme der ersten, in drei andere zerfällt. Mit Rücksicht auf diese Gleichungen geht die Gleichung (20) in

$$f_1\,R\,x_\nu = R\,\Sigma \pi_{\varkappa,\lambda,\mu}\,x_\varkappa\,x_\lambda\,x_\mu \quad \text{oder in} \quad f_1\,x_\nu = \Sigma \pi_{\varkappa,\lambda,\mu}\,x_\varkappa\,x_\lambda\,x_\mu$$

über, woraus man durch Gleichsetzung der Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung die gesuchten Werthe der Factoren π erhält. Setzt man diese Werthe der Factoren π in die obigen vier Gleichungen, so erhält man

$$22. \quad \begin{cases} \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\nu}\,a^{(1)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\,a^{(1)}_{\varkappa,\lambda} = R\,x_\nu, \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\,a^{(1)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\,a^{(1)}_{\varkappa,\lambda} = 0; \end{cases}$$

wobei zu beachten ist, dass die Summenzeichen sich nur auf die verschiedenen Werthe der Indices $\varkappa$, λ, für welche man die Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 zu zweien mit Wiederholung und deren Permutationen

zu setzen hat, aber nicht auf die verschiedenen Werthe von ν beziehen; welches auch für die folgenden Gleichungen (23) und (24) gilt.

Aus den Gleichungen (22) erhält man ein neues System, wenn man für die oberen Indices (1), (2), (3) respective (2), (3), (1) setzt, nämlich:

$$23.\quad \begin{cases} \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} = R\, x_\nu, \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} = 0; \end{cases}$$

woraus endlich durch dieselbe Veränderung der oberen Indices folgende Gleichungen entstehen:

$$24.\quad \begin{cases} \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} = R\, x_\nu; \end{cases}$$

welche beiden Systeme auf gleiche Weise wie das System (22) aus (20) hätten abgeleitet werden können.

Die Gleichungen (21 bis 24) enthalten alle Elemente zur Bestimmung der vierzig Multiplicatoren p und A, welche in dem durch (17) dargestellten Systeme enthalten sind. Denn da aus jeder der Gleichungen (22 bis 24) drei hervorgehen, indem man für ν nacheinander die Zahlen 1, 2, 3 setzt, so hat man, wenn man die Gleichungen (21) hinzurechnet, im Ganzen vierzig Gleichungen, in welche die zu bestimmenden Multiplicatoren auf lineäre Weise eingehen.

10.

Da von den vierzig Multiplicatoren p und A nur die zehn Multiplicatoren p in der folgenden Untersuchung eine Rolle spielen, so genügt es, die Gleichungen zusammenzustellen, deren Auflösung die Werthe dieser Multiplicatoren gibt. Sie sind folgende:

$$25.\qquad R = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu} \cdot b_{\varkappa,\lambda,\mu};$$

$$26.\quad \begin{cases} 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}\, a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; \quad 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; \quad 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}\, a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; \quad 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; \quad 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}\, a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; \quad 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; \quad 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \end{cases}$$

woraus sich R als die Determinante der Coëfficienten der Grössen p ergibt.

Nimmt man an, dass die Functionen f_1, f_2, f_3 für die Werthe der Variabeln $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ verschwinden, dass also die drei

Gleichungen $f_1(x, y, 1) = 0$, $f_2(x, y, 1) = 0$, $f_3(x, y, 1) = 0$ stattfinden, so geht die Gleichung (17) in

$$p_{\varkappa, \lambda, \mu}\, \varphi = R\, x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu$$

über, woraus für die genannten Werthe der Variabeln die Proportion

$$\begin{array}{c} x_1\,x_1\,x_1 : x_2\,x_2\,x_2 : x_3\,x_3\,x_3 : x_1\,x_1\,x_2 : \ldots\ldots : x_1\,x_2\,x_3 = \\ p_{1,1,1} : p_{2,2,2} : p_{3,3,3} : p_{1,1,2} : \ldots\ldots : p_{1,2,3} \end{array}$$

folgt. In der That sind auch die Verhältnisse der Grössen p von der Function φ unabhängig; was schon in No. 8 bemerkt wurde und auch aus der Gleichung (26) zu entnehmen ist. Beiläufig mag bemerkt werden, dass die Verhältnisse der Grössen p unbestimmt werden müssen, wenn den drei Gleichungen noch ein zweites Werthenpaar x, y genügt. Nimmt man ferner an, dass φ eine Function sei, welche für die Werthe $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ ebenfalls verschwindet, so muss auch R verschwinden. Es wird also unter dieser Annahme $R = 0$ zu dem Resultat der Elimination der Variabeln x, y aus den drei Gleichungen $f_1(x, y, 1) = 0$, $f_2(x, y, 1) = 0$, $f_3(x, y, 1) = 0$. Demnach ist es für die Elimination der Variabeln aus drei gegebenen Gleichungen vom zweiten Grade wichtig, eine passende Function vom dritten Grade zu haben, welche für dasjenige Werthenpaar verschwindet, so den drei gegebenen Gleichungen genügt. Eine solche Function soll in der folgenden Nummer näher untersucht werden.

11.

Die drei Functionen f_1, f_2, f_3 kann man, wenn man der Kürze wegen $u_\varkappa^{(\lambda)}$ statt $\dfrac{d f_\varkappa}{d x_\lambda}$ setzt, weil sie homogen und vom zweiten Grade sind, so darstellen:

$$27. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1\,u_1^{(1)} + x_2\,u_1^{(2)} + x_3\,u_1^{(3)} = 2\,f_1, \\ x_1\,u_2^{(1)} + x_2\,u_2^{(2)} + x_3\,u_2^{(3)} = 2\,f_2, \\ x_1\,u_3^{(1)} + x_2\,u_3^{(2)} + x_3\,u_3^{(3)} = 2\,f_3. \end{array} \right.$$

Betrachtet man die in diesen Gleichungen explicite und lineär vorkommenden Variabeln x_1, x_2, x_3 als die Unbekannten und löst die Gleichungen nach ihnen auf, so stellen sich die Werthe derselben als Brüche dar, mit gleichen Nennern. Dieser gemeinschaftliche Nenner,

der mit dem Namen der Determinante der Functionen f_1, f_2, f_3 bezeichnet zu werden pflegt, und welcher in dem vorliegenden Falle in Rücksicht auf die in ihm enthaltenen Variabeln vom dritten Grade ist, soll von jetzt an mit dem Zeichen φ bezeichnet werden, unter welchem Zeichen bis dahin eine beliebige Function vom dritten Grade zwischen den Variabeln x_1, x_2, x_3 verstanden wurde. Dieses vorausgesetzt, ist:

$$28. \quad \varphi = u_1^{(1)}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + u_2^{(1)}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + u_3^{(1)}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(3)}u_2^{(2)}\},$$

und wenn man auf die angegebene Art die Gleichungen (27) auflöst, so erhält man:

$$29. \begin{cases} x_1\varphi = 2f_1\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + 2f_2\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + 2f_3\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(3)}u_2^{(2)}\}, \\ x_2\varphi = 2f_1\{u_2^{(3)}u_3^{(1)} - u_2^{(1)}u_3^{(3)}\} + 2f_2\{u_3^{(3)}u_1^{(1)} - u_3^{(1)}u_1^{(3)}\} + 2f_3\{u_1^{(3)}u_2^{(1)} - u_1^{(1)}u_2^{(3)}\}, \\ x_3\varphi = 2f_1\{u_2^{(1)}u_3^{(2)} - u_2^{(2)}u_3^{(1)}\} + 2f_2\{u_3^{(1)}u_1^{(2)} - u_3^{(2)}u_1^{(1)}\} + 2f_3\{u_1^{(1)}u_2^{(2)} - u_1^{(2)}u_2^{(1)}\}; \end{cases}$$

woraus folgt:

Lehrsatz 2.

Wenn drei homogene Functionen zweiten Grades von drei Variabeln für ein System von Werthen dieser Variabeln verschwinden, so verschwindet auch die Determinante dieser Functionen für dasselbe System von Werthen.

Dieser Lehrsatz gilt nicht allein für drei homogene Functionen vom zweiten Grade von drei Variabeln, sondern auch für eine beliebige Zahl von homogenen Functionen irgend welcher Grade mit einer gleichen Zahl Variabeln.

Durch partielle Differentiation der ersten Gleichung (29) nach den Variabeln x_1 oder x_2 erhält man, wenn man der Kürze wegen durch φ_λ die Differentiation der Determinante φ, nach x_λ genommen, andeutet:

$$x_1\varphi_1 + \varphi =$$
$$2\,[u_1^{(1)}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + u_2^{(1)}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + u_3^{(1)}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(3)}u_2^{(2)}\}]$$
$$+ 2f_1\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + 2f_2\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + 2f_3\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(3)}u_2^{(2)}\},$$

$$x_1\varphi_2 =$$
$$2\,[u_1^{(2)}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + u_2^{(2)}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + u_3^{(2)}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(3)}u_2^{(2)}\}]$$
$$+ 2f_1\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + 2f_2\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + 2f_3\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(3)}u_2^{(2)}\}.$$

Es ist leicht zu bemerken, dass in der ersten Gleichung der erste Theil rechts vom Gleichheitszeichen nach (28) gleich $2\,\varphi$ ist, und dass

in der zweiten Gleichung der entsprechende Theil von selbst verschwindet. Berücksichtigt man dieses, so stellen sich die differenziirten Gleichungen (29) wie folgt dar:

$$
30.\quad \left\{
\begin{aligned}
x_1\varphi_1-\varphi &= 2f_1\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)}-u_2^{(3)}u_3^{(2)}\}+2f_2\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)}-u_3^{(3)}u_1^{(2)}\}\\
&\quad +2f_3\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)}-u_1^{(3)}u_2^{(2)}\},\\
x_1\varphi_2 &= 2f_1\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)}-u_2^{(3)}u_3^{(2)}\}+2f_2\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)}-u_3^{(3)}u_1^{(2)}\}\\
&\quad +2f_3\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)}-u_1^{(3)}u_2^{(2)}\},\\
x_1\varphi_3 &= 2f_1\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)}-u_2^{(3)}u_3^{(2)}\}+2f_2\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)}-u_3^{(3)}u_1^{(2)}\}\\
&\quad +2f_3\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)}-u_1^{(3)}u_2^{(2)}\},\\
x_2\varphi_1 &= 2f_1\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_2^{(3)}u_3^{(1)}-u_2^{(1)}u_3^{(3)}\}+2f_2\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_3^{(3)}u_1^{(1)}-u_3^{(1)}u_1^{(3)}\}\\
&\quad +2f_3\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_1^{(3)}u_2^{(1)}-u_1^{(1)}u_2^{(3)}\},\\
x_2\varphi_2-\varphi &= 2f_1\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_2^{(3)}u_3^{(1)}-u_2^{(1)}u_3^{(3)}\}+2f_2\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_3^{(3)}u_1^{(1)}-u_3^{(1)}u_1^{(3)}\}\\
&\quad +2f_3\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_1^{(3)}u_2^{(1)}-u_1^{(1)}u_2^{(3)}\},\\
x_2\varphi_3 &= 2f_1\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_2^{(3)}u_3^{(1)}-u_2^{(1)}u_3^{(3)}\}+2f_2\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_3^{(3)}u_1^{(1)}-u_3^{(1)}u_1^{(3)}\}\\
&\quad +2f_3\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_1^{(3)}u_2^{(1)}-u_1^{(1)}u_2^{(3)}\},\\
x_3\varphi_1 &= 2f_1\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_2^{(1)}u_3^{(2)}-u_2^{(2)}u_3^{(1)}\}+2f_2\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_3^{(1)}u_1^{(2)}-u_3^{(2)}u_1^{(1)}\}\\
&\quad +2f_3\frac{\partial}{\partial x_1}\{u_1^{(1)}u_2^{(2)}-u_1^{(2)}u_2^{(1)}\},\\
x_3\varphi_2 &= 2f_1\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_2^{(1)}u_3^{(2)}-u_2^{(2)}u_3^{(1)}\}+2f_2\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_3^{(1)}u_1^{(2)}-u_3^{(2)}u_1^{(1)}\}\\
&\quad +2f_3\frac{\partial}{\partial x_2}\{u_1^{(1)}u_2^{(2)}-u_1^{(2)}u_2^{(1)}\},\\
x_3\varphi_3-\varphi &= 2f_1\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_2^{(1)}u_3^{(2)}-u_2^{(2)}u_3^{(1)}\}+2f_2\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_3^{(1)}u_1^{(2)}-u_3^{(2)}u_1^{(1)}\}\\
&\quad +2f_3\frac{\partial}{\partial x_3}\{u_1^{(1)}u_2^{(2)}-u_1^{(2)}u_2^{(1)}\}.
\end{aligned}\right.
$$

Diese Gleichungen geben folgenden

Lehrsatz 3.

Wenn drei homogene Functionen zweiten Grades von drei Variabeln für ein System von Werthen dieser Variabeln verschwinden, so verschwinden auch die partiellen Differentialquotienten der Determinante dieser Functionen, nach den Variabeln genommen, für dasselbe System von Werthen.

Dieser Lehrsatz gilt allgemein für eine beliebige Zahl homogener Functionen mit einer gleichen Zahl von Variabeln, wenn die Functionen sämmtlich von einem und demselben Grade sind.

12.

Die Coëfficienten der Entwicklung der Determinante φ nach den Potenzen und Producten der Variabeln wollen wir mit $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in der Art bezeichnen, wie es in (19) geschehen ist. Dieses vorausgesetzt, so ist die Bemerkung zu machen, *dass φ in R übergeht, wenn man φ nach Potenzen und Producten der Variabeln entwickelt und für jedes Product $x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu$ der Entwicklung $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$* setzt. Dieses lehrt die Gleichung (25). Zweitens bemerke man, *dass, wenn man irgend eine der Functionen f_1, f_2, f_3, mit einer der Variabeln x_1, x_2, x_3 multiplicirt, nach Potenzen und Producten der Variabeln entwickelt, und $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für jedes Product $x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu$ setzt, der dadurch erhaltene Ausdruck verschwindet.* Dieses ergiebt sich aus der Ansicht der Gleichungen (26).

Entwickelt man nun die identischen Gleichungen (30) nach Potenzen und Producten der Variabeln und setzt für jedes Product $x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu$ das entsprechende $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$, so verschwinden, nach der zweiten Bemerkung, die Glieder rechts von den Gleichheitszeichen und man erhält:

$$31.\quad \begin{cases} \frac{1}{3}R = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}\, b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}\, b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = p_{\varkappa,\lambda,1}\, b_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}\, b_{\varkappa,\lambda,1}; & \frac{1}{3}R = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}\, b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = p_{\varkappa,\lambda,2}\, b_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}\, b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}\, b_{\varkappa,\lambda,2}; & \frac{1}{3}R = p_{\varkappa,\lambda,3}\, b_{\varkappa,\lambda,3}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen beweisen, *dass die Ausdrücke φ; $x_1\,\varphi_1$; $x_2\,\varphi_2$; $x_3\,\varphi_3$ in R übergehen, wenn man nach Potenzen und Producten der Variabeln entwickelt und für jedes Product $x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu$ der Entwicklung $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ setzt*; *und dass die sechs Ausdrücke $x_2\,\varphi_1$, $x_3\,\varphi_1$, $x_3\,\varphi_2$, $x_1\,\varphi_2$, $x_1\,\varphi_3$ und $x_2\,\varphi_3$ durch dieselbe Operation verschwinden.*

Von diesen Gleichungen, sowie von den Gleichungen (26) wird im Folgenden häufig Gebrauch gemacht werden.

13.

Es sind durch f_1, f_2, f_3, φ_1, φ_2, φ_3 im Vorhergehenden folgende Ausdrücke bezeichnet worden:

$$32.\begin{cases} f_1 = a^{(1)}_{1,1}x_1x_1 + a^{(1)}_{2,2}x_2x_2 + a^{(1)}_{3,3}x_3x_3 + 2\,a^{(1)}_{2,3}x_2x_3 + 2\,a^{(1)}_{3,1}x_3x_1 + 2\,a^{(1)}_{1,2}x_1x_2, \\ f_2 = a^{(2)}_{1,1}x_1x_1 + a^{(2)}_{2,2}x_2x_2 + a^{(2)}_{3,3}x_3x_3 + 2\,a^{(2)}_{2,3}x_2x_3 + 2\,a^{(2)}_{3,1}x_3x_1 + 2\,a^{(2)}_{1,2}x_1x_2, \\ f_3 = a^{(3)}_{1,1}x_1x_1 + a^{(3)}_{2,2}x_2x_2 + a^{(3)}_{3,3}x_3x_3 + 2\,a^{(3)}_{2,3}x_2x_3 + 2\,a^{(3)}_{3,1}x_3x_1 + 2\,a^{(3)}_{1,2}x_1x_2, \\ \frac{1}{3}\varphi_1 = b_{1,1,1}x_1x_1 + b_{2,2,1}x_2x_2 + b_{3,3,1}x_3x_3 + 2b_{2,3,1}x_2x_3 + 2b_{3,1,1}x_3x_1 + 2b_{1,2,1}x_1x_2, \\ \frac{1}{3}\varphi_2 = b_{1,1,2}x_1x_1 + b_{2,2,2}x_2x_2 + b_{3,3,2}x_3x_3 + 2b_{2,3,2}x_2x_3 + 2b_{3,1,2}x_3x_1 + 2b_{1,2,2}x_1x_2, \\ \frac{1}{3}\varphi_3 = b_{1,1,3}x_1x_1 + b_{2,2,3}x_2x_2 + b_{3,3,3}x_3x_3 + 2b_{2,3,3}x_2x_3 + 2b_{3,1,3}x_3x_1 + 2b_{1,2,3}x_1x_2. \end{cases}$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen die sechs Producte x_1x_1, x_2x_2, ... x_1x_2 als sechs Unbekannte, so erhält man durch Auflösung der Gleichungen nach diesen Unbekannten:

$$33.\begin{cases} R\,x_1x_1 = q^{(1)}_{1,1}f_1 + q^{(2)}_{1,1}f_2 + q^{(3)}_{1,1}f_3 + p_{1,1,1}\varphi_1 + p_{1,1,2}\varphi_2 + p_{1,1,3}\varphi_3, \\ R\,x_2x_2 = q^{(1)}_{2,2}f_1 + q^{(2)}_{2,2}f_2 + q^{(3)}_{2,2}f_3 + p_{2,2,1}\varphi_1 + p_{2,2,2}\varphi_2 + p_{2,2,3}\varphi_3, \\ R\,x_3x_3 = q^{(1)}_{3,3}f_1 + q^{(2)}_{3,3}f_2 + q^{(3)}_{3,3}f_3 + p_{3,3,1}\varphi_1 + p_{3,3,2}\varphi_2 + p_{3,3,3}\varphi_3, \\ R\,x_2x_3 = q^{(1)}_{2,3}f_1 + q^{(2)}_{2,3}f_2 + q^{(3)}_{2,3}f_3 + p_{2,3,1}\varphi_1 + p_{2,3,2}\varphi_2 + p_{2,3,3}\varphi_3, \\ R\,x_3x_1 = q^{(1)}_{3,1}f_1 + q^{(2)}_{3,1}f_2 + q^{(3)}_{3,1}f_3 + p_{3,1,1}\varphi_1 + p_{3,1,2}\varphi_2 + p_{3,1,3}\varphi_3, \\ R\,x_1x_2 = q^{(1)}_{1,2}f_1 + q^{(2)}_{1,2}f_2 + q^{(3)}_{1,2}f_3 + p_{1,2,1}\varphi_1 + p_{1,2,2}\varphi_2 + p_{1,2,3}\varphi_3, \end{cases}$$

Denn setzt man die Werthe der Unbekannten aus (33) in (32), so erhält man durch Gleichsetzung der Coëfficienten von φ_1, φ_2, φ_3 die Gleichungen (26) und (31), und durch Gleichsetzung der Coëfficienten von f_1, f_2, f_3 auf beiden Seiten der Gleichungen folgende Gleichungen

$$34.\begin{cases} R = \Sigma\, q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\cdot a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma\, q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\cdot a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma\, q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\cdot a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \\ 0 = \Sigma\, q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\cdot a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; & R = \Sigma\, q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\cdot a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma\, q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\cdot a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \\ 0 = \Sigma\, q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\cdot a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma\, q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\cdot a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; & R = \Sigma\, q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\cdot a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \end{cases}$$

$$35.\begin{cases} 0 = \Sigma\, q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\, b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma\, q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\, b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma\, q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\, b_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma\, q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\, b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma\, q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\, b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma\, q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\, b_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma\, q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\, b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma\, q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\, b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma\, q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\, b_{\varkappa,\lambda,3}. \end{cases}$$

Diese beiden Systeme Gleichungen dienen zur Bestimmung der achtzehn Coëfficienten q. Was die Coëfficienten p der Gleichungen (33) be-

trifft, so beträgt die Zahl der von einander verschiedenen nur zehn; wegen welchen Umstandes eben die Gleichungen (32) und ihre Auflösungen (33) merkwürdig sind.

14.

Nimmt man an, dass für ein System Werthe der Variabeln $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ die Functionen f_1, f_2, f_3 verschwinden, so folgt aus dem Lehrsatze 3, dass für dasselbe System Werthe auch φ_1, φ_2, φ_3 verschwinden, und aus (33), dass R verschwindet. Es ist demnach $R = 0$ das Resultat der Elimination der Variabeln aus den drei Gleichungen $f_1(x, y, 1) = 0$, $f_2(x, y, 1) = 0$, $f_3(x, y, 1) = 0$. Da aber R die Determinante der Coëfficienten der sechs Producte $x_1 x_1, x_2 x_2, \ldots . x_1 x_2$ in den Gleichungen (32), also in Rücksicht auf alle Coefficienten homogen und vom sechsten Grade, in Rücksicht auf die Coëfficienten in den einzelnen Gleichungen aber lineär ist: so wird man, wenn man für die Coëfficienten b ihre Werthe setzt, welche in Rücksicht auf die Coëfficienten der drei ersten Gleichungen Ausdrücke vom dritten Grade und in Rücksicht auf die Coëfficienten jeder einzelnen dieser Gleichungen lineäre Ausdrücke sind, die Gleichung $R = 0$ in Rücksicht auf die Coëfficienten der drei Gleichungen $f_1(x, y, 1) = 0$, $f_2(x, y, 1) = 0$, $f_3(x, y, 1) = 0$ homogen und vom zwölften Grade, und in Rücksicht auf die Coëfficienten jeder einzelnen Gleichung vom vierten Grade finden. Die angegebenen Eigenschaften der Determinante R und der Gleichung $R = 0$ ergeben sich ebenfalls aus der Zusammensetzung der Determinante aus den Coëfficienten der Grössen p in den Gleichungen (25) und (26). Dieses sind aber nach Lehrsatz 1 die Kriterien für die Endgleichung, welche aus der Elimination der Variabeln aus den genannten drei Gleichungen hervorgeht. Demnach lässt sich die angedeutete Eliminationsmethode in Form eines Lehrsatzes wie folgt ausdrücken:

Lehrsatz 4.

Wenn drei Gleichungen vom zweiten Grade $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ zwischen den Variabeln x, y gegeben sind, so erhält man die aus der Elimination dieser Variabeln hervorgehende Endgleichung, wenn man die Determinante φ der Functionen

$$x_3\,x_3\,f_1\left(\frac{x_1}{x_3},\,\frac{x_2}{x_3}\right),\qquad x_3\,x_3\,f_2\left(\frac{x_1}{x_3},\,\frac{x_2}{x_3}\right),\qquad x_3\,x_3\,f_3\left(\frac{x_1}{x_3},\,\frac{x_2}{x_3}\right)$$

zusammenstellt und aus den sechs Gleichungen

$$x_3\,x_3\,f_1\left(\frac{x_1}{x_3},\,\frac{x_2}{x_3}\right)=0,\quad x_3\,x_3\,f_2\left(\frac{x_1}{x_3},\,\frac{x_2}{x_3}\right)=0,\quad x_3\,x_3\,f_3\left(\frac{x_1}{x_3},\,\frac{x_2}{x_3}\right)=0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=0,\qquad\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0,\qquad\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=0$$

die sechs Producte $x_1\,x_1$, $x_2\,x_2$, ... $x_1\,x_2$ *eliminirt, wie wenn sie die Unbekannten wären.*

Da die genannten Producte in die sechs Gleichungen nur lineär eingehen, so ist durch den vorhergehenden Lehrsatz die Elimination der Variabeln aus drei Gleichungen vom zweiten Grade auf die Elimination der Unbekannten aus lineären Gleichungen, oder, was dasselbe ist, auf die Bildung der aus den Coëfficienten lineärer Gleichungen zusammengesetzten Determinante zurückgeführt.

15.

Bisher bedeuteten die Zeichen f_1, f_2, f_3 ganz beliebige homogene Functionen zweiten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3, und φ die Determinante jener Functionen. Von nun an sollen mit denselben Zeichen die partiellen Differentialquotienten von der homogenen Function

$$f=\Sigma\,a_{\varkappa,\lambda,\mu}\,x_\varkappa\,x_\lambda\,x_\mu$$

dritten Grades, nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 genommen, und mit φ die Determinante jener partiellen Differentialquotienten bezeichnet werden; welche Determinante wir der Kürze wegen die *Determinante der Function f* nennen wollen. Dieses vorausgesetzt, so gelten die in den vorhergehenden Nummern entwickelten Gleichungen, wenn man überall $3\,a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ statt $a^{(\mu)}_{\varkappa,\lambda}$ setzt, wodurch das System (32) übergeht in 32*:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}\,f_1 &= a_{1,1,1}\,x_1x_1+a_{2,2,1}\,x_2x_2+a_{3,3,1}\,x_3x_3+2\,a_{2,3,1}\,x_2x_3+2\,a_{3,1,1}\,x_3x_1+2\,a_{1,2,1}\,x_1x_2,\\
\tfrac{1}{3}\,f_2 &= a_{1,1,2}\,x_1x_1+a_{2,2,2}\,x_2x_2+a_{3,3,2}\,x_3x_3+2\,a_{2,3,2}\,x_2x_3+2\,a_{3,1,2}\,x_3x_1+2\,a_{1,2,2}\,x_1x_2,\\
\tfrac{1}{3}\,f_3 &= a_{1,1,3}\,x_1x_1+a_{2,2,3}\,x_2x_2+a_{3,3,3}\,x_3x_3+2\,a_{2,3,3}\,x_2x_3+2\,a_{3,1,3}\,x_3x_1+2\,a_{1,2,3}\,x_1x_2,\\
\tfrac{1}{3}\,\varphi_1 &= b_{1,1,1}\,x_1x_1+b_{2,2,1}\,x_2x_2+b_{3,3,1}\,x_3x_3+2\,b_{2,3,1}\,x_2x_3+2\,b_{3,1,1}\,x_3x_1+2\,b_{1,2,1}\,x_1x_2,\\
\tfrac{1}{3}\,\varphi_2 &= b_{1,1,2}\,x_1x_1+b_{2,2,2}\,x_2x_2+b_{3,3,2}\,x_3x_3+2\,b_{2,3,2}\,x_2x_3+2\,b_{3,1,2}\,x_3x_1+2\,b_{1,2,2}\,x_1x_2,\\
\tfrac{1}{3}\,\varphi_3 &= b_{1,1,3}\,x_1x_1+b_{2,2,3}\,x_2x_2+b_{3,3,3}\,x_3x_3+2\,b_{2,3,3}\,x_2x_3+2\,b_{3,1,3}\,x_3x_1+2\,b_{1,2,3}\,x_1x_2.
\end{aligned}$$

Löst man dieses in Rücksicht auf die sechs Producte $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, ... $x_1 x_2$ lineäre System von Gleichungen nach diesen Producten auf, als ob sie die Unbekannten wären, so erhält man die Gleichungen (33). Zur Bestimmung von R und der achtzehn Grössen q, welche letztere enthalten, dienen dann die Gleichungen (35) und folgende:

$$34.^* \begin{cases} \frac{1}{3} R = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda,1}; & \frac{1}{3} R = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda,2}; & \frac{1}{3} R = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\, a_{\varkappa,\lambda,3}. \end{cases}$$

Zwischen den zehn Grössen p und R hat man die Relationen (31) und

$$26.^* \begin{cases} 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}\, a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}\, a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}\, a_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}\, a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}\, a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}\, a_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}\, a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}\, a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}\, a_{\varkappa,\lambda,3}. \end{cases}$$

Nachdem man die Werthe von R und der zehn Grössen p gefunden, kann man sich die Aufgabe stellen: Die Werthe der Grössen b zu bestimmen, welche nur den Gleichungen (31) genügen. Da die Zahl der zu bestimmenden Grössen b gleich zehn, dagegen die Zahl der bestimmenden Gleichungen neun ist, so werden die gesuchten Grössen sämmtlich eine willkürliche Constante erhalten. Bezeichnet man diese willkürliche Constante mit m, so wird der allgemeine Ausdruck der gesuchten Grössen, welcher, für $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in (31) gesetzt, diesen Gleichungen genügt,

$$b_{\varkappa,\lambda,\mu} + m\, a_{\varkappa,\lambda,\mu}$$

sein; was aus (26) und (31) erhellt. Hieraus folgt: *dass jede homogene Function* $\psi = \Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}\, x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu$ *dritten Grades von den Variabeln* x_1, x_2, x_3, *deren Coëfficienten c statt b in die Gleichungen* (31) *gesetzt diesen Gleichungen genügen, von der Form* $\psi = \varphi + mf$ *oder, wenn man in der Gleichung* (31) *R eine beliebige Grösse bedeuten lässt, von der Form* $\psi = mf + n\varphi$ *ist.* In der folgenden Nummer soll nachgewiesen werden, dass die Determinante der Determinante von der Function f diese Eigenschaft hat.

16.

Wenn man der Kürze wegen durch $v^{(\lambda)}_\varkappa$ den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\varkappa\, \partial x_\lambda}$ zweiter Ordnung bezeichnet, so ist:

$$36. \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial x_1}(v_2^{(2)} v_3^{(3)} - v_2^{(3)} v_3^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_3^{(2)} v_1^{(3)} - v_3^{(3)} v_1^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(v_1^{(2)} v_2^{(3)} - v_1^{(3)} v_2^{(2)}), \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_1}(v_2^{(3)} v_3^{(1)} - v_2^{(1)} v_3^{(3)}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_3^{(3)} v_1^{(1)} - v_3^{(1)} v_1^{(3)}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(v_1^{(3)} v_2^{(1)} - v_1^{(1)} v_2^{(3)}), \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x_1}(v_2^{(1)} v_3^{(2)} - v_2^{(2)} v_3^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_3^{(1)} v_1^{(2)} - v_3^{(2)} v_1^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(v_1^{(1)} v_2^{(2)} - v_1^{(2)} v_2^{(1)}). \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten auch allgemein für jede beliebige homogene Function φ dritter Ordnung von drei Variabeln. Aus diesen identischen Gleichungen geht ein System von neun Gleichungen durch Differentiation nach den drei Variabeln hervor, welches in der vorliegenden Untersuchung eine Anwendung finden wird.

Bezeichnet man ferner mit $\psi = \Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ die Determinante der partiellen Differentialquotienten der Function φ, welche kürzer *die Determinante der Function* φ oder *die Determinante der Determinante der Function* f genannt wird; so ist klar, dass, wenn man statt der Grössen a die entsprechenden Grössen b setzt, dadurch f in φ, φ in ψ, $f_\varkappa$ in $\varphi_\varkappa$, $\varphi_\varkappa$ in $\psi_\varkappa$ und $u_\varkappa^{(\lambda)}$, welches $= \frac{\partial^2 f}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda}$ ist, in $v_\varkappa^{(\lambda)}$ übergeht. Macht man diese Aenderung in den Gleichungen (30), entwickelt hierauf beide Seiten der Gleichungen nach Potenzen und Producten der Variabeln und setzt für jedes Product $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ der Entwicklung $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$, so verschwinden, weil dadurch die Ausdrucke $x_1 \varphi_1$, $x_2 \varphi_2$, $x_3 \varphi_3$ den Werth R und $x_2 \varphi_1$, $x_3 \varphi_1$, $x_3 \varphi_2$, $x_1 \varphi_2$, $x_1 \varphi_3$, $x_2 \varphi_3$ den Werth 0 annehmen, mit Rücksicht auf die durch Differentiation der Gleichungen (36) abgeleiteten Gleichungen die Theile rechterhand der sämmtlichen Gleichungen, und man erhält:

$$37. \quad \begin{cases} \frac{1}{3} P = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} c_{\varkappa,\lambda,1}, & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} c_{\varkappa,\lambda,2}, & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} c_{\varkappa,\lambda,3}, \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} c_{\varkappa,\lambda,1}, & \frac{1}{3} P = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} c_{\varkappa,\lambda,2}, & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} c_{\varkappa,\lambda,3}, \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} c_{\varkappa,\lambda,1}, & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} c_{\varkappa,\lambda,2}, & \frac{1}{3} P = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} c_{\varkappa,\lambda,3}, \end{cases}$$

$$P = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu} c_{\varkappa,\lambda,\mu}.$$

Diese Gleichungen beweisen, dass die Gleichungen (31) erfüllt werden, wenn man c statt b setzt und statt R eine bestimmte andere Grösse P; woraus denn nach der obigen Bemerkung folgt:

$$38. \qquad c_{\varkappa,\lambda,\mu} = m a_{\varkappa,\lambda,\mu} + n b_{\varkappa,\lambda,\mu},$$

und dass die Determinante ψ der Function φ von der Form

$$39. \qquad \psi = m f + n \varphi$$

ist; was sich auf folgende Art ausdrücken lässt:

Lehrsatz 5.

Die Determinante der Determinante einer gegebenen homogenen Function dritten Grades von drei Variabeln ist gleich der Summe der gegebenen Function und ihrer Determinante, jede mit einem passenden constanten Factor multiplicirt.

Es ist noch zu bemerken, dass

$$P = nR \tag{40.}$$

ist; welche Gleichung man erhält, wenn man die Werthe von $c_{\varkappa,\lambda,\mu}$ aus (38) in (37) setzt und die Gleichungen (26*) und (31) zu Hülfe nimmt.

17.

Nimmt man an, dass die Grössen $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und R in S übergehen, wenn man für die Grössen a die entsprechenden Grössen b setzt, so gehen die Gleichungen (26*) in

$$41. \quad \begin{cases} 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}\, b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}\, b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}\, b_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}\, b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}\, b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}\, b_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}\, b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}\, b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}\, b_{\varkappa,\lambda,3} \end{cases}$$

über und man erhält aus (31):

$$42. \quad \begin{cases} \tfrac{1}{3} S = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}\, c_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}\, c_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}\, c_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}\, c_{\varkappa,\lambda,1}; & \tfrac{1}{3} S = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}\, c_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}\, c_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}\, c_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}\, c_{\varkappa,\lambda,2}; & \tfrac{1}{3} S = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}\, c_{\varkappa,\lambda,3}. \end{cases}$$

Durch Substitution der Werthe von $c_{\varkappa,\lambda,\mu}$ aus (38) in diesen Gleichungen erhält man, mit Rücksicht auf (41):

$$43. \quad \begin{cases} \tfrac{1}{3} \varrho R = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}\, a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}\, a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}\, a_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}\, a_{\varkappa,\lambda,1}; & \tfrac{1}{3} \varrho R = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}\, a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}\, a_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}\, a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}\, a_{\varkappa,\lambda,2}; & \tfrac{1}{3} \varrho R = \Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}\, a_{\varkappa,\lambda,3}; \end{cases}$$

$$m \varrho R = S. \tag{44.}$$

Aus den Gleichungen (41) ist ersichtlich, *dass, wenn man die Function φ, oder die Producte einer der Functionen φ_1, φ_2, φ_3 und einer der Variabeln x_1, x_2, x_3, nach Potenzen und Producten der Variabeln entwickelt und $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für jedes Product $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ setzt, die dadurch entstehenden Ausdrücke verschwinden.*

Ebenso geht aus den Gleichungen (43) hervor, *dass die nach Potenzen und Producten der Variabeln entwickelten Ausdrücke* f, $x_1 f_1$, $x_2 f_2$, $x_3 f_3$ *den Werth* ϱR *annehmen, wenn man* $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *für* $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ *setzt, und dass auf gleiche Weise die sechs Ausdrücke* $x_2\varphi_1$, $x_3\varphi_1$, $x_3\varphi_2$, $x_1\varphi_2$, $x_1\varphi_3$, $x_2\varphi_3$ *verschwinden.*

Auf gleiche Weise, wie die Systeme (35) und (34*) die Grössen $q^{(\mu)}_{\varkappa,\lambda}$ bestimmen, ergeben sich aus (41) und (43) die Grössen der Werthe $\frac{1}{\varrho}\, q_{\varkappa,\lambda,\mu}$. Mit andern Worten: die beiden letzten Systeme erhält man aus den beiden ersten, wenn man $\frac{1}{\varrho}\cdot q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $q^{(\mu)}_{\varkappa,\lambda}$ setzt, woraus

$$45. \qquad q^{(\mu)}_{\varkappa,\lambda} = \frac{1}{\varrho}\cdot q_{\varkappa,\lambda,\mu}$$

folgt. Setzt man diese Werthe von $q^{(\mu)}_{\varkappa,\lambda}$ in (33), so erhält man

$$33.^* \left\{\begin{aligned}
R x_1 x_1 &= \frac{1}{\varrho}\, q_{1,1,1} f_1 + \frac{1}{\varrho}\, q_{1,1,2} f_2 + \frac{1}{\varrho}\, q_{1,1,3} f_3 + p_{1,1,1}\varphi_1 + p_{1,1,2}\varphi_2 + p_{1,1,3}\varphi_3,\\
R x_2 x_2 &= \frac{1}{\varrho}\, q_{2,2,1} f_1 + \frac{1}{\varrho}\, q_{2,2,2} f_2 + \frac{1}{\varrho}\, q_{2,2,3} f_3 + p_{2,2,1}\varphi_1 + p_{2,2,2}\varphi_2 + p_{2,2,3}\varphi_3,\\
R x_3 x_3 &= \frac{1}{\varrho}\, q_{3,3,1} f_1 + \frac{1}{\varrho}\, q_{3,3,2} f_2 + \frac{1}{\varrho}\, q_{3,3,3} f_3 + p_{3,3,1}\varphi_1 + p_{3,3,2}\varphi_2 + p_{3,3,3}\varphi_3,\\
R x_2 x_3 &= \frac{1}{\varrho}\, q_{2,3,1} f_1 + \frac{1}{\varrho}\, q_{2,3,2} f_2 + \frac{1}{\varrho}\, q_{2,3,3} f_3 + p_{2,3,1}\varphi_1 + p_{2,3,2}\varphi_2 + p_{2,3,3}\varphi_3,\\
R x_3 x_1 &= \frac{1}{\varrho}\, q_{3,1,1} f_1 + \frac{1}{\varrho}\, q_{3,1,2} f_2 + \frac{1}{\varrho}\, q_{3,1,3} f_3 + p_{3,1,1}\varphi_1 + p_{3,1,2}\varphi_2 + p_{3,1,3}\varphi_3,\\
R x_1 x_2 &= \frac{1}{\varrho}\, q_{1,2,1} f_1 + \frac{1}{\varrho}\, q_{1,2,2} f_2 + \frac{1}{\varrho}\, q_{1,2,3} f_3 + p_{1,2,1}\varphi_1 + p_{1,2,2}\varphi_2 + p_{1,2,3}\varphi_3.
\end{aligned}\right.$$

Wenn man also in dem Systeme (32*) *die sechs Producte* $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, ... $x_1 x_2$ *als die Unbekannten betrachtet, so erhält man durch Auflösung der Gleichungen nach diesen Unbekannten die Gleichungen* (33*). Das Merkwürdige an diesen Gleichungen besteht vorzüglich darin, dass, während die einen nur zwanzig verschiedene Coëfficienten a und b enthalten, die andern ebenfalls nur zwanzig verschiedene Coëfficienten p und $\frac{1}{\varrho}\cdot q$ haben.

Wenn man in den Gleichungen (41) und (43), durch welche die Grössen $\frac{1}{\varrho}\, q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ vollständig bestimmt sind, für $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ die Grössen $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ setzt, wodurch gleichzeitig $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $m a_{\varkappa,\lambda,\mu} + n b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und R in $S = m\varrho R$

übergehen, so werden die so geänderten Gleichungen erfüllt, wenn man $\frac{1}{\varrho} q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $m\varrho p_{\varkappa,\lambda,\mu} - n q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ verändert. Dieses beweist, dass durch die Veränderung von $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $\frac{1}{\varrho} q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $m\varrho p_{\varkappa,\lambda,\mu} - n q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ übergeht.

Es bedeutet $\frac{R}{3^6}$ die aus den Coëfficienten der sechs Potenzen und Producte der Variabeln in Gleichungen (32*) gebildete Determinante. Diese geht in $\frac{S}{3^6}$ über, wenn man in ihr $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und $m a_{\varkappa,\lambda,\mu} + n b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ setzt. Aendert man daher die Coëfficienten in (32*) auf die angegebene Art, und bildet hierauf aus den geänderten Coëfficienten die Determinante, so erhält man ebenfalls $\frac{S}{3^6}$. Dieselbe Grösse erhält man aber auch, wenn man $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $m a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ übergehen lässt und aus den so geänderten Coëfficienten die Determinante bildet. Diese wird aber $= -\frac{m^3 R}{3^6}$. Mithin ist $S = -m^3 R$; welcher Werth, in (44) gesetzt,

46. $$\varrho = -m^2$$

giebt. Hieraus folgt nun, mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen:

Wenn $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *in* $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *übergeht, so geht gleichzeitig* $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *in* $m a_{\varkappa,\lambda,\mu} + n b_{\varkappa,\lambda,\mu}$, f *in* φ, $f_\varkappa$ *in* $\varphi_\varkappa$, φ *in* $mf + n\varphi$, $\varphi_\varkappa$ *in* $mf_\varkappa + n\varphi_\varkappa$, $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *in* $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $\frac{1}{\varrho} q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *oder* $-\frac{1}{m^2} q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *in* $-m^3 p_{\varkappa,\lambda,\mu} - n q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ *und* R *in* $-m^3 R$ *über.*

18.

Wenn man eine Function F aus einer gegebenen homogenen Function f vom dritten Grade von den Variabeln x_1, x_2, x_3 und ihrer Determinante φ wie folgt zusammensetzt:

47. $$F = d.f + \delta.\varphi,$$

wo d und δ beliebige Constanten bedeuten, und nun mit F_1, F_2, F_3 die partiellen Differentialquotienten der Function F nach den Variabeln genommen bezeichnet, so erhalten die Ausdrücke F, $x_1 F_1$, $x_2 F_2$, $x_3 F_3$, wenn man sie nach Potenzen und Producten der Variabeln entwickelt und $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ setzt, die Werthe $\delta.R$; und auf gleiche Weise erhalten die Ausdrücke $x_2 F_1$, $x_3 F_1$, $x_3 F_2$, $x_1 F_2$, $x_1 F_3$, $x_2 F_3$ die Werthe 0.

Ebenso gehen die Ausdrücke F, $x_1 F_1$, $x_2 F_2$, $x_3 F_3$, wenn man sie entwickelt und $\frac{1}{\varrho} q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ setzt, in $d.R$ über, während die Ausdrücke $x_2 F_1$, $x_3 F_1$, $x_3 F_2$, $x_1 F_2$, $x_1 F_3$, $x_2 F_3$ verschwinden.

Die Determinante der Function F werde durch

$$48. \qquad \Phi = \Sigma B_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

bezeichnet; in welchem Ausdruck die Grössen $B_{\varkappa,\lambda,\mu}$ ganze homogene Functionen dritter Ordnung in Rücksicht auf die Coëfficienten in F, also ganze homogene Functionen dritter Ordnung in Rücksicht auf die Constanten d und δ sein werden. Bezeichnet man ferner mit Φ_1, Φ_2, Φ_3 die partiellen Differentialquotienten der Determinante Φ, nach den Variabeln genommen, und setzt der Kürze wegen $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda} = v_\varkappa^{(\lambda)}$, so gelten die Gleichungen (36) und (30), wenn man in den letzteren f in F, φ in Φ und u in v verändert. Entwickelt man nun die auf diese Weise veränderten Gleichungen (30) und setzt $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$, so verschwinden, mit Berücksichtigung der durch Differentiation aus (36) abgeleiteten neun Gleichungen, die rechtseitigen Theile sämmtlicher Gleichungen, und man erhält:

$$49. \quad \begin{cases} \frac{1}{3}T = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} B_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} B_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} B_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} B_{\varkappa,\lambda,1}; & \frac{1}{3}T = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} B_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} B_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} B_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} B_{\varkappa,\lambda,2}; & \frac{1}{3}T = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} B_{\varkappa,\lambda,3}; \end{cases}$$
$$T = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu} B_{\varkappa,\lambda,\mu};$$

woraus mit Rücksicht auf Nr. 15 folgt, dass die Determinante Φ von der Form

$$50. \qquad \Phi = Df + \Delta . \varphi$$

ist, wo D und Δ zu bestimmende Constanten bedeuten. Bezeichnet man mit $\Phi(p)$ und $\Phi\left(\frac{1}{\varrho} q\right)$ die Ausdrücke, in welche Φ übergeht, wenn man $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ oder $\frac{1}{\varrho} q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in der Entwicklung von Φ für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ setzt, so hat man

$$51. \qquad RD = \Phi\left(\frac{1}{\varrho} \cdot q\right); \qquad R\Delta = \Phi(p);$$

wobei zu bemerken ist, da D verschwindet, wenn δ verschwindet, dass D den Factor δ haben, oder, da sowohl $\Phi(p)$ als auch $\Phi\left(\frac{1}{\varrho}\cdot q\right)$ ganze homogene Functionen dritten Grades in Rücksicht auf d und δ sind, dass in D das mit d^3 multiplicirte Glied fehlen muss.

Das Vorhergehende lässt sich nun kurz wie folgt ausdrücken:

Lehrsatz 6.

Wenn man eine gegebene homogene Function dreier Variabeln vom dritten Grade und ihre Determinante, die erstere mit d, die andere mit δ multiplicirt und addirt, so ist die Determinante der Summe der beiden Functionen von derselben Form, nämlich gleich der Summe der gegebenen Function und ihrer Determinante, jede mit einem andern homogenen Factor dritten Grades in Rücksicht auf d und δ multiplicirt.

Mit Hülfe dieses Lehrsatzes lässt sich leicht folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe 1.

Es ist eine homogene Function dritten Grades von drei Variabeln gegeben: man soll eine andere homogene Function dritten Grades von denselben Variabeln bestimmen, deren Determinante die gegebene Function ist.

Aus dem Lehrsatz 5 folgt, dass, wenn f die gegebene Function ist, die gesuchte Function $df+\delta\varphi$ sein wird, wo d und δ aus den Gleichungen

$$D=1 \quad \text{und} \quad \Delta=0$$

zu bestimmen sind. Die Aufgabe führt also auf eine cubische Gleichung und bietet neun Auflösungen dar.

19.

Wenn man mit f eine beliebige Function der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnet, so kann man unter der Annahme folgender linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_1^{(1)}x_1+a_1^{(2)}x_2+\cdots+a_1^{(n)}x_n &= y_1,\\
a_2^{(1)}x_1+a_2^{(2)}x_2+\cdots+a_2^{(n)}x_n &= y_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n^{(1)}x_1+a_n^{(2)}x_2+\cdots+a_n^{(n)}x_n &= y_n,
\end{aligned}$$

sowohl f als $\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$ als Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \ldots. y_n$ betrachten. Die Determinanten der Function f seien φ oder φ', je nachdem man $x_1, x_2, \ldots. x_n$ oder $y_1, y_2, \ldots. y_n$ als die Variabeln betrachtet. Bezeichnet man nun die aus den Coëfficienten der Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_n$ in den angegebenen linearen Gleichungen gebildete Determinante mit r, so ist

52. $$\varphi = r^2 \varphi'.$$

Denn wenn n^2 Grössen $u_\varkappa^{(\lambda)}$ mit n^2 Grössen $a_\varkappa^{(\lambda)}$ und n^2 Grössen $w_\varkappa^{(\lambda)}$, wo $\varkappa$, λ die Zahlen 1, 2, ... n bedeuten, in der Verbindung

$$u_\varkappa^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda)} w_1^{(\varkappa)} + a_2^{(\lambda)} w_2^{(\varkappa)} + \cdots + a_n^{(\lambda)} w_n^{(\varkappa)}$$

stehen, so ist bekanntlich die aus den Grössen $u_\varkappa^{(\lambda)}$ gebildete Determinante $\Sigma \pm u_1^{(1)} u_2^{(2)} \ldots. u_n^{(n)}$ gleich dem Product zweier Determinanten, von denen die eine r aus den Grössen $a_\varkappa^{(\lambda)}$, die andere $\Sigma \pm w_1^{(1)} w_2^{(2)} \ldots. w_n^{(n)}$ aus den Grössen $w_\varkappa^{(\lambda)}$ zusammengesetzt ist. Diese Relation findet man in der Abhandlung des Herrn Professor Jacobi, „De formatione et proprietatibus determinantium" Band 22 dieses Journals[1]) S. 310 bewiesen. Ist ferner

$$w_\varkappa^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda)} v_1^{(\varkappa)} + a_2^{(\lambda)} v_2^{(\varkappa)} + \cdots + a_n^{(\lambda)} v_n^{(\varkappa)},$$

so lässt sich wiederum die Determinante $\Sigma \pm w_1^{(1)} w_2^{(2)} \ldots. w_n^{(n)}$ als das Product von r und der aus den Grössen $v_\varkappa^{(\lambda)}$ gebildeten Determinante $\Sigma \pm v_1^{(1)} v_2^{(2)} \ldots. v_n^{(n)}$ darstellen. Mithin ist

$$\Sigma \pm u_1^{(1)} u_2^{(2)} \ldots. u_n^{(n)} = r^2 \Sigma \pm v_1^{(1)} v_2^{(2)} \ldots. v_n^{(n)}.$$

Die dieser vorhergehenden beiden Gleichungen finden aber statt, wenn man die Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_n$ als Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \ldots. y_n$ betrachtet, wie sie durch die obigen n linearen Gleichungen gegeben sind, und setzt:

$$u_\varkappa^{(\lambda)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda}; \quad w_\lambda^{(\varkappa)} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}\right)}{\partial y_\lambda}; \quad v_\varkappa^{(\lambda)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_\varkappa \partial y_\lambda}.$$

Diese Werthe von $u_\varkappa^{(\lambda)}$ und $v_\varkappa^{(\lambda)}$ in die letzte Gleichung gesetzt, welche aus den beiden vorhergehenden folgt, lassen dieselbe in (52) übergehen. Dieser Gleichung wird man sich bei der Lösung der folgenden Aufgabe mit Vortheil bedienen.

[1) Journal für die reine und angewandte Mathematik].

20.

Aufgabe 2.

Eine beliebige gegebene homogene Function $f = \Sigma a_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ *dritten Grades von den Variabeln* x_1, x_2, x_3 *durch Substitutionen von der Form*

$$53. \quad \begin{cases} x_1 = x_1^{(1)} y_1 + x_1^{(2)} y_2 + x_1^{(3)} y_3, \\ x_2 = x_2^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2 + x_2^{(3)} y_3, \\ x_3 = x_3^{(1)} y_1 + x_3^{(2)} y_2 + x_3^{(3)} y_3 \end{cases}$$

in eine andere zu transformiren von der Form:

$$54. \quad f = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3.$$

Diese Aufgabe verlangt die Bestimmung von zehn Grössen: der neun Coëfficienten der Substitutionen und der Grösse π. Die zehn Gleichungen, aus welchen die genannten Unbekannten zu bestimmen sind, erhält man, wenn man die Function f der Variabeln x_1, x_2, x_3 in der Gleichung (54) vermittels der Substitutionen (53) als eine Function der Variabeln y_1, y_2, y_3 darstellt, nach Potenzen und Producten dieser Variabeln entwickelt und die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte auf beiden Seiten der entwickelten Gleichung einander gleich setzt. Dadurch bekommt man aber Gleichungen von sehr complicirter Art. Dasselbe gilt von den Gleichungen, die sich ergeben, wenn man die Substitutionen (53) nach y_1, y_2, y_3 auflöst, die Werthe von y_1, y_2, y_3 in den Theil rechts der Gleichung (53) setzt und die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln y_1, y_2, y_3 auf beiden Seiten der entwickelten Gleichung einander gleich setzt.

Eine dritte Art die Aufgabe zu behandeln ist folgende. Man bilde die Determinante φ' des Theils rechts der Gleichung (54)

$$55. \quad \varphi' = -6^3 \pi^2 (y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6^3 (1 + 2\pi^3) y_1 y_2 y_3,$$

bezeichne mit φ, wie vorhin, die Determinante von f, und mit r diejenige aus den Coëfficienten der nach y_1, y_2, y_3 aufgelösten Gleichungen (53). Alsdann gilt für den vorliegenden Fall die Gleichung (52):

$$\varphi = r^2 \varphi'.$$

Multiplicirt man die Gleichung (54) mit $6^3 \pi^2 r^2$ und addirt sie zu dieser Gleichung, so erhält man

$$6^3 . \pi^2 . r^2 . f + \varphi = 6^3 r^2 (1 + 8\pi^3) y_1 y_2 y_3,$$

welche Gleichung, wenn man der Kürze wegen

56. $$d = \frac{\pi^2}{1 + 8\pi^3}; \quad \delta = \frac{1}{6^3 r^2 (1 + 8\pi^3)}$$

setzt, in

57. $$d . f + \delta . \varphi = y_1 y_2 y_3$$

übergeht. Diese Gleichung lässt sich in Worten wie folgt ausdrücken:

Lehrsatz 7.

Eine gegebene homogene Function dritten Grades von drei Variabeln, so wie ihre Determinante, lassen sich mit solchen constanten Factoren multipliciren, dass die Summe in drei lineäre Factoren zerlegbar ist.

Ferner ist zu bemerken, dass die vorliegende Aufgabe mit folgender übereinkommt: *Eine gegebene homogene Function dritten Grades von drei Variabeln, und ihre Determinante, mit solchen Factoren zu multipliciren, dass ihre Summe in lineäre Factoren zerlegbar sei.*

Um diese constanten Factoren zu finden, bemerke man, dass sowohl der Theil links der Gleichung (57), als seine nach x_1, x_2, x_3 genommenen partiellen Differentialquotienten für die Werthe $x_1^{(\varkappa)}$, $x_2^{(\varkappa)}$, $x_3^{(\varkappa)}$ der Variabeln x_1, x_2, x_3, wo $\varkappa$ eine der Zahlen 1, 2, 3 bedeutet, verschwinden, weil der Theil rechts der Gleichung und seine nach x_1, x_2, x_3 genommenen partiellen Differentialquotienten für die nach (53) entsprechenden Werthe $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ oder $y_3 = 0$, $y_1 = 0$ oder $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ verschwinden. Man hat daher, mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen, für die Werthe $x_1 = x_1^{(\varkappa)}$, $x_2 = x_2^{(\varkappa)}$, $x_3 = x_3^{(\varkappa)}$:

58. $$d . f_1 + \delta . \varphi_1 = 0; \quad d . f_2 + \delta . \varphi_2 = 0; \quad d . f_3 + \delta . \varphi_3 = 0;$$

woraus nach Lehrsatz 3 folgt:

59. $$D . f_1 + \Delta . \varphi_1 = 0; \quad D . f_2 + \Delta . \varphi_2 = 0; \quad D . f_3 + \Delta . \varphi_3 = 0.$$

Eliminirt man endlich f_1 oder f_2 oder f_3, so erhält man zwischen d und δ die Bedingungsgleichung

60. $$D . \delta - \Delta . d = 0.$$

Diese Gleichung ist homogen in Rücksicht auf d und δ und vom vierten Grade, weil, wie sich in No. 18 zeigte, D und Δ homogen und

vom dritten Grade sind. Demnach lässt sich der Lehrsatz 7 wie folgt vervollständigen.

Lehrsatz 8.

Eine gegebene homogene Function dritten Grades von drei Variabeln und ihre Determinante lassen sich auf vier verschiedene Arten mit solchen constanten Factoren multipliciren, dass die Summe jedesmal in lineäre Factoren zerlegbar ist.

Wenn man die Elimination der Variabeln x_1, x_2, x_3 aus (58) und (59) auf die Weise ausgeführt hätte, dass man in der Entwicklung derselben nach Potenzen und Producten der Variabeln diese Potenzen und Producte als die Unbekannten eliminirte, so würde man eine homogene Gleichung vom zwölften Grade in Rücksicht auf d und δ erhalten haben; woraus man schliessen könnte, dass es nicht vier, sondern zwölf Arten der Zerlegung in lineäre Factoren gebe. Von diesen zwölf Arten fallen aber immer je drei in eine zusammen, weil die aus der genannten Elimination hervorgehende Endgleichung von der Form $(D.\delta - \Delta.d)^3 = 0$ ist; was aus dem Vorhergehenden erhellt.

Dividirt man die Gleichung (60) durch δ^4, so wird man eine Gleichung vierten Grades in Rücksicht auf die Unbekannte $\frac{d}{\delta}$ erhalten, deren Wurzeln

$$\left(\frac{d}{\delta}\right)_1, \quad \left(\frac{d}{\delta}\right)_2, \quad \left(\frac{d}{\delta}\right)_3, \quad \left(\frac{d}{\delta}\right)_4$$

sind. Diese vier Wurzeln sind zu bestimmen, wenn man die vorgelegte Aufgabe vollständig lösen will. Ist es geschehen und lässt man d und δ irgend zwei Grössen bedeuten, deren Quotient $\frac{d}{\delta}$ einer der gefundenen Wurzeln gleich ist, so bleiben noch die Gleichungen (58) aufzulösen, aus denen man die Verhältnisse der Unbekannten $x_1 : x_2 : x_3$ festzustellen hat. Es ist aber oben angedeutet worden, dass diese Gleichungen erfüllt werden, wenn man für x_1, x_2, x_3 entweder $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ oder $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ oder $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$ setzt. Man wird daher drei verschiedene Systeme von Verhältnissen der Unbekannten zu einander aus den Gleichungen (58) ziehen können, welche jenen Gleichungen genügen. Löst man aber zwei von den Gleichungen (58) auf, so ergeben sich, da sie vom zweiten Grade

sind, vier solcher Systeme, von denen eines, welches der Gleichung (58) nicht genügt, auszusondern ist. Wie die Unbequemlichkeit der Aussonderung des vierten, überflüssigen Systems durch einen eleganten Calcul vermieden werden könne, soll in dem nächstfolgenden Paragraphen auseinandergesetzt werden. Hat man nun auf irgend eine Weise die drei verschiedenen Systeme von Verhältnissen der Unbekannten gefunden, welche sämmtlichen Gleichungen (58) genügen; so wird jedes derselben einem Systeme der Verhältnisse der unbekannten Coëfficienten $x_1^{(\varkappa)}:x_2^{(\varkappa)}:x_3^{(\varkappa)}$ gleich sein. Damit die Unbekannten aber den gesuchten Coëfficienten der Substitutionen selbst gleich werden, hat man sie so zu bestimmen, dass sie noch der Gleichung

$$f = 1$$

genügen. Nachdem auf diese Weise die gesuchten Coëfficienten der Substitutionen bestimmt worden sind, bleibt noch übrig, den Werth der Grösse π in der Gleichung (54) anzugeben. Dieser ergibt sich aus der genannten Gleichung, wenn man den Theil links derselben durch die gefundenen Substitutionen als eine Function der Variabeln y_1, y_2, y_3 darstellt, den Coëfficienten von $y_1\, y_2\, y_3$ der Entwicklung heraushebt und ihn durch die Zahl 6 dividirt.

Die vorgelegte Aufgabe lässt vier wesentlich von einander verschiedene Auflösungen zu, da man auf die angegebene Art jede der vier Wurzeln der Gleichung (60) verwenden kann.

21.

Nachdem man die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (60) berechnet und zwei Grössen d und δ bestimmt hat, deren Quotient $\frac{d}{\delta}$ gleich einer jener Wurzeln ist, so bleibt noch übrig, die drei verschiedenen Verhältnisse der Unbekannten $x_1:x_2:x_3$ zu bestimmen, welche sämmtlichen Gleichungen (58) genügen. Dieses kann auf folgende Weise geschehen. Man setze die Werthe von φ_1, φ_2, φ_3 aus (58) in die Gleichungen (33*). Diese Gleichungen lassen sich, wenn man α, β, γ für Rx_1, Rx_2, Rx_3 setzt, wie folgt darstellen:

$$61.\quad\begin{cases}
\alpha x_1 = \left(\frac{1}{\varrho} q_{1,1,1} - \frac{d}{\delta} p_{1,1,1}\right) f_1 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{1,1,2} - \frac{d}{\delta} p_{1,1,2}\right) f_2 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{1,1,3} - \frac{d}{\delta} p_{1,1,3}\right) f_3,\\
\alpha x_2 = \left(\frac{1}{\varrho} q_{1,2,1} - \frac{d}{\delta} p_{1,2,1}\right) f_1 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{1,2,2} - \frac{d}{\delta} p_{1,2,2}\right) f_2 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{1,2,3} - \frac{d}{\delta} p_{1,2,3}\right) f_3,\\
\alpha x_3 = \left(\frac{1}{\varrho} q_{1,3,1} - \frac{d}{\delta} p_{1,3,1}\right) f_1 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{1,3,2} - \frac{d}{\delta} p_{1,3,2}\right) f_2 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{1,3,3} - \frac{d}{\delta} p_{1,3,3}\right) f_3,\\
\beta x_1 = \left(\frac{1}{\varrho} q_{2,1,1} - \frac{d}{\delta} p_{2,1,1}\right) f_1 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{2,1,2} - \frac{d}{\delta} p_{2,1,2}\right) f_2 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{2,1,3} - \frac{d}{\delta} p_{2,1,3}\right) f_3,\\
\beta x_2 = \left(\frac{1}{\varrho} q_{2,2,1} - \frac{d}{\delta} p_{2,2,1}\right) f_1 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{2,2,2} - \frac{d}{\delta} p_{2,2,2}\right) f_2 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{2,2,3} - \frac{d}{\delta} p_{2,2,3}\right) f_3,\\
\beta x_3 = \left(\frac{1}{\varrho} q_{2,3,1} - \frac{d}{\delta} p_{2,3,1}\right) f_1 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{2,3,2} - \frac{d}{\delta} p_{2,3,2}\right) f_2 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{2,3,3} - \frac{d}{\delta} p_{2,3,3}\right) f_3,\\
\gamma x_1 = \left(\frac{1}{\varrho} q_{3,1,1} - \frac{d}{\delta} p_{3,1,1}\right) f_1 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{3,1,2} - \frac{d}{\delta} p_{3,1,2}\right) f_2 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{3,1,3} - \frac{d}{\delta} p_{3,1,3}\right) f_3,\\
\gamma x_2 = \left(\frac{1}{\varrho} q_{3,2,1} - \frac{d}{\delta} p_{3,2,1}\right) f_1 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{3,2,2} - \frac{d}{\delta} p_{3,2,2}\right) f_2 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{3,2,3} - \frac{d}{\delta} p_{3,2,3}\right) f_3,\\
\gamma x_3 = \left(\frac{1}{\varrho} q_{3,3,1} - \frac{d}{\delta} p_{3,3,1}\right) f_1 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{3,3,2} - \frac{d}{\delta} p_{3,3,2}\right) f_2 + \left(\frac{1}{\varrho} q_{3,3,3} - \frac{d}{\delta} p_{3,3,3}\right) f_3.
\end{cases}$$

Durch Auflösung des ersten, zweiten und letzten Systems von drei Gleichungen nach f_1, f_2, f_3 erhält man:

$$62.\quad\begin{cases}
f_1 = \alpha\,(a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3),\\
f_2 = \alpha\,(a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + a_{2,3} x_3),\\
f_3 = \alpha\,(a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2 + a_{3,3} x_3),\\
f_1 = \beta\,(b_{1,1} x_1 + b_{1,2} x_2 + b_{1,3} x_3),\\
f_2 = \beta\,(b_{2,1} x_1 + b_{2,2} x_2 + b_{2,3} x_3),\\
f_3 = \beta\,(b_{3,1} x_1 + b_{3,2} x_2 + b_{3,3} x_3),\\
f_1 = \gamma\,(c_{1,1} x_1 + c_{1,2} x_2 + c_{1,3} x_3),\\
f_2 = \gamma\,(c_{2,1} x_1 + c_{2,2} x_2 + c_{2,3} x_3),\\
f_3 = \gamma\,(c_{3,1} x_1 + c_{3,2} x_2 + c_{3,3} x_3);
\end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$ und ebenso $b_{\varkappa,\lambda} = b_{\lambda,\varkappa}$ und $c_{\varkappa,\lambda} = c_{\lambda,\varkappa}$. Zieht man nun das zweite System der Gleichungen (62) von dem ersten ab, so erhält man:

$$63.\quad\begin{cases}
\left(\frac{\alpha}{\beta} a_{1,1} - b_{1,1}\right) x_1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} a_{1,2} - b_{1,2}\right) x_2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} a_{1,3} - b_{1,3}\right) x_3 = 0,\\
\left(\frac{\alpha}{\beta} a_{2,1} - b_{2,1}\right) x_1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} a_{2,2} - b_{2,2}\right) x_2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} a_{2,3} - b_{2,3}\right) x_3 = 0,\\
\left(\frac{\alpha}{\beta} a_{3,1} - b_{3,1}\right) x_1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} a_{3,2} - b_{3,2}\right) x_2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} a_{3,3} - b_{3,3}\right) x_3 = 0;
\end{cases}$$

woraus sich durch Elimination der Unbekannten x_1, x_2, x_3 eine Gleichung dritten Grades in Rücksicht auf $\frac{\alpha}{\beta}$ wie

$$64. \qquad W = 0$$

ergiebt. Die Wurzeln dieser Gleichung seien:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{(1)}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{(2)}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{(3)}.$$

Setzt man dieselben nach einander in (63) und bestimmt für jede die entsprechenden Verhältnisse der Unbekannten, so werden solche gleich den Verhältnissen der Coëfficienten $x_1^{(\varkappa)}$, $x_2^{(\varkappa)}$, $x_3^{(\varkappa)}$ der Substitutionen sein, wenn man sie aus den angegebenen Gleichungen (63) und der Gleichung $f = 1$ bestimmt.

Es ist im Vorhergehenden angedeutet worden, dass die vorgelegte Aufgabe 4 wesentlich von einander verschiedene Lösungen zulässt. Man erhält zwar aus den gefundenen Auflösungen andere, wenn man für die Variabeln y_1, y_2, y_3 dieselben Variabeln mit den dritten Wurzeln der Einheit multiplicirt setzt. Diese werden aber nicht als wesentlich verschieden zu betrachten sein. Jede der vier verschiedenen Auflösungen verlangt die Kenntniss einer Wurzel der biquadratischen Gleichung (60) und der vollständigen Auflösung der dieser Wurzel entsprechenden cubischen Gleichung (64). Die vollständige Lösung der Aufgabe verlangt also die Auflösung einer biquadratischen Gleichung und vier von den Wurzeln derselben abhängigen cubischen Gleichungen. In der folgenden Nummer soll aber dargethan werden, wie aus der einen Auflösung der Aufgabe die übrigen abgeleitet werden können, ohne die Auflösung einer höheren Gleichung. Die Ausziehung der dritten Wurzel aus der Einheit wird hiebei nicht für eine Auflösung einer cubischen Gleichung gerechnet. Dieses vorausgesetzt, so erhellt, dass die vollständige Lösung der Aufgabe in der That nur die Kenntniss einer Wurzel der biquadratischen Gleichung (60) und die vollständige Auflösung der von dieser Wurzel abhängigen cubischen Gleichung (64) verlangt.

22.

Aufgabe 3.

Die gegebene Function

$$f = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3$$

durch Substitutionen von der Form

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1^{(1)} z_1 + y_1^{(2)} z_2 + y_1^{(3)} z_3, \\ y_2 &= y_2^{(1)} z_1 + y_2^{(2)} z_2 + y_2^{(3)} z_3, \\ y_3 &= y_3^{(1)} z_1 + y_3^{(2)} z_2 + y_3^{(3)} z_3, \end{aligned}$$

in andere von derselben Form

$$f = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 6\,\Pi . z_1 z_2 z_3$$

zu transformiren.

Wenn man diese Aufgabe auf dem in No. 20 angegebenen Wege zu lösen unternimmt, so wird man finden, dass die Bestimmung der Verhältnisse der Coëfficienten $y_1^{(\varkappa)}$, $y_2^{(\varkappa)}$, $y_3^{(\varkappa)}$ auf die Lösung der Gleichungen

58.* $$y_1^2 - \lambda y_2 y_3 = 0; \quad y_2^2 - \lambda y_3 y_1 = 0; \quad y_3^2 - \lambda y_1 y_2 = 0$$

führt, welche in der vorhergehenden Aufgabe den Gleichungen (58) entsprechen. Durch Elimination der Variabeln y_1, y_2, y_3 erhält man die der Gleichung (60) entsprechende Gleichung

60.* $$\lambda^3 = 1.$$

Bezeichnet man nun durch k' und k'' die beiden imaginären dritten Wurzeln der Einheit, so giebt (58*):

für $\lambda = 1$,	für $\lambda = k'$,	für $\lambda = k''$,
$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : 1 : 1$,	$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : k' : k'$,	$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : k'' : k''$,
$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : k' : k''$,	$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : 1 : k''$,	$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : 1 : k'$,
$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : k'' : k'$,	$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : k'' : 1$,	$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : k' : 1$;

woraus folgende drei Substitutionen hervorgehen, durch welche die gegebene Function f der Variabeln y_1, y_2, y_3 in andere von derselben Form transformirt wird:

Erste Substitution.

$$\begin{aligned}
\pi_1 y_1 &= z_1 + z_2 + z_3 & \quad & z_1 = \tfrac{1}{3}\pi_1\{y_1 + y_2 + y_3\},\\
\pi_1 y_2 &= z_1 + k' z_2 + k'' z_3 & \text{oder} \quad & z_2 = \tfrac{1}{3}\pi_1\{y_1 + k'' y_2 + k' y_3\},\\
\pi_1 y_3 &= z_1 + k'' z_2 + k' z_3 & \quad & z_3 = \tfrac{1}{3}\pi_1\{y_1 + k' y_2 + k'' y_3\}.
\end{aligned}$$

Zweite Substitution.

$$\begin{aligned}
\pi_2 y_1 &= z_1 + z_2 + z_3 & \quad & z_1 = \tfrac{1}{3}\pi_2\{y_1 + k'' y_2 + k'' y_3\},\\
\pi_2 y_2 &= k' z_1 + z_2 + k'' z_3 & \text{oder} \quad & z_2 = \tfrac{1}{3}\pi_2\{y_1 + y_2 + k' y_3\},\\
\pi_2 y_3 &= k' z_1 + k'' z_2 + z_3 & \quad & z_3 = \tfrac{1}{3}\pi_2\{y_1 + k' y_2 + y_3\}.
\end{aligned}$$

Dritte Substitution.

$$\begin{aligned}
\pi_3 y_1 &= z_1 + z_2 + z_3 & \quad & z_1 = \tfrac{1}{3}\pi_3\{y_1 + k' y_2 + k' y_3\},\\
\pi_3 y_2 &= k'' z_1 + z_2 + k' z_3 & \text{oder} \quad & z_2 = \tfrac{1}{3}\pi_3\{y_1 + y_2 + k'' y_3\},\\
\pi_3 y_3 &= k'' z_1 + k' z_2 + z_3 & \quad & z_3 = \tfrac{1}{3}\pi_3\{y_1 + k'' y_2 + y_3\},
\end{aligned}$$

wo $\pi_1 = \sqrt[3]{3(1 + 2\pi)}$, $\pi_2 = \sqrt[3]{3(1 + 2k''\pi)}$, $\pi_3 = \sqrt[3]{3(1 + 2k'\pi)}$ ist.

Die verschiedenen Substitutionen, durch welche eine gegebene Function $f = \Sigma a_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ der Variabeln x_1, x_2, x_3 in andere von der Form

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 6\,\Pi z_1 z_2 z_3$$

transformirt wird, erhält man nun, wenn man in den Substitutionen (53), deren Coëfficienten in No. 20 und 21 bestimmt worden sind, für y_1, y_2, y_3 entweder z_1, z_2, z_3 oder die Werthe von y_1, y_2, y_3 aus den vorhergehenden drei Substitutionen setzt. Aus diesen Substitutionen ergeben sich endlich noch andere, wenn man die Variabeln z_1, z_2, z_3 einzeln mit den dritten Wurzeln der Einheit multiplicirt und diese Producte statt der Variabeln z_1, z_2, z_3 setzt.

Königsberg, den 16. Januar 1844.

9.

Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 28, Seite 97—107.]

(Fortsetzung der Abhandlung [No. 8 dieses Bandes]: „Ueber die Elimination der Variabeln etc.")

23.

Wenn man mit x_1, x_2 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes p in der Ebene bezeichnet, der auf einer durch ihre Gleichung $u = 0$ gegebenen Curve beliebig aber fest angenommen ist: ferner mit X_1, X_2 die Coordinaten eines variabeln Punktes der in dem ersten Punkte errichteten Normale der Curve, so verhalten sich die Differenzen $x_1 - X_1$, $x_2 - X_2$ wie die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Coordinaten-Axen bildet, oder wie die partiellen Differentialquotienten u_1, u_2 der Function u der Variabeln x_1, x_2, nach diesen Variabeln genommen. Bezeichnet man ferner durch λ einen unbestimmten variabeln Factor, so hat man

65. $$(x_1 - X_1)\lambda = u_1, \qquad (x_2 - X_2)\lambda = u_2,$$

woraus durch die Elimination von λ die Gleichung der Normale selbst hervorgeht. Diese Elimination kann jedoch unterbleiben, da es vortheilhafter ist, die Gleichungen der Normale unter der Form (65) zu betrachten.

Bezeichnet man mit $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$ die Coordinaten eines dem Punkte p unendlich nahe gelegenen Punktes der Curve $u = 0$, und mit μ einen unbestimmten variabeln Factor, so erhält man für die den vorhergehenden entsprechenden Gleichungen der in diesem Punkte errichteten Normale:

$$(x_1 + dx_1 - X_1)\mu = u_1 + du_1, \qquad (x_2 + dx_2 - X_2)\mu = u_2 + du_2.$$

Für den Krümmungsmittelpunkt der Curve, in welchem sich, wie bekannt, die beiden Normalen schneiden, gelten die angegebenen vier Gleichungen. Lässt man daher X_1, X_2 die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes bedeuten, so kann man dieselben mit Hilfe der angegebenen Gleichungen und der folgenden durch die Coordinaten des Punktes p wie folgt ausdrücken:

$$u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 = 0.$$

Die Länge ϱ des Krümmungshalbmessers ergiebt sich aber aus der Formel $\varrho = \sqrt{((x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2)}$ oder

66. $$\varrho = \frac{1}{\lambda}\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}.$$

Es bleibt nun noch übrig, den Werth von λ anzugeben. Denn hat man diesen gefunden, so giebt die Gleichung (66) den Werth des Krümmungsradius, und (65) giebt die Relationen, welche zwischen den Coordinaten des Punktes p und den Coordinaten X_1, X_2 des Krümmungsradius stattfinden. Zu diesem Zwecke ziehe man die Gleichungen (65) von den darauf folgenden beiden ab. Dieses giebt

$$(x_1 + dx_1 - X_1)(\mu - \lambda) = du_1 - \lambda\,dx_1, \quad (x_2 + dx_2 - X_2)(\mu - \lambda) = du_2 - \lambda\,dx_2$$

und, wenn man die Werthe von $x_1 - X_1$ und $x_2 - X_2$ aus (65) setzt,

$$(u_1 + \lambda\,dx_1)\frac{\mu - \lambda}{\lambda} = du_1 - \lambda\,dx_1, \quad (u_2 + \lambda\,dx_2)\frac{\mu - \lambda}{\lambda} = du_2 - \lambda\,dx_2.$$

Vernachlässigt man die unendlich kleinen Grössen $\lambda\,dx_1$, $\lambda\,dx_2$ gegen die endlichen u_1, u_2, so hat man

$$u_1\frac{\mu - \lambda}{\lambda} = du_1 - \lambda\,dx_1, \quad u_2\frac{\mu - \lambda}{\lambda} = du_2 - \lambda\,dx_2.$$

Fügt man hiezu noch die Gleichung $u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 = 0$ und bezeichnet die zweiten partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda}$ der Function u der Kürze wegen mit $u_{\varkappa,\lambda}$, so stellen sich diese Gleichungen wie folgt dar:

$$u_1\frac{\mu - \lambda}{\lambda} = (u_{1,1} - \lambda)\,dx_1 + u_{1,2}\,dx_2, \quad u_2\frac{\mu - \lambda}{\lambda} = u_{2,1}\,dx_1 + (u_{2,2} - \lambda)\,dx_2,$$
$$u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 = 0.$$

Wenn man die beiden ersten Gleichungen nach $d x_1$ und $d x_2$ auflöst, so erhält man

$$N d x_1 = (u_{2,2} - \lambda) u_1 - u_{1,2} u_2, \quad N d x_2 = - u_{2,1} u_1 + (u_{1,1} - \lambda) u_2,$$
$$N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \{(u_{1,1} - \lambda)(u_{2,2} - \lambda) - u_{1,2} u_{2,1}\},$$

und wenn man diese Werthe von $d x_1$ und $d x_2$ in die letzte Gleichung setzt,

$$u_1^2 (u_{2,2} - \lambda) - 2 u_1 u_2 u_{1,2} + u_2^2 (u_{1,1} - \lambda) = 0.$$

Daraus ergiebt sich für den gesuchten Werth von λ:

67. $$\lambda = \frac{u_1^2 u_{2,2} - 2 u_1 u_2 u_{1,2} + u_2^2 u_{1,1}}{u_1^2 + u_2^2}.$$

24.

Es seien x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes p einer durch die Gleichung $u = 0$ gegebenen Oberfläche, X_1, X_2, X_3 die Coordinaten eines variabeln Punktes der in p errichteten Normale der Oberfläche. Unter dieser Voraussetzung verhalten sich die Differenzen $x_1 - X_1$, $x_2 - X_2$, $x_3 - X_3$ wie die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Coordinaten-Axen bildet, oder wie die partiellen Differentialquotienten u_1, u_2, u_3 der Function u, nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 genommen. Es sind daher, wenn man mit λ einen unbestimmten variabeln Factor bezeichnet, die Gleichungen der im Punkte p errichteten Normale der Oberfläche folgende:

68. $$(x_1 - X_1)\lambda = u_1, \quad (x_2 - X_2)\lambda = u_2, \quad (x_3 - X_3)\lambda = u_3.$$

Ebenso wird die in einem dem Punkte p auf der Oberfläche unendlich nahe gelegenen Punkte q errichtete Normale, wenn man mit $x_1 + d x_1$, $x_2 + d x_2$, $x_3 + d x_3$ die Coordinaten dieses Punktes und mit μ einen unbestimmten variabeln Factor bezeichnet, durch die Gleichungen bestimmt:

$$(x_1 + d x_1 - X_1)\mu = u_1 + d u_1,$$
$$(x_2 + d x_2 - X_2)\mu = u_2 + d u_2,$$
$$(x_3 + d x_3 - X_3)\mu = u_3 + d u_3.$$

Diese beiden Normalen werden sich im Allgemeinen nicht schneiden. Sie schneiden sich aber, wenn der Punkt q auf der durch p gehenden Krümmungslinie der Oberfläche angenommen wird, in welchem Falle der Schnittpunkt r der Normalen zu dem Krümmungsmittelpunkt des durch

p und q gelegten Hauptschnittes wird. Lässt man daher X_1, X_2, X_3 die Coordinaten dieses Krümmungsmittelpunktes bedeuten, so ergeben sich die Werthe derselben aus den angegebenen, zu gleicher Zeit stattfindenden beiden Systemen von Gleichungen, und der Krümmungsradius ist $\varrho = \sqrt{((x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2 + (x_3 - X_3)^2)}$, oder, mit Rücksicht auf (68):

$$69. \qquad \varrho = \frac{1}{\lambda}\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}.$$

Um den Werth von λ in dieser Formel zu bestimmen, ziehe man die Gleichungen der Normalen von einander ab. Dies giebt

$$(x_1 + dx_1 - X_1)(\mu - \lambda) = du_1 - \lambda\, dx_1,$$
$$(x_2 + dx_2 - X_2)(\mu - \lambda) = du_2 - \lambda\, dx_2,$$
$$(x_3 + dx_3 - X_3)(\mu - \lambda) = du_3 - \lambda\, dx_3.$$

Diese Gleichungen gehen, wenn man die unendlich kleinen Grössen dx_1, dx_2, dx_3 im Verhältniss zu den endlichen Differenzen $x_1 - X_1$, $x_2 - X_2$, $x_3 - X_3$ vernachlässigt und für die Differenzen die Werthe aus (68) setzt, in folgende über:

$$u_1 \frac{\mu - \lambda}{\lambda} = du_1 - \lambda\, dx_1, \quad u_2 \frac{\mu - \lambda}{\lambda} = du_2 - \lambda\, dx_2, \quad u_3 \frac{\mu - \lambda}{\lambda} = du_3 - \lambda\, dx_3.$$

Fügt man noch die Differentialgleichung der Oberfläche hinzu und bezeichnet die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x_\varkappa\, \partial x_\lambda}$ der Kürze wegen mit $u_{\varkappa,\lambda}$, so lassen sich die Gleichungen wie folgt darstellen:

$$u_1 \frac{\mu - \lambda}{\lambda} = (u_{1,1} - \lambda)\, dx_1 + u_{1,2}\, dx_2 + u_{1,3}\, dx_3,$$
$$u_2 \frac{\mu - \lambda}{\lambda} = u_{2,1}\, dx_1 + (u_{2,2} - \lambda)\, dx_2 + u_{2,3}\, dx_3,$$
$$u_3 \frac{\mu - \lambda}{\lambda} = u_{3,1}\, dx_1 + u_{3,2}\, dx_2 + (u_{3,3} - \lambda)\, dx_3,$$
$$u_1\, dx_1 + u_2\, dx_2 + u_3\, dx_3 = 0.$$

Aus den drei ersten Gleichungen ergeben sich die Werthe von dx_1, dx_2, dx_3 durch Auflösung. Setzt man dieselben in die letzte Gleichung, so wird man finden:

$$0 = \begin{cases} u_1^2\{(u_{2,2}-\lambda)(u_{3,3}-\lambda)-u_{2,3}^2\} + u_2^2\{(u_{3,3}-\lambda)(u_{1,1}-\lambda)-u_{3,1}^2\} + u_3^2\{(u_{1,1}-\lambda)(u_{2,2}-\lambda)-u_{1,2}^2\} \\ + 2u_2u_3\{u_{2,1}u_{3,1} - (u_{1,1}-\lambda)u_{2,3}\} + 2u_3u_1\{u_{3,2}u_{1,2} - (u_{2,2}-\lambda)u_{3,1}\} \\ \qquad + 2u_1u_2\{u_{1,3}u_{2,3} - (u_{3,3}-\lambda)u_{1,2}\}. \end{cases}$$

Bezeichnet man endlich mit λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der vorliegenden quadratischen Gleichung, so erhält man:

$$70. \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{u_1^2(u_{2,2}+u_{3,3}) + u_2^2(u_{3,3}+u_{1,1}) + u_3^2(u_{1,1}+u_{2,2}) - 2u_2u_3u_{2,3} - 2u_3u_1u_{3,1} - 2u_1u_2u_{1,2}}{u_1^2+u_2^2+u_3^2},$$

$$71. \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{u_1^2V_{1,1} + u_2^2V_{2,2} + u_3^2V_{3,3} + 2u_2u_3V_{2,3} + 2u_3u_1V_{3,1} + 2u_1u_2V_{1,2}}{u_1^2+u_2^2+u_3^2},$$

wo die Grössen $V_{\varkappa,\lambda}$ die Bedeutung

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= u_{2,2}u_{3,3} - u_{2,3}^2, & V_{2,3} &= u_{2,1}u_{3,1} - u_{1,1}u_{2,3}, \\ V_{2,2} &= u_{3,3}u_{1,1} - u_{3,1}^2, & V_{3,1} &= u_{3,2}u_{1,2} - u_{2,2}u_{3,1}, \\ V_{3,3} &= u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}^2, & V_{1,2} &= u_{1,3}u_{2,3} - u_{3,3}u_{1,2} \end{aligned}$$

haben. Wenn man diese Wurzeln nach einander in (69) statt λ setzt, so erhält man die Krümmungsradien der Hauptschnitte im Punkte p der Oberfläche. Setzt man sie in (68), so bestimmen jene Gleichungen die Coordinaten X_1, X_2, X_3 der Krümmungsmittelpunkte der Hauptschnitte.

Die Zähler der Ausdrücke (67) und (71) kann man auf eine elegante Art transformiren, wenn u eine ganze algebraische Function vom Grade n ist. Diese Transformation soll in Folgendem auseinandergesetzt werden.

25.

Durch Auflösung eines linearen Systems von Gleichungen mit m Unbekannten $x_1, x_2, \ldots. x_m$ von der Form

$$72. \quad \begin{cases} U_1 = x_1u_{1,1} + x_2u_{1,2} + \cdots + x_mu_{1,m}, \\ U_2 = x_1u_{2,1} + x_2u_{2,2} + \cdots + x_mu_{2,m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_m = x_1u_{m,1} + x_2u_{m,2} + \cdots + x_mu_{m,m} \end{cases}$$

erhält man Gleichungen von der Form:

$$73. \quad \begin{cases} \Delta.x_1 = U_1U_{1,1} + U_2U_{2,1} + \cdots + U_mU_{m,1}, \\ \Delta.x_2 = U_1U_{1,2} + U_2U_{2,2} + \cdots + U_mU_{m,2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta.x_m = U_1U_{1,m} + U_2U_{2,m} + \cdots + U_mU_{m,m}, \end{cases}$$

wo Δ die aus den Coëfficienten der Gleichungen (72) zusammengesetzte Determinante, also eine ganze Function vom Grade m und die Grössen

$U_{\varkappa,\lambda}$ ganze Functionen vom Grade $m-1$ in Rücksicht auf die genannten Coëfficienten bedeuten.

Ein zweites gegebenes System linearer Gleichungen mit den $m-1$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$

$$74. \quad \begin{cases} V_1 = x_1 u_{1,1} + x_2 u_{1,2} + \cdots + x_{m-1} u_{1,m-1}, \\ V_2 = x_1 u_{2,1} + x_2 u_{2,2} + \cdots + x_{m-1} u_{2,m-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{m-1} = x_1 u_{m-1,1} + x_2 u_{m-1,2} + \cdots + x_{m-1} u_{m-1,m-1} \end{cases}$$

gebe, nach den Unbekannten aufgelöst,

$$75. \quad \begin{cases} \delta . x_1 = V_1 V_{1,1} + V_2 V_{2,1} + \cdots + V_{m-1} V_{m-1,1}, \\ \delta . x_2 = V_1 V_{1,2} + V_2 V_{2,2} + \cdots + V_{m-1} V_{m-1,2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta . x_{m-1} = V_1 V_{1,m-1} + V_2 V_{2,m-1} + \cdots + V_{m-1} V_{m-1,m-1}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen bedeutet δ die aus den Coëfficienten der Gleichungen (74) zusammengesetzte Determinante, welche mit der Determinante $\varDelta$ in der Verbindung

$$76. \quad \frac{\partial \varDelta}{\partial u_{m,m}} = \delta = U_{m,m}$$

steht. Zieht man die Gleichungen (72) von (74) ab, so erhält man

$$V_1 = U_1 - x_m u_{1,m}; \quad V_2 = U_2 - x_m u_{2,m}; \quad \ldots\ldots \quad V_{m-1} = U_{m-1} - x_m u_{m-1,m}.$$

Setzt man diese Werthe von $V_1, V_2, \ldots V_{m-1}$ in (75), so findet sich:

$$\delta . x_1 = U_1 V_{1,1} + U_2 V_{2,1} + \cdots U_{m-1} V_{m-1,1} - x_m \{u_{1,m} V_{1,1} + u_{2,m} V_{2,1} + \cdots u_{m-1,m} V_{m-1,1}\},$$
$$\delta . x_2 = U_1 V_{1,2} + U_2 V_{2,2} + \cdots U_{m-1} V_{m-1,2} - x_m \{u_{1,m} V_{1,2} + u_{2,m} V_{2,2} + \cdots u_{m-1,m} V_{m-1,2}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta . x_{m-1} = U_1 V_{1,m-1} + U_2 V_{2,m-1} + \cdots U_{m-1} V_{m-1,m-1}$$
$$- x_m \{u_{1,m} V_{1,m-1} + u_{2,m} V_{2,m-1} + \cdots u_{m-1,m} V_{m-1,m-1}\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\varDelta$, setzt darauf für $\varDelta x_1$, $\varDelta x_2, \ldots \varDelta x_m$ die Werthe aus (73) und vergleicht die Coëfficienten von U_m auf beiden Seiten der Gleichungen, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (76):

$$U_{m,1} = -\{u_{1,m} V_{1,1} + u_{2,m} V_{2,1} + \cdots + u_{m-1,m} V_{m-1,1}\},$$
$$U_{m,2} = -\{u_{1,m} V_{1,2} + u_{2,m} V_{2,2} + \cdots + u_{m-1,m} V_{m-1,2}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_{m,m-1} = -\{u_{1,m} V_{1,m-1} + u_{2,m} V_{2,m-1} + \cdots + u_{m-1,m} V_{m-1,m-1}\}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen stellt sich das vorhergehende System so dar:

$$\begin{aligned}
\delta . x_1 &= U_1 V_{1,1} + U_2 V_{2,1} + \cdots + U_{m-1} V_{m-1,1} + x_m U_{m,1}, \\
\delta . x_2 &= U_1 V_{1,2} + U_2 V_{2,2} + \cdots + U_{m-1} V_{m-1,2} + x_m U_{m,2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta . x_{m-1} &= U_1 V_{1,m-1} + U_2 V_{2,m-1} + \cdots + U_{m-1} V_{m-1,m-1} + x_m U_{m,m-1}, \\
\delta . x_m &= x_m U_{m,m}.
\end{aligned}$$

Nimmt man nun an, dass $u_{\varkappa,\lambda} = u_{\lambda,\varkappa}$, woraus bekanntlich folgt, dass auch $U_{\varkappa,\lambda} = U_{\lambda,\varkappa}$ und $V_{\varkappa,\lambda} = V_{\lambda,\varkappa}$; so erhält man, wenn man respective mit $U_1, U_2, \ldots. U_m$ multiplicirt und alle Gleichungen addirt, mit Rücksicht auf die letzte Gleichung (73):

77. $$\delta . (x_1 U_1 + x_2 U_2 + \cdots + x_m U_m) - x_m x_m \varDelta = \\ U_1^2 V_{1,1} + U_2^2 V_{2,2} \cdots + U_{m-1}^2 V_{m-1,m-1} + 2 U_1 U_2 V_{1,2} \cdots + 2 U_{m-2} U_{m-1} V_{m-2,m-1}.$$

Es sei nun u eine gegebene Function $n$ten Grades der $m-1$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_{m-1}$. Diese Function ist homogen und von m Variabeln, bleibt aber vom $n$ten Grade, wenn man $\frac{x_1}{x_m}, \frac{x_2}{x_m}, \ldots \frac{x_{m-1}}{x_m}$ statt der Variabeln setzt und die Function mit x_m^n multiplicirt. In dem Folgenden soll unter u die auf die angegebene Weise homogen gemachte Function u verstanden werden, mit der Bestimmung, dass der Werth der letzten Variabeln x_m gleich 1 sei, wodurch die gegebene und die homogen gemachte Function gleich werden. Bezeichnet man ferner mit $u_1, u_2, \ldots. u_m$ die Differentialquotienten der homogenen Function u nach den m Variabeln genommen, so hat man bekanntlich:

78. $$n . u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots x_m u_m.$$

Bezeichnet man endlich die zweiten Differentialquotienten der Function u, nämlich $\frac{\partial^2 u}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda}$, mit $u_{\varkappa,\lambda}$ oder $u_{\lambda,\varkappa}$, so hat man auf gleiche Weise:

79. $$\left\{\begin{aligned}
(n-1) . u_1 &= x_1 u_{1,1} + x_2 u_{1,2} + \cdots + x_m u_{1,m}, \\
(n-1) . u_2 &= x_1 u_{2,1} + x_2 u_{2,2} + \cdots + x_m u_{2,m}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(n-1) . u_m &= x_1 u_{m,1} + x_2 u_{m,2} + \cdots + x_m u_{m,m}.
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen erhellt, wenn man sie mit (72) vergleicht, dass

$$U_\varkappa = (n-1)\,u_\varkappa$$

gesetzt werden kann; wodurch die Gleichung (77) mit Rücksicht auf (78) in

80.
$$\frac{n}{n-1}\,\delta\,.\,u - \frac{x_m\,x_m}{(n-1)^2}\,\varDelta =$$
$$u_1^2 V_{1,1} + u_2^2 V_{2,2} + \cdots + u_{m-1}^2 V_{m-1,m-1} + 2\,u_1 u_2 V_{1,2} + \cdots + 2\,u_{m-2} u_{m-1} V_{m-2,m-1}$$

übergeht. Diese Formel dient zur Transformation der Zähler der Ausdrücke (67) und (71); was sogleich erhellt, wenn man $m = 3$ oder $m = 4$ setzt.

26.

Wenn man die Gleichungen (74) unter der Annahme $m = 3$ auflöst, wodurch man die Gleichungen (75) erhält, so ergiebt sich

$$V_{1,1} = u_{2,2}, \qquad V_{2,2} = u_{1,1}, \qquad V_{1,2} = -\,u_{1,2},$$

und die Determinante der Coëfficienten in den Gleichungen (72) wird:

$$\varDelta = u_{1,1} u_{2,2} u_{3,3} + 2\,u_{1,2} u_{1,3} u_{2,3} - u_{1,1} u_{2,3}^2 - u_{2,2} u_{1,3}^2 - u_{3,3} u_{1,2}^2.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (80), so geht der Theil rechts derselben in den Zähler des Ausdrucks (67) über. Bemerkt man nun, dass die Coordinaten des Punktes p der Curve $u = 0$ die Function u verschwinden machen und dass $x_3 = 1$ ist, so hat man:

67.*
$$\lambda = \frac{-\varDelta}{(n-1)^2 (u_1^2 + u_2^2)}.$$

Für $m = 4$ wird

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= u_{2,2} u_{3,3} - u_{2,3}^2, & V_{2,3} &= u_{2,1} u_{3,1} - u_{1,1} u_{2,3}, \\ V_{2,2} &= u_{3,3} u_{1,1} - u_{3,1}^2, & V_{3,1} &= u_{3,2} u_{1,2} - u_{2,2} u_{3,1}, \\ V_{3,3} &= u_{1,1} u_{2,2} - u_{1,2}^2, & V_{1,2} &= u_{1,3} u_{2,3} - u_{3,3} u_{1,2}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in den Theil rechts der Gleichung (80), so geht derselbe in den Zähler des Ausdrucks (71) über, und da $x_4 = 1$ und für die Coordinaten des Punktes p der Oberfläche $u = 0$ die Function u verschwindet, so hat man:

71.*
$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-\varDelta}{(n-1)^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}.$$

Diese Transformation ist vorzüglich desshalb von Wichtigkeit, weil sie die Grade der Zähler der Ausdrücke (67) und (71) um zwei Einheiten erniedrigt. Denn während der Zähler des Ausdrucks (67) in Rücksicht auf die Variabeln vom Grade $3n-4$ war, so ist der Zähler des Ausdrucks (67*) nur vom Grade $3(n-2)$. Ebenso ist der Zähler des Ausdrucks (71) vom Grade $4n-6$, der Zähler des Ausdrucks (71*) aber nur vom $4(n-2)$ten Grade.

Man pflegt mit dem Namen *Wendepunkte* solche Punkte einer Curve zu bezeichnen, in denen der Krümmungshalbmesser unendlich gross ist. Ist nun $u=0$ die Gleichung einer Curve $n$ter Ordnung, so werden die Coordinaten dieser Punkte durch die Gleichungen

$$u=0 \quad \text{und} \quad \lambda=0$$

bestimmt. Nimmt man den Werth von λ aus (67), so werden diese Gleichungen auf die Zahl der Wendepunkte gleich $n(3n-4)$ hindeuten. Setzt man aber für λ den Werth aus (67*), so geht die letzte Gleichung in $\Delta=0$ über und die Zahl der Wendepunkte reducirt sich auf $3n(n-2)$. Man hat daher folgenden von dem Herrn Professor Plücker in dem „System der analytischen Geometrie“ p. 264 aufgestellten Lehrsatz:

Lehrsatz 9.

Eine Curve nter Ordnung hat im Allgemeinen $3n(n-2)$ *Wendepunkte.*

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich folgende Regel zur Bestimmung der Wendepunkte:

Wenn u eine homogene Function von drei Variabeln x_1, x_2, x_3 *nten Grades,* Δ *die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten zusammengesetzte Determinante der Function u ist, und wenn* $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ *die rechtwinkligen (oder schiefwinkligen) Coordinaten eines variabeln Punktes sind, so bestimmen die Gleichungen*

$$u=0 \quad \textit{und} \quad \Delta=0$$

die Coordinaten der Wendepunkte der Curve $u=0$.

Nennt man auf gleiche Weise *Wendepunkte einer Oberfläche* $u=0$ diejenigen Punkte, in denen einer der beiden Hauptschnitte der Oberfläche einen unendlich grossen Krümmungsradius hat, so beweist der Ausdruck (71*), der für diese Punkte verschwinden muss, nachstehenden Lehrsatz:

Lehrsatz 10.

Die Wendepunkte einer Oberfläche $n$ter Ordnung liegen auf einer Oberfläche $4(n-2)$ter Ordnung.

Zur Bestimmung dieser Art Wendepunkte dient folgende Angabe: *Wenn u eine homogene Function $n$ten Grades der vier Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4, wenn Δ die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten zusammengesetzte Determinante der Function u ist, und $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ die Coordinaten eines variabeln Punktes sind, so bestimmen die Gleichungen*

$$u = 0 \quad \text{und} \quad \Delta = 0$$

die Coordinaten der Wendepunkte der Oberfläche $u = 0$.

27.

In No. 8 bis 14 sind mit f_1, f_2, f_3 beliebige homogene Functionen zweiten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet worden und mit φ die Determinante dieser Functionen. Betrachtet man die Quotienten $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Ebene, so stellen die Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

drei beliebige Kegelschnitte dar, und die Gleichung $\varphi = 0$ eine Curve dritter Ordnung, die mit diesen Kegelschnitten in einem merkwürdigen Verhältnisse steht. Denn bezeichnet man mit $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ die Coordinaten eines Punktes der Ebene und mit $\frac{y_1}{y_3}$, $\frac{y_2}{y_3}$ die Coordinaten des zugeordneten harmonischen Poles in Rücksicht auf jeden der erwähnten Kegelschnitte, so hat man, mit Beibehaltung der in den angegebenen Nummern gewählten Bezeichnungen, folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 u_1^{(1)} + y_2 u_1^{(2)} + y_3 u_1^{(3)} &= 0, \\ y_1 u_2^{(1)} + y_2 u_2^{(2)} + y_3 u_2^{(3)} &= 0, \\ y_1 u_3^{(1)} + y_2 u_3^{(2)} + y_3 u_3^{(3)} &= 0. \end{aligned}$$

Das Resultat der Elimination von y_1, y_2, y_3 aus diesen Gleichungen giebt dann $\varphi = 0$; woraus folgender Lehrsatz hervorgeht:

Lehrsatz 11.

„Der geometrische Ort der dreien gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlich zugeordneten harmonischen Polenpaare ist eine Curve dritter Ordnung.“

Nimmt man an, dass die drei gegebenen Kegelschnitte sich in einem und demselben Punkte schneiden, so wird in diesem ein Polenpaar zusammenfallen und desshalb die Curve dritter Ordnung durch diesen Punkt hindurchgehen. Wenn man dies analytisch ausdrückt, so hat man den Lehrsatz 2.

Wenn man, anstatt von den Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, von folgenden drei Gleichungen ausgegangen wäre:

$$\varkappa_1 f_1 + \varkappa_2 f_2 + \varkappa_3 f_3 = 0, \quad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0, \quad \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 = 0,$$

so würde man dieselbe Endgleichung $\varphi = 0$ gefunden haben. Es stellt mithin die Gleichung $\varkappa_1 f_1 + \varkappa_2 f_2 + \varkappa_3 f_3 = 0$ ein System Kegelschnitte von der Eigenschaft dar, dass sich, wenn man die gemeinsamen harmonischen Polenpaare von irgend dreien construirt, welche zugleich harmonische Polenpaare aller übrigen sind, immer dieselbe Curve dritter Ordnung als geometrischer Ort dieser Polenpaare ergiebt. Diese Curve dritter Ordnung lässt sich auf folgende Art construiren. Man lege einen beliebigen Kegelschnitt durch die vier Schnittpunkte der beiden ersten Kegelschnitte. Derselbe schneidet den dritten Kegelschnitt in vier Punkten. Legt man alsdann durch die vier letzten Schnittpunkte ein Linienpaar, so laufen die beiden Linien in einem Punkte der Curve dritter Ordnung zusammen. Dieser Punkt beschreibt die Curve dritter Ordnung, wenn man den beliebigen Kegelschnitt variiren lässt.

Umgekehrt lässt sich nach den drei Kegelschnitten fragen, deren gemeinschaftliche harmonische Polenpaare in einer gegebenen Curve dritter Ordnung liegen. Diese Aufgabe kommt mit der Aufgabe 1 überein. Denn wenn $\varphi = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve dritter Ordnung ist, so hat man die Function f dritter Ordnung zu suchen, deren Determinante die gegebene Function φ ist. Hat man dieselbe bestimmt und bezeichnet nun mit f_1, f_2, f_3 ihre partiellen Differentialquotienten, so sind $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ die Gleichungen der gesuchten Kegelschnitte, und die Gleichung $k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 = 0$ stellt das ganze System von Kegelschnitten dar, deren gemeinschaftliche harmonische Polenpaare in

der gegebenen Curve dritter Ordnung liegen. Da aber einer gegebenen Function φ drei Functionen f entsprechen, so giebt es auch drei Systeme solcher Kegelschnitte. Jedem Punkte der Curve entspricht ein zugeordneter Pol des Systems. Da aber drei Systeme vorhanden sind, so entsprechen jedem Punkte der Curve drei andere bestimmte Punkte derselben Curve.

28.

In No. 15 bis 22 ist mit f eine beliebige homogene Function dritter Ordnung von den Variabeln x_1, x_2, x_3, und mit φ ihre Determinante bezeichnet worden. Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass die Gleichungen

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

die Wendepunkte der durch die Gleichung $f = 0$ dargestellten Curve dritter Ordnung bestimmen. Bemerkt man nun, dass, wenn mit d und δ zwei beliebige constante Grössen bezeichnet werden, die Gleichung $df + \delta\varphi = 0$ alle Curven dritter Ordnung darstellt, welche durch die Wendepunkte der ersten Curve hindurchgehen, so lassen sich die Lehrsätze 8 und 6 wie folgt geometrisch ausdrücken:

Lehrsatz 12.

Durch die neun Wendepunkte einer beliebigen Curve dritter Ordnung lassen sich vier Systeme dreier gerader Linien hindurchlegen.

Auf diesen schönen Lehrsatz hat zuerst Herr Professor Plücker in der oben citirten Schrift S. 284 aufmerksam gemacht. Die Schnittpunkte eines beliebigen dieser Systeme mit einem der drei andern werden demnach die Wendepunkte der Curve dritter Ordnung sein.

Lehrsatz 13.

Alle Curven dritter Ordnung, welche durch die neun Wendepunkte einer beliebigen Curve dritter Ordnung hindurchgehen, schneiden sich gegenseitig in den Wendepunkten.

Hieran schliesst sich endlich noch folgender Lehrsatz, der ebenfalls durch das Vorhergehende bewiesen wird:

Lehrsatz 14.

Wenn die Wendepunkte zweier Curven dritter Ordnung auf denselben drei geraden Linien liegen, so liegen auch die Wendepunkte aller Curven dritter Ordnung, welche durch sämmtliche Schnittpunkte der beiden Curven hindurchgehen, auf denselben drei geraden Linien.

Die Gleichungen des einen Systems von drei geraden Linien, welche durch die neun Wendepunkte der Curve $f=0$ hindurchgehen, sind, wie aus der Gleichung (57) erhellt:

$$y_1=0, \quad y_2=0, \quad y_3=0.$$

Die eines zweiten Systems sind

$$z_1=0, \quad z_2=0, \quad z_3=0,$$

wo die Werthe von z_1, z_2, z_3 aus einer der drei Substitutionen von No. 22 und die Werthe von y_1, y_2, y_3 aus den Substitutionen (53) zu nehmen sind. Jede von den drei Linien des ersten Systems schneidet jede Linie des andern Systems in einem Wendepunkte der Curve $f=0$. Berechnet man daher die Werthe der Verhältnisse der Variabeln x_1, x_2, x_3 aus irgend einem Paare folgender Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} y_1=0,\ y_2+y_3=0; & y_2=0,\ y_3+y_1=0; & y_3=0,\ y_1+y_2=0; \\ y_1=0,\ y_2+k'y_3=0; & y_2=0,\ y_3+k'y_1=0; & y_3=0,\ y_1+k'y_2=0; \\ y_1=0,\ y_2+k''y_3=0; & y_2=0,\ y_3+k''y_1=0; & y_3=0,\ y_1+k''y_2=0; \end{array}$$

so werden diese Werthe der Verhältnisse der Variabeln auch den Gleichungen

$$f=0 \quad \text{und} \quad \varphi=0$$

genügen, und die Quotienten $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ die Coordinaten eines Wendepunktes der durch $f=0$ dargestellten Curve dritter Ordnung sein.

Königsberg, den 22. April 1844.

10.

Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen neunten Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dass eine gegebene rationale und symmetrische Function $\theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln x_λ, x_μ eine dritte Wurzel $x_\varkappa$ giebt, so dass gleichzeitig:

$$x_\varkappa = \theta(x_\lambda, x_\mu), \quad x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\varkappa), \quad x_\mu = \theta(x_\varkappa, x_\lambda).$$

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 34, Seite 193—208.]

Zu den algebraisch auflösbaren Gleichungen gehört nach Abel's Ausspruch (S. Crelle's Journal Band 5, Seite 343) auch jede irreductible Gleichung, von welcher drei Wurzeln in einer solchen Verbindung stehen, dass jede derselben eine gegebene rationale Function der beiden andern ist; unter der Voraussetzung, dass die Zahl, welche den Grad der Gleichung angiebt, eine Primzahl sei. An diesen noch nicht bewiesenen Satz will ich einige Bemerkungen anschliessen, indem ich die Bestimmung aufhebe, dass die Zahl, welche den Grad der Gleichung angiebt, eine Primzahl sein müsse.

Es seien

$$\text{I.} \qquad X(x) = 0$$

eine gegebene irreductible Gleichung und x_1, x_2, x_3 drei Wurzeln derselben, welche mit einander so verbunden sind, dass

$$\text{II.} \qquad x_3 = \theta(x_1, x_2)$$

ist, wo $\theta(x_1, x_2)$ eine gegebene rationale Function der beiden Wurzeln x_1 und x_2 bezeichnet. Alsdann hat man

$$\text{III.} \qquad X(\theta(x_1, x_2)) = 0, \quad X(x_2) = 0, \quad X(x_1) = 0.$$

Betrachten wir nun die beiden ersten Gleichungen (III) und in ihnen x_2 als die Unbekannte, so kann erstens der Fall eintreten, dass den beiden Gleichungen nur durch die einzige Wurzel x_2 der Gleichung (I) zu gleicher Zeit genügt wird, oder zweitens können mehrere Wurzeln, für x_2 gesetzt, den beiden Gleichungen zu gleicher Zeit genügen; oder mit andern Worten: unter den Werthen, die der Ausdruck $\theta(x_1, x_2)$ annimmt, indem man für x_2 nach einander alle Wurzeln der Gleichung (I) setzt, kommen erstlich nur eine einzige Wurzel der Gleichung (I), oder zweitens mehrere Wurzeln vor.

Im ersten Falle gehört, wie ich nachweisen werde, die Gleichung (I) zu der Classe von Gleichungen, von welchen eine Wurzel eine gegebene rationale Function einer andern ist; welche Gleichungen Abel in dem 4. Bande des Crelle'schen Journals, S. 131 untersucht hat.

Es seien

$$\text{IV.} \qquad \varphi(x) = 0, \quad X(x) = 0$$

die beiden ersten Gleichungen (III), nachdem man in denselben x statt x_2 gesetzt und sie nach Potenzen dieser Variabeln geordnet hat. Diese Gleichungen seien respective vom $m$ten und vom $n$ten Grade. Die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x in der ersten Gleichung werden bekannte rationale Functionen der Wurzel x_1 sein. Bezeichnen wir nun durch $F(x)$ eine beliebige ganze Function von x vom $(m+n-2)$ten Grade, welche für x_2 nicht verschwindet, so kann man immer folgende identische Gleichungen aufstellen:

$$\text{V.} \qquad \begin{cases} A_0 F(x) + B_0 \varphi(x) + C_0 X(x) = 1, \\ A_1 F(x) + B_1 \varphi(x) + C_1 X(x) = x, \\ A_2 F(x) + B_2 \varphi(x) + C_2 X(x) = x^2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{m+n-2} F(x) + B_{m+n-2} \varphi(x) + C_{m+n-2} X(x) = x^{m+n-2}, \end{cases}$$

in welchen die verschiedenen Grössen A, B, C ganze, zu bestimmende Functionen, respective vom 0, $(n-2)$, $(m-2)$ten Grade der Variabeln x und rationale Functionen der Grösse x_1 sind, welche in den Coëfficienten der Function $\varphi(x)$ rational vorkommt. Denn setzt man, nachdem man eine der aufgestellten Gleichungen nach Potenzen von x geordnet hat, die Coëfficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten des Gleichheits-

zeichens einander gleich, so erhält man $m+n-1$ lineäre Gleichungen in Rücksicht auf die zu bestimmenden Coëfficienten in $A, B, C,$ deren Zahl auch gleich der der Gleichungen ist. Löst man diese lineären Gleichungen auf, so erhält man die Werthe der Coëfficienten in A, B, C als rationale Functionen von x_1 und kann die gesuchten Functionen A, B, C selbst mit Hülfe derselben zusammensetzen. Dividiren wir die $(k+1)$te Gleichung durch die nächst vorhergehende, so erhalten wir:

$$x = \frac{A_k F(x) + B_k \varphi(x) + C_k X(x)}{A_{k-1} F(x) + B_{k-1} \varphi(x) + C_{k-1} X(x)}.$$

Setzen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung x_2 statt x, so wird, da $\varphi(x_2) = 0$ und $X(x_2) = 0$ ist:

VI. $$x_2 = \frac{A_k}{A_{k-1}}.$$

Der Theil rechts dieser Gleichung ist aber eine rationale Function der Wurzel x_1: mithin haben wir eine Wurzel x_2 der Gleichung (I) als rationale Function einer andern Wurzel x_1 dargestellt. Da k eine beliebige unter den Zahlen $1, 2 \ldots . m+n-2$ bedeutet, so ist noch zu bemerken, dass wir $m+n-2$ verschiedene rationale Functionen der Wurzel x_1 gefunden haben, welche gleich der Wurzel x_2 sind.

Die Untersuchung des zweiten Falles, wenn unter den Werthen, die der Ausdruck $\theta(x_1, x_2)$ annimmt, indem man für x_2 nach einander alle Wurzeln (I) mit Ausschluss von x_1 setzt, mehrere Wurzeln dieser Gleichung vorkommen (wenn nämlich $\theta(x_1, x_1)$ eine Wurzel der Gleichung (I) ist, so hat man eine gegebene rationale Function einer Wurzel, welche gleich einer andern Wurzel derselben Gleichung ist), scheint ungleich schwieriger zu sein. Ich werde mich vorläufig damit begnügen, als Beispiel zu diesem Falle die algebraische Auflösung einer Gleichung vom neunten Grade durchzuführen, auf welche die Untersuchung der Wendepunkte einer Curve vom dritten Grade führt.

1.

Es sei

1. $$X(x) = 0$$

eine gegebene Gleichung vom neunten Grade, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dass eine gegebene rationale und symmetrische Function

$\theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln x_λ, x_μ eine dritte Wurzel $x_\varkappa$ giebt, in der Art, dass gleichzeitig

2. $$x_\varkappa = \theta(x_\lambda, x_\mu), \quad x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\varkappa), \quad x_\mu = \theta(x_\varkappa, x_\lambda) \text{ ist.}$$

Die neun Wurzeln $x_1, x_2, \ldots. x_9$ der gegebenen Gleichung (1) bilden, wenn man je drei derselben zusammenstellt, 84 Combinationen, von welchen die einen *conjugirte* Wurzeln enthalten, das heisst solche, die in der durch die Gleichungen (2) angedeuteten Verbindung stehen, die andern aber *nicht conjugirte* Wurzeln oder solche, welche nicht auf die genannte Weise mit einander verbunden sind. Die Zahl der ersten Art Combinationen beträgt 12, die der letzten Art 72.

Um dieses nachzuweisen und die 12 Combinationen erster Art zu bilden, bemerken wir, dass sich sämmtliche Wurzeln der Gleichung (1) durch irgend drei nicht conjugirte Wurzeln rational ausdrücken lassen. Denn angenommen, es seien x_1, x_4, x_7 drei nicht conjugirte Wurzeln, so müssen $\theta(x_4, x_7)$, $\theta(x_1, x_7)$, $\theta(x_1, x_4)$ drei neue, ebenfalls nicht conjugirte Wurzeln sein, welche wir durch

3. $$x_2 = \theta(x_4, x_7), \quad x_5 = \theta(x_1, x_7), \quad x_8 = \theta(x_1, x_4)$$

bezeichnen wollen. Wären diese neuen Wurzeln conjugirte, so hätte man folgende vier Combinationen conjugirter Wurzeln:

$$x_2, x_4, x_7; \quad x_5, x_1, x_7; \quad x_8, x_1, x_4; \quad x_2, x_5, x_8.$$

Die zu x_7 und x_8 conjugirte Wurzel kann nur eine von den drei letzten Wurzeln x_3, x_6, x_9 sein, weil ebensowohl x_7 als x_8 mit jeder der übrigen Wurzeln schon combinirt ist. Die zu x_7 und x_8 conjugirte Wurzel sei nun x_9, also x_7, x_8, x_9 eine neue Combination conjugirter Wurzeln. Ebenso kann die zu x_8 und x_3 conjugirte Wurzel nur x_6 sein. Mithin ist x_8, x_3, x_6 wieder eine Combination conjugirter Wurzeln. Endlich kann die zu x_7 und x_3 conjugirte Wurzel nur x_6 sein. Man hat also die Combination x_7, x_3, x_6 conjugirter Wurzeln. Diese und die vorhergehende Combination können aber nicht neben einander bestehen, weil nicht gleichzeitig

$$x_7 = \theta(x_3, x_6) \quad \text{und} \quad x_8 = \theta(x_3, x_6)$$

sein kann. Die Annahme, dass x_2, x_5, x_8 conjugirte Wurzeln seien, was auf die aufgestellten widersprechenden Gleichungen führt, ist also unstatthaft. Im Allgemeinen geben die Ausdrücke $\theta(x_\lambda, x_\mu)$, $\theta(x_\mu, x_\varkappa)$,

$\theta(x_\varkappa, x_\lambda)$ entweder die Wurzeln $x_\varkappa$, x_λ, x_μ, oder neue, von diesen verschiedene, nicht conjugirte Wurzeln, je nachdem $x_\varkappa$, x_λ, x_μ conjugirte oder nicht conjugirte Wurzeln der Gleichung (1) sind.

Demnach sind auch die Ausdrücke $\theta(x_5, x_8)$, $\theta(x_8, x_2)$, $\theta(x_2, x_5)$ von x_2, x_5, x_8 verschiedene und nicht conjugirte Wurzeln. Sie können aber auch nicht die Wurzeln x_1, x_4, x_7 sein, von welchen wir ausgingen. Denn wäre z. B. $x_1 = \theta(x_5, x_8)$, so wären x_1, x_5, x_8 conjugirte Wurzeln. Es sind aber nach (3) schon x_1, x_4, x_8 conjugirte Wurzeln. Mithin hätte man $x_5 = \theta(x_1, x_8)$ und zugleich $x_4 = \theta(x_1, x_8)$. Eben so wenig kann $x_4 = \theta(x_5, x_8)$ oder $x_7 = \theta(x_5, x_8)$ sein; denn aus diesen Annahmen würde man die Folgerung ziehen können, dass $x_5 = \theta(x_4, x_8)$ sei, während die Gleichungen (3) $x_1 = \theta(x_4, x_8)$ geben, oder dass $x_8 = \theta(x_5, x_7)$ sei, während man aus (3) $x_1 = \theta(x_5, x_7)$ erhält.

Die obigen Ausdrücke geben also die drei letzten Wurzeln x_3, x_6, x_9 in der Art, dass

4. $$x_3 = \theta(x_5, x_8), \qquad x_6 = \theta(x_8, x_2), \qquad x_9 = \theta(x_2, x_5).$$

Es ist leicht zu sehen, dass man wieder auf die drei ersten Wurzeln x_1, x_4, x_7 zurückkommt, wenn man aus den letzten Wurzeln auf die angegebene Weise neue Wurzeln bildet. Man erhält nämlich:

5. $$x_1 = \theta(x_6, x_9), \qquad x_4 = \theta(x_9, x_3), \qquad x_7 = \theta(x_3, x_6).$$

Denn vertauscht man die Wurzeln x_4 und x_7 mit einander, lässt aber die Wurzel x_1 ungeändert, so hat man nach (3) die Wurzeln x_5 und x_8 mit einander zu vertauschen und x_2 ungeändert zu lassen, und nach (4) x_6 und x_9 zu vertauschen und x_3 ungeändert zu lassen. Da nun x_6 und x_9 mit einander vertauscht werden können, ohne dass sich x_1 und x_3 ändern, so muss $\theta(x_6, x_9)$ gerade gleich x_1 und nicht gleich x_4 oder x_7 sein, etc.

Die zwölf Combinationen der conjugirten Wurzeln der Gleichung (1) kann man nun in folgende vier Gruppen vertheilen, deren jede sämmtliche Wurzeln enthält:

6. $$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 x_2 x_3 & \ldots & x_4 x_5 x_6 & \ldots & x_7 x_8 x_9 \\ x_2 x_4 x_7 & \ldots & x_3 x_5 x_8 & \ldots & x_1 x_6 x_9 \\ x_5 x_7 x_1 & \ldots & x_6 x_8 x_2 & \ldots & x_4 x_9 x_3 \\ x_8 x_1 x_4 & \ldots & x_9 x_2 x_5 & \ldots & x_7 x_3 x_6. \end{array}\right.$$

Die neun letzten Combinationen ergeben sich aus den Gleichungen (3, 4, 5). Zu den drei ersten gelangt man durch folgende Betrachtung: Je zwei Wurzeln der Gleichung (1) haben eine ihnen zugehörige conjugirte dritte. In den drei letzten Gruppen ist die Wurzel x_1 combinirt mit jeder andern Wurzel; mit Ausnahme von x_2 und x_3. Desshalb kann die zu x_1 und x_2 conjugirte Wurzel nur x_3 sein. Ebenso ist in den drei letzten Gruppen die Wurzel x_4 mit jeder andern combinirt, mit Ausnahme von x_5 und x_6, und die Wurzel x_7 ist mit jeder andern combinirt, mit Ausnahme von x_8 und x_9. Es müssen daher x_4, x_5, x_6, und ebenso x_7, x_8, x_9 conjugirte Wurzeln sein.

Es ist für die folgende Betrachtung von Wichtigkeit, zu bemerken, dass die angegebene Vertheilung der zwölf Combinationen der conjugirten Wurzeln in solche Gruppen, welche zugleich alle Wurzeln enthalten, die einzig mögliche ist. Von welchen drei nicht conjugirten Wurzeln der Gleichung (1) wir also auch ausgehen: der angegebene Algorithmus führt immer auf die vier Gruppen (6).

Die 72 Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln bleiben übrig, wenn man von sämmtlichen Combinationen der neun Wurzeln zur dritten Classe die zwölf angeführten Combinationen der conjugirten Wurzeln weglässt.

Unsere Gleichung (1) vom neunten Grade hat die Eigenschaft, dass sich alle Wurzeln derselben durch drei nicht conjugirte Wurzeln ausdrücken lassen. In der That: setzt man die Werthe von (3) in (4) und nimmt die Gleichungen (3) hinzu, so hat man folgende Ausdrücke der neun Wurzeln:

$$\begin{array}{lll} x_1 = x_1; & x_2 = \theta(x_4, x_7); & x_3 = \theta(\theta(x_7, x_1),\ \theta(x_1, x_4)); \\ x_4 = x_4; & x_5 = \theta(x_7, x_1); & x_6 = \theta(\theta(x_1, x_4),\ \theta(x_4, x_7)); \\ x_7 = x_7; & x_8 = \theta(x_1, x_4); & x_9 = \theta(\theta(x_4, x_7),\ \theta(x_7, x_1)). \end{array}$$

Setzt man für die Wurzeln x_1, x_4, x_7 irgend drei andere $x_\varkappa$, $x_{\varkappa'}$, $x_{\varkappa''}$ nicht conjugirte Wurzeln, so wird jede Wurzel in eine andere übergehen. Nehmen wir an, dass durch diese Aenderung die Wurzeln x_1, x_2, x_3; x_4, x_5, x_6; x_7, x_8, x_9 respective in $x_\varkappa$, x_λ, x_μ; $x_{\varkappa'}$, $x_{\lambda'}$, $x_{\mu'}$; $x_{\varkappa''}$, $x_{\lambda''}$, $x_{\mu''}$ übergehen, so stellen sich sämmtliche Wurzeln der Gleichung (1) als Functionen der drei nicht conjugirten Wurzeln $x_\varkappa$, $x_{\varkappa'}$, $x_{\varkappa''}$ dar, wie folgt:

$$7. \quad \begin{cases} x_\varkappa \;\;= x_\varkappa, & x_\lambda \;\;= \theta(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}), & x_\mu \;\;= \theta\big(\theta(x_{\varkappa''}, x_\varkappa), \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'})\big), \\ x_{\varkappa'} \;= x_{\varkappa'}, & x_{\lambda'} \;= \theta(x_{\varkappa''}, x_\varkappa), & x_{\mu'} \;= \theta\big(\theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'}), \theta(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})\big), \\ x_{\varkappa''} = x_{\varkappa''}, & x_{\lambda''} = \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'}), & x_{\mu''} = \theta\big(\theta(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}), \theta(x_{\varkappa''}, x_\varkappa)\big), \end{cases}$$

und die erste Gruppe (6) geht über in:

$$8. \qquad x_\varkappa x_\lambda x_\mu \quad .\;.\;.\;. \quad x_{\varkappa'} x_{\lambda'} x_{\mu'} \quad .\;.\;.\;. \quad x_{\varkappa''} x_{\lambda''} x_{\mu''},$$

welches wir als einen allgemeinen Ausdruck für die vier Gruppen (6) betrachten können. Denn er geht, indem wir auf die Reihenfolge der drei Combinationen keine Rücksicht nehmen, in die eine oder die andere der vier Gruppen (6) über, je nachdem man in (7) statt $x_\varkappa$, $x_{\varkappa'}$, $x_{\varkappa''}$ diese oder jene nicht conjugirten Wurzeln setzt. Wenn man demnach statt $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ nach einander die 72 Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln setzt, so wird der allgemeine Ausdruck (8) 18 mal in jede der vier Gruppen (6) übergehen.

Es bleibt noch übrig, diejenigen Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln anzugeben, welche für $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ zu setzen sind, damit der allgemeine Ausdruck (8) in eine und dieselbe Gruppe (6), zum Beispiel in die erste übergehe. Diese Combinationen erhält man, wenn man auf jede mögliche Art aus jeder Combination der ersten Gruppe eine Wurzel heraushebt und diese drei Wurzeln zu einer neuen Combination zusammenstellt, wobei zu sorgen ist, dass die neun Combinationen conjugirter Wurzeln der drei anderen Gruppen, welche auf diese Weise mit entstehen, weggelassen werden. Denn setzt man z. B. $x_\varkappa = x_2$, $x_{\varkappa'} = x_4$, $x_{\varkappa''} = x_9$, welches drei nicht conjugirte Wurzeln aus der ersten Gruppe (6) sind, jede aus einer andern Combination dieser Gruppe genommen, so geht der allgemeine Ausdruck (8) über in:

$$x_2 x_\lambda x_\mu \quad .\;.\;.\;. \quad x_4 x_{\lambda'} x_{\mu'} \quad .\;.\;.\;. \quad x_9 x_{\lambda''} x_{\mu''},$$

und man überzeugt sich leicht durch die Ansicht der Tafel (6), dass von dieser Form nur die erste Gruppe sein kann, weil in den übrigen Gruppen von den Wurzeln x_2, x_4, x_9 nicht jede in einer andern Combination vorkommt, etc.

Wir bemerken noch, dass der allgemeine Ausdruck (8) der Gruppen (6) in

$$x_\varkappa x_\varkappa x_\varkappa \quad .\;.\;.\;. \quad x_{\varkappa'} x_{\varkappa'} x_{\varkappa'} \quad .\;.\;.\;. \quad x_{\varkappa''} x_{\varkappa''} x_{\varkappa''},$$

übergeht, wenn für $x_\varkappa$, $x_{\varkappa'}$, $x_{\varkappa''}$ conjugirte Wurzeln gesetzt werden; was 12 mal geschehen kann.

2.

Die Auflösung der Gleichung (1) vom neunten Grade lässt sich auf die Auflösung einer Gleichung vom vierten und mehrerer Gleichungen vom dritten Grade zurückführen, also durch Wurzelgrössen ausdrücken. Um diese Gleichungen zu bilden, nehmen wir von den zwölf Combinationen (6) der conjugirten Wurzeln eine beliebige heraus: z. B.

$$x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu,$$

zwischen welchen Wurzeln der Annahme nach die Gleichungen (2) stattfinden, und bilden folgende symmetrische Function der genannten drei Wurzeln:

$$9. \qquad y_{\varkappa,\lambda,\mu} = (\alpha - x_\varkappa)\,.\,(\alpha - x_\lambda)\,.\,(\alpha - x_\mu)$$

vom dritten Grade, in Rücksicht auf die unbestimmte Constante α. Diese Function nimmt, wenn man statt $x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu$ nach einander die zwölf Combinationen (6) setzt, die jenen Combinationen entsprechenden Werthe an, nämlich:

$$10. \qquad \begin{cases} y_{1,2,3} & \cdots & y_{4,5,6} & \cdots & y_{7,8,9} \\ y_{2,4,7} & \cdots & y_{3,5,8} & \cdots & y_{1,6,9} \\ y_{5,7,1} & \cdots & y_{6,8,2} & \cdots & y_{4,9,3} \\ y_{8,1,4} & \cdots & y_{9,2,5} & \cdots & y_{7,3,6}. \end{cases}$$

Wir bilden ferner folgende symmetrische Function der Elemente $y_{\varkappa,\lambda,\mu},\ y_{\varkappa',\lambda',\mu'},\ y_{\varkappa'',\lambda'',\mu''}$:

$$11. \qquad z = (\beta - y_{\varkappa,\lambda,\mu})\,.\,(\beta - y_{\varkappa',\lambda',\mu'})\,.\,(\beta - y_{\varkappa'',\lambda'',\mu''})$$

vom dritten Grade in Rücksicht auf die unbestimmte Constante β. Diese Function nehme, indem man für die Elemente $y_{\varkappa,\lambda,\mu},\ y_{\varkappa',\lambda',\mu'},\ y_{\varkappa'',\lambda'',\mu''}$ nach einander die vier Reihen Werthe (10) setzt, selbst die vier Werthe

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$$

an. Bilden wir endlich die Gleichung

$$12. \qquad z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0$$

vierten Grades, deren Wurzeln die genannten Werthe der Function z sind, so lassen sich die Coëfficienten A dieser Gleichung mit Hülfe der symmetrischen Functionen der Wurzeln der in Rede stehenden Gleichungen aus den Coëfficienten der gegebenen Gleichung (1) und den in der Function $\theta(x_\varkappa, x_\lambda)$ steckenden, ebenfalls gegebenen Constanten zusammensetzen.

Denn setzen wir in dem Theile rechts der Gleichung (11) für die Elemente ihre Werthe:

$$13.\qquad \begin{cases} y_{\varkappa,\lambda,\mu} = (\alpha - x_\varkappa)\,.\,(\alpha - x_\lambda)\,.\,(\alpha - x_\mu), \\ y_{\varkappa',\lambda',\mu'} = (\alpha - x_{\varkappa'})\,.\,(\alpha - x_{\lambda'})\,.\,(\alpha - x_{\mu'}), \\ y_{\varkappa'',\lambda'',\mu''} = (\alpha - x_{\varkappa''})\,.\,(\alpha - x_{\lambda''})\,.\,(\alpha - x_{\mu''}), \end{cases}$$

und drücken mit Hülfe der Gleichungen (7) die neun Wurzeln $x_\varkappa, x_\lambda \ldots\ldots x_{\mu''}$ der Gleichung (1) durch die drei nicht conjugirten Wurzeln $x_\varkappa$, $x_{\varkappa'}$, $x_{\varkappa''}$ aus, so erhalten wir

$$14.\qquad z = \psi(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}),$$

wenn durch $\psi(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ diejenige rationale und symmetrische Function der drei nicht conjugirten Wurzeln bezeichnet wird, in welche der Theil rechts der Gleichung (11) dadurch übergeht. Erheben wir den Theil rechts dieser Gleichung zu einer beliebigen ganzen, z. B. zur $m$ten Potenz und bezeichnen durch $\Sigma''\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ die Summe der Terme, welche aus dem einen $\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ hervorgehen, wenn man in demselben statt $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ nach einander die 72 Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln setzt; durch $\Sigma'\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ die Summe der Terme, welche man aus dem genannten erhält, wenn man statt $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ nach einander die zwölf Combinationen der conjugirten Wurzeln setzt; endlich durch $\Sigma\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ die Summe aller Terme, welche aus dem genannten Term hervorgehen, indem man statt $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ sämmtliche Combinationen der neun Wurzeln der Gleichung (1) zur dritten Classe setzt, so erhält man:

$$15.\qquad \Sigma''\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}) + \Sigma'\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}) = \Sigma\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}).$$

Der Theil rechts dieser Gleichung ist eine rationale und symmetrische Function sämmtlicher Wurzeln der Gleichung (1). Man kann ihn demnach durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung (1) ausdrücken. Auch die Summe $\Sigma'\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ lässt sich als eine symmetrische Function sämmtlicher Wurzeln der Gleichung (1) darstellen. Denn da $x_\varkappa$, $x_{\varkappa'}$, $x_{\varkappa''}$ in dieser Summe conjugirte Wurzeln bedeuten, zwischen welchen die Gleichungen (2) stattfinden, so ist

$$\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}) = \psi^m\big(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'})\big) = \psi^m\big(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}, \theta(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})\big)$$
$$= \psi^m\big(x_{\varkappa''}, x_\varkappa, \theta(x_{\varkappa''}, x_\varkappa)\big).$$

Bezeichnen wir nun die Summe der 36 Terme, welche aus dem einen $\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'}))$, der eine symmetrische Function der beiden Wurzeln $x_\varkappa$, $x_{\varkappa'}$ ist, entstehen, indem wir für $x_\varkappa$, $x_{\varkappa'}$ nach einander die Combinationen der neun Wurzeln der Gleichung (1) zur zweiten Classe setzen, durch $\Sigma\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'}))$, so haben wir

$$16. \qquad \Sigma'\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}) = \tfrac{1}{3}\Sigma\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'})).$$

Der rechte Theil dieser Gleichung ist aber eine rationale symmetrische Function sämmtlicher Wurzeln der Gleichung (1). Ziehen wir die Gleichung (16) von (15) ab, so erhalten wir:

$$17. \quad \Sigma''\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}) = \Sigma\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}) - \tfrac{1}{3}\Sigma\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'})).$$

Die Summe $\Sigma''\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ stellt sich auf diese Weise als die Differenz zweier rationaler und symmetrischer Functionen der Wurzeln der Gleichung (1) dar. Erwägt man nun, dass für die 72 Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln die Function $z^m = \psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ nur die vier Werthe z_1^m, z_2^m, z_3^m, z_4^m annimmt, und zwar jeden Werth 18 mal, so lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$18. \qquad z_1^m + z_2^m + z_3^m + z_4^m = \tfrac{1}{18}\Sigma''\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}).$$

Den Theil rechts dieser Gleichung haben wir aber in (17) als eine rationale und symmetrische Function der neun Wurzeln der Gleichung (1) dargestellt; wir können ihn also durch die Coëfficienten in der Gleichung (1) und durch bekannte Grössen ausdrücken. Setzt man statt m in (18) nach einander die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., so erhält man die Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung (12). Da sich durch diese aber die Coëfficienten A der Gleichung (12) rational ausdrücken lassen, so kann man auch die Coëfficienten in der Gleichung (12) durch die Coëfficienten in der Gleichung (1) und durch bekannte Grössen ausdrücken.

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung (1) bestimmen wir nun auf folgende Art. Wir suchen eine beliebige Wurzel der Gleichung (12). Diese wird, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, eine ganze Function in Rücksicht auf die Constante β sein. Setzen wir diese Wurzel gleich 0, so erhalten wir eine Gleichung dritten Grades in Rücksicht auf β. Die drei Wurzeln dieser Gleichung dritten Grades sind drei in einer Horizontalreihe stehende Werthe (10). Setzen wir eine dieser Wurzeln gleich 0,

so erhalten wir eine zweite Gleichung dritten Grades in Rücksicht auf die Constante α. Die drei Wurzeln α dieser Gleichung werden dann drei conjugirte Wurzeln der Gleichung (1) sein.

Um alle conjugirten Wurzeln der Gleichung (1) zu finden, darf man nur mit sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (12) auf die angegebene Weise verfahren.

3.

Das Problem der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung, welches darin besteht, diejenigen Werthe der Variabeln zu bestimmen, welche zweien gegebenen, von einander abhängigen Gleichungen dritten Grades mit zwei Variabeln zu gleicher Zeit genügen, führt, wenn man eine Variable eliminirt, auf eine Gleichung neunten Grades mit einer Unbekannten, deren Wurzeln dieselbe Eigenschaft haben, welche ich zwischen den Wurzeln der im Vorhergehenden behandelten Gleichung (1) annahm.[1]) Dieses werde ich im Folgenden nachweisen, indem ich mit der Ableitung der Gleichungen den Anfang mache, welche die Wendepunkte einer Curve $n$ter Ordnung bestimmen.

Wenn U eine beliebige ganze homogene Function zweier Variabeln x, y vom $n$ten Grade bedeutet, so ist $U = 0$ eine beliebige Gleichung $n$ten Grades in Rücksicht auf die Unbekannte $\frac{x}{y}$. Als Bedingung, dass diese Gleichung drei gleiche Wurzeln habe, pflegt man die drei Gleichungen anzugeben:

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

welche für die gleiche Wurzel zugleich erfüllt werden müssen. Diese Gleichungen sind respective vom n, $(n-1)$ und $(n-2)$ten Grade. Man

1) Aus einem vom Januar 1844 aus Rom datirten Schreiben des Herrn Professor Jacobi, dem ich die ersten Resultate meiner Untersuchung über die Wendepunkte mitgetheilt hatte, hebe ich folgende Stelle heraus. „Sie werden wahrscheinlich auch das allgemeine Problem lösen können: „eine Gleichung neunten Grades aufzulösen, wenn eine gegebene rationale symmetrische Function „$F(x, x')$ je zweier Wurzeln x, x' immer wieder eine dritte Wurzel giebt, in der Art, dass wenn „$F(x, x') = x''$, auch $F(x', x'') = x$, $F(x'', x) = x'$ ist. Denn dieses ist hier bei den Gleichungen „der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung der Fall. Es würde sich so eine neue Classe von „auflösbaren algebraischen Gleichungen eröffnen, welche von denen, auf die Abel die Gauss'sche „Methode ausgedehnt hat, total verschieden sind.“ Auf diese Andeutung hin habe ich die vorliegende Untersuchung der Gleichung neunten Grades unternommen.

kann jedoch an ihrer Stelle drei Gleichungen vom $(n-2)$ten Grade substituiren, welche ganz dasselbe leisten. Denn erwägt man, dass die angegebenen Gleichungen sich auch so darstellen lassen:

$$U = \frac{1}{n.n-1}\left\{x^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{n-1}\left\{x \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + y \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

so folgt aus der zweiten, mit Berücksichtigung der letzten, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$, und mit Berücksichtigung dieser und der letzten, aus der ersten, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$. Die erwähnten Bedingungsgleichungen vom $(n-2)$ten Grade für die Gleichheit dreier Wurzeln der Gleichung $U = 0$ sind demnach:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Allgemein, wenn die Gleichung $U = 0$ m gleiche Wurzeln hat, werden durch die gleiche Wurzel folgende m Gleichungen vom $(n-m+1)$ten Grade erfüllt:

$$\frac{\partial^{m-1} U}{\partial x^{m-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{m-1} U}{\partial x^{m-2} \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^{m-1} U}{\partial x^{m-3} \partial y^2} = 0, \ \ldots \quad \frac{\partial^{m-1} U}{\partial y^{m-1}} = 0.$$

Es sei nun u eine beliebige ganze homogene Function vom $n$ten Grade der drei Variabeln x, y, z. Wenn man durch $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines variabeln Punktes bezeichnet, so ist $u = 0$ die Gleichung einer beliebigen Curve $n$ten Grades. Eine beliebige gerade Linie, deren Gleichung

$$z = ax + by$$

ist, schneidet die Curve u bekanntlich in n Punkten. Setzt man den Werth von z aus der Gleichung der geraden Linie in u, wodurch diese Function in eine homogene Function U von demselben Grade der Variabeln x, y übergeht, so werden die n Wurzeln der Gleichung $U = 0$, in welcher man $\frac{x}{y}$ als die Unbekannte betrachtet, die Verhältnisse der

Coordinaten $\frac{x}{z} : \frac{y}{z}$ der Schnittpunkte der Curve u mit der geraden Linie sein. Die Gleichung der geraden Linie hat aber zwei Constanten a, b, welche mit in die Gleichung $U = 0$ eingehen. Man kann nun die eine von diesen Constanten als Function der andern so bestimmen, dass zwei Wurzeln der Gleichung $U = 0$ gleich werden. In diesem Fall wird die gerade Linie eine Tangente der Curve. Theilt man aber den beiden Constanten solche Werthe zu, dass drei Wurzeln der $U = 0$ gleich werden, so wird die gerade Linie eine Wendetangente, und für den Wendepunkt, in welchem die Wendetangente die Curve berührt, hat man die vorhin aufgestellten Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Da aber $U = u$, wenn $z = ax + by$, so lassen sich die drei Gleichungen, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{1,1}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{2,2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_{3,3},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = u_{2,3}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = u_{3,1}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{1,2}$$

setzt, auch so darstellen:

$$\begin{aligned} &u_{1,1} + 2\,a\,u_{1,3} + a^2 u_{3,3} = 0, \\ &u_{1,2} + \quad a\,u_{2,3} + b\,u_{1,3} + a\,b\,u_{3,3} = 0, \\ &u_{2,2} + 2\,b\,u_{2,3} + b^2 u_{3,3} = 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen a und b, so erhält man die Gleichung einer Curve, welche die gegebene Curve u in den Wendepunkten schneidet. Um diese Elimination auszuführen, bestimmen wir den Werth von a aus der zweiten Gleichung

$$a = -\frac{u_{1,2} + b\,u_{1,3}}{u_{2,3} + b\,u_{3,3}}$$

und setzen diesen Werth in die erste Gleichung. Dadurch erhalten wir

$$u_{1,1}(u_{2,3} + b\,u_{3,3})^2 - 2\,u_{1,3}(u_{1,2} + b\,u_{1,3})(u_{2,3} + b\,u_{3,3}) + u_{3,3}(u_{1,2} + b\,u_{1,3})^2 = 0,$$

oder, nach Potenzen von b geordnet:

$$u_{1,1}\,u_{2,3}^2 - 2\,u_{1,2}\,u_{1,3}\,u_{2,3} + u_{3,3}\,u_{1,2}^2 + (u_{1,1}\,u_{3,3} - u_{1,3}^2)(2\,b\,u_{2,3} + b^2 u_{3,3}) = 0.$$

Ziehen wir diese Gleichung von der dritten, mit dem Factor $(u_{1,1}u_{3,3} - u_{1,3}^2)$ multiplicirten, Gleichung ab und setzen der Kürze wegen

$$v = u_{1,1}u_{2,2}u_{3,3} + 2u_{1,2}u_{1,3}u_{2,3} - u_{1,1}u_{2,3}^2 - u_{2,2}u_{1,3}^2 - u_{3,3}u_{1,2}^2,$$

so ist das Resultat der Elimination:

$$v = 0;$$

welches die Gleichung der gesuchten Curve ist, die die gegebene Curve $u = 0$ in den Wendepunkten schneidet. Da v vom Grade $3(n-2)$ ist, *so hat eine Curve $n$ter Ordnung im Allgemeinen $3n(n-2)$ Wendepunkte.*

Wir werden im Folgenden nur Curven dritter Ordnung betrachten. Setzen wir demnach $n = 3$, so werden die neun Wendepunkte einer Curve $u = 0$ dritter Ordnung die neun Schnittpunkte der beiden Curven dritter Ordnung

$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = 0$$

sein, deren Coordinaten wir durch $\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}; \frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}; \ldots \frac{x_9}{y_9}, \frac{y_9}{z_9}$ bezeichnen wollen. Wie diese beiden Gleichungen auf symmetrische Weise *algebraisch* aufgelöst werden können, habe ich in der Abhandlung „Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen zweiten Grades mit zwei Variabeln" (Crelle's Journal Bd. 28 S. 68 etc.)[1]) auseinandergesetzt. Eliminirt man aber aus den beiden Gleichungen eine Variable y, so erhält man eine Gleichung

$$w = 0$$

vom neunten Grade in Rücksicht auf $\frac{x}{z}$, von welcher ich mit Hülfe des Satzes: *dass jede gerade Linie, welche eine Curve dritter Ordnung in zwei Wendepunkten schneidet, auch durch einen dritten Wendepunkt derselben Curve hindurchgeht,* den Poncelet in dem 8. Bande des Crelle'schen Journals S. 130 beweist, nachweisen werde, dass ihre Wurzeln $\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}, \ldots \frac{x_9}{z_9}$ die Eigenschaft der Wurzeln der Gleichung (1) haben.

1) [Seite 89 ff. dieser Ausgabe.]

Zu diesem Ende bezeichne man die Coordinaten eines beliebigen Punktes derjenigen geraden Linie, welche zwei Wendepunkte verbindet, z. B. die beiden ersten, deren Coordinaten $\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}; \frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}$ sind, mit $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$. Alsdann hat man zur Bestimmung der letzteren die Gleichungen:

$$x = x_1 + \lambda x_2, \qquad y = y_1 + \lambda y_2, \qquad z = z_1 + \lambda z_2.$$

Denn theilt man der Grösse λ nach einander alle möglichen Werthe zu, so geben diese Gleichungen die Coordinaten $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ aller möglichen Punkte auf der geraden Linie, von der Art, dass jedem Werthe von λ die Coordinaten eines bestimmten Punktes der geraden Linie entsprechen. Die gerade Linie schneidet aber, wie der obige Satz lehrt, die Curve u in einem dritten Wendepunkte. Den diesem Punkte entsprechenden Werth von λ erhält man, wenn man die Werthe von x, y, z aus den obigen drei Gleichungen in die Gleichung $u = 0$ setzt und diese Gleichung nach λ auflöst. Durch die angegebene Substitution geht aber die Gleichung $u = 0$, wenn man nach Potenzen von λ ordnet, in

$$(u)_1 + \lambda\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\} + \lambda^2\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} + \lambda^3 (u)_2 = 0$$

über, wo die Indices 1, 2 andeuten, dass in den Ausdrücken, unter welchen sie stehen, x_1, y_1, z_1 oder x_2, y_2, z_2 statt x, y, z zu setzen sind. Lässt man in dieser Gleichung die verschwindenden Glieder $(u)_1$ und $\lambda^3 (u)_2$ weg, dividirt durch λ und löst die Gleichung auf, so erhält man den gesuchten Werth:

$$\lambda = -\frac{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1}{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2},$$

welcher dem dritten Wendepunkte entspricht. Wenn man die Coordinaten dieses Punktes durch $\frac{x_3}{z_3}, \frac{y_3}{z_3}$ bezeichnet, so erhält man aus den obigen drei Gleichungen durch Substitution des Werths von λ und der diesem Werthe entsprechenden Coordinaten des dritten Wendepunktes:

$$\frac{x_3}{z_3} = \frac{x_1\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} - x_2\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\}}{z_1\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} - z_2\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\}},$$

$$\frac{y_3}{z_3} = \frac{y_1\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} - y_2\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\}}{z_1\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} - z_2\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\}}.$$

Diese Gleichungen bleiben ungeändert, wenn man x_1, y_1 und z_1 mit x_2, y_2 und z_2 vertauscht. Sie ändern sich zwar, wenn man x_1, y_1 und z_1 mit x_3, y_3 und z_3 oder x_2, y_2 und z_2 mit x_3, y_3 und z_3 vertauscht, bleiben aber doch richtige Gleichungen. Denn wenn man anstatt von dem ersten und zweiten, von dem zweiten und dritten oder von dem ersten und dritten Wendepunkte ausgegangen wäre, so würde man, da die drei Wendepunkte auf einer und derselben geraden Linie liegen, auf gleiche Weise zu den durch die angegebene Vertauschung geänderten Gleichungen gekommen sein. Bezeichnen wir nun den Theil rechts der ersten Gleichung (welcher sich, wenn man durch $z_1^2 . z_2^2$ Zähler und Nenner dividirt, als eine rationale Function der Coordinaten $\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}; \frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}$ der beiden ersten Wendepunkte darstellt, die, wie bemerkt, ungeändert bleibt, wenn man $\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}$ mit $\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}$ vertauscht) der Kürze wegen durch $f\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}; \frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right)$, so hat man mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen folgende drei Relationen:

$$\frac{x_3}{z_3} = f\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}; \frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right),$$
$$\frac{x_1}{z_1} = f\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}; \frac{x_3}{z_3}, \frac{y_3}{z_3}\right),$$
$$\frac{x_2}{z_2} = f\left(\frac{x_3}{z_3}, \frac{y_3}{z_3}; \frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}\right).$$

Den Theilen rechts dieser Gleichungen kann man noch eine andere Gestalt geben, indem man mit Hülfe der Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, welche für die Wendepunkte zugleich erfüllt werden, die Grössen $\frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \frac{y_3}{z_3}$ eliminirt. Die homogenen Functionen u und v vom dritten

Grade gehen, wenn man sie durch z^3 dividirt, in Functionen der Grössen $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ von demselben Grade über. Stellt man sich letztere nach Potenzen von $\frac{y}{z}$ geordnet vor und bezeichnet durch $F\left(\frac{y}{z}\right)$ eine beliebige ganze Function vierter Ordnung von $\frac{y}{z}$, welche weder für $\frac{y}{z}=\frac{y_1}{z_1}$, noch für $\frac{y}{z}=\frac{y_2}{z_2}$, noch für $\frac{y}{z}=\frac{y_3}{z_3}$ verschwindet, so kann man, wie am Anfange unserer Untersuchung, folgende identische Gleichungen aufstellen:

$$A_0 F\left(\frac{y}{z}\right)+B_0\cdot\frac{u}{z^3}+C_0\cdot\frac{v}{z^3}=1,$$
$$A_1 F\left(\frac{y}{z}\right)+B_1\cdot\frac{u}{z^3}+C_1\cdot\frac{v}{z^3}=\frac{y}{z},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_4 F\left(\frac{y}{z}\right)+B_4\cdot\frac{u}{z^3}+C_4\cdot\frac{v}{z^3}=\frac{y^4}{z^4},$$

in welchen die zu bestimmenden Grössen A unabhängig von $\frac{y}{z}$ sind, die Grössen B und C aber zu bestimmende Functionen ersten Grades in Rücksicht auf $\frac{y}{z}$ bedeuten. Denn setzt man, nachdem man die Gleichungen nach Potenzen von $\frac{y}{z}$ entwickelt hat, die Coëfficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten der Gleichungen einander gleich, so erhält man gerade so viele lineäre Gleichungen, als unbekannte Grössen zu bestimmen sind. Bei dieser Bestimmung werden die genannten Grössen rationale Functionen von $\frac{x}{z}$. Dividirt man nun die $(k+1)$te Gleichung durch die nächst vorhergehende, so erhält man

$$\frac{y}{z}=\frac{A_k F\left(\frac{y}{z}\right)+B_k\cdot\frac{u}{z^3}+C_k\cdot\frac{v}{z^3}}{A_{k-1} F\left(\frac{y}{z}\right)+B_{k-1}\cdot\frac{u}{z^3}+C_{k-1}\cdot\frac{v}{z^3}}.$$

Bezeichnet man den Quotienten $\frac{A_k}{A_{k-1}}$, welcher eine von $\frac{y}{z}$ unabhängige rationale Function von $\frac{x}{z}$ ist, durch $\vartheta\left(\frac{x}{z}\right)$ und setzt für

$\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ in der Gleichung nach einander die Coordinaten der drei betrachteten Wendepunkte, so erhält man

$$\frac{y_1}{z_1} = \vartheta\left(\frac{x_1}{z_1}\right), \quad \frac{y_2}{z_2} = \vartheta\left(\frac{x_2}{z_2}\right), \quad \frac{y_3}{z_3} = \vartheta\left(\frac{x_3}{z_3}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die obigen drei umzugestaltenden Gleichungen und bezeichnet die Function $f\left(\frac{x_1}{z_1}, \vartheta\left(\frac{x_1}{z_1}\right); \frac{x_2}{z_2}, \vartheta\left(\frac{x_2}{z_2}\right)\right)$, in welche der Theil rechts der ersten Gleichung durch die Substitution übergeht, und welche eine symmetrische Function der beiden Elemente $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{x_2}{z_2}$ ist, der Kürze wegen durch $\theta\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}\right)$, so nehmen die obigen Gleichungen die Gestalt

$$\frac{x_3}{z_3} = \theta\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}\right),$$
$$\frac{x_1}{z_1} = \theta\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{x_3}{z_3}\right),$$
$$\frac{x_2}{z_2} = \theta\left(\frac{x_3}{z_3}, \frac{x_1}{z_1}\right)$$

an. Diese Gleichungen beweisen aber, dass, wenn $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{x_2}{z_2}$ zwei Wurzeln der Gleichung $w = 0$ neunten Grades sind, welche durch Elimination von y aus den beiden Gleichungen $u = 0$ und $v = 0$ hervorgeht, die symmetrische Function $\theta\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}\right)$ der beiden Wurzeln eine dritte Wurzel giebt, in der Art, dass, wenn $\frac{x_3}{z_3} = \theta\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}\right)$, auch $\frac{x_1}{z_1} = \theta\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{x_3}{z_3}\right)$ und $\frac{x_2}{z_2} = \theta\left(\frac{x_3}{z_3}, \frac{x_1}{z_1}\right)$ ist.

Königsberg, im October 1846.

11.

Ueber Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren.

(Fortsetzung der Abhandlungen No. 10 und 11, 28. Bandes des Journals für die reine und angewandte Mathematik [No. 8 und 9 dieser Ausgabe]).

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 36, Seite 143—176.]

1.

Wenn man durch f eine homogene Function dritter Ordnung von den Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet, so wird die Determinante φ, gebildet aus den zweiten partiellen Differentialquotienten

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}, \end{array}$$

wieder eine homogene Function der dritten Ordnung, welche ich in meiner Abhandlung „Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln“ (Crelle's Journal Bd. 28, S. 68)[1]) mit dem Namen *Determinante der Function* f bezeichnet habe. Dieser Bezeichnung werde ich mich auch bei der vorliegenden Untersuchung bedienen, welche als eine geometrische Interpretation und Erweiterung der in der citirten Schrift gewonnenen analytischen Resultate anzusehen ist.

1) [No. 8, Seite 89 dieser Ausgabe.]

Während nun die Bestimmung der Determinante einer gegebenen homogenen Function dritten Grades von drei Variabeln nur die einfachsten analytischen Operationen erfordert, führt die umgekehrte Aufgabe: „Diejenige Function F zu bestimmen, deren Determinante eine gegebene homogene Function dritter Ordnung von drei Variabeln ist“, auf eine Gleichung dritten Grades. Denn ich habe in der citirten Abhandlung S. 89 [1]) bewiesen, dass die gesuchte Function von der Form

$$F = df + \delta\varphi$$

sein muss, und dass die Determinante Φ einer Function von dieser Form wieder dieselbe Form

$$\Phi = Df + \Delta\varphi$$

hat; wo D und Δ homogene Functionen der Constanten d und δ von der dritten Ordnung sind. Auch die Bildung dieser Functionen habe ich angegeben. [2])

Wenn Φ gleich f werden soll, so muss

$$D = 1; \quad \Delta = 0$$

sein. Dieses sind zwei Gleichungen dritten Grades in Rücksicht auf die zu bestimmenden Grössen d und δ, welche neun Auflösungen zulassen.

1) [Seite 113 dieser Ausgabe.]

2) Die Bildung der Functionen D und Δ ist S. 88 [112 d. Ausg.] durch die Formeln (51)

$$RD = \Phi\left(\frac{1}{\varrho}\cdot q\right); \qquad R\Delta = \Phi(p)$$

angedeutet. Die Grösse R zu bestimmen, dienen die Gleichungen (32* S. 83 [106 d. Ausg.]), in welchen die Grössen a und b die Coëfficienten der Potenzen und Producte der Variabeln in den Functionen f und φ, also bekannte Grössen bedeuten. Löst man diese, in Rücksicht auf die sechs Producte x_1x_1, x_2x_2, x_3x_3, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 linearen Gleichungen auf, so, als ob die sechs Producte die Unbekannten wären: so erhält man, wie ich nachgewiesen habe, Gleichungen von der Form (33*), in welchen R den gemeinsamen Nenner der Unbekannten bedeutet. Sowohl dieser Nenner, als die Coëfficienten der sechs Grössen f_1, f_2, f_3, φ_1, φ_2, φ_3, welche mit $\frac{1}{\varrho}\cdot q$ und p bezeichnet worden sind, werden durch die Auflösung bekannt. Bildet man endlich die Determinante Φ der Function F und setzt in derselben für alle Producte $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ entweder $\frac{1}{\varrho}\cdot q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ oder $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$, so erhält man im ersten Falle den mit $\Phi\left(\frac{1}{\varrho}q\right)$ bezeichneten Ausdruck, im zweiten Fall den Ausdruck $\Phi(p)$. Diese Bestimmung der Functionen D und Δ lässt in der That nichts weiter als etwa grössere Einfachheit zu wünschen übrig. Da gleichwohl Herr Cayley (Crelle's Journal Bd. 29, S. 55) behauptet, dass ich die Form der Functionen D und Δ nicht angegeben habe, so sehe ich, dass meine Darstellung einen Zweifel hat aufkommen lassen, den ich jetzt beseitigt zu haben glaube.

Da aber sowohl D als Δ homogene Functionen dritten Grades sind, in Rücksicht auf d und δ, so werden $\frac{D}{d^3}$ und $\frac{\Delta}{d^3}$ Functionen dritten Grades der einen Variablen $\frac{\delta}{d}$ sein. Führt man diese statt δ als Unbekannte ein, so finden sich die beiden Unbekannten d und $\frac{\delta}{d}$ aus den beiden Gleichungen

$$d^3 = \frac{1}{\frac{D}{d^3}} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta}{d^3} = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen giebt drei Werthe der zweiten Unbekannten. Setzt man diese Werthe in den Theil rechts der ersten Gleichung, so erhält man für jeden Werth der zweiten Unbekannten drei Werthe der ersten, welche sich nur durch einen Factor, gleich der dritten Wurzel der Einheit, von einander unterscheiden. Man findet also neun Functionen F, deren Determinanten die gegebene Function f sind, wenn man die neun Werthenpaare der Unbekannten in die Gleichung

$$F = d\left(f + \frac{\delta}{d}\varphi\right)$$

setzt.

Von diesen neun Functionen F sind aber nur die drei, welche den drei Wurzeln der cubischen Gleichung $\frac{\Delta}{d^3} = 0$ entsprechen, wesentlich von einander verschieden. Denn es ergeben sich aus ihnen die sechs andern durch Multiplication mit den dritten Wurzeln der Einheit. Wenn im Folgenden von den drei verschiedenen Functionen F die Rede sein wird, so sollen darunter nur die drei ersten verstanden werden.

2.

Wenn f eine der drei Functionen bedeutet, deren Determinante gleich einer beliebigen gegebenen homogenen Function φ dritter Ordnung von den drei Variabeln x_1, x_2, x_3 ist, und man der Kürze wegen setzt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = u_{1,1}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = u_{2,2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = u_{3,3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = u_{2,3} = u_{3,2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = u_{3,1} = u_{1,3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{1,2} = u_{2,1},$$

so erhält man die Gleichung $\varphi = 0$, wenn man X_1, X_2, X_3 zwischen folgenden drei Gleichungen eliminirt:

$$1. \quad \begin{cases} X_1 u_{1,1} + X_2 u_{1,2} + X_3 u_{1,3} = 0, \\ X_1 u_{2,1} + X_2 u_{2,2} + X_3 u_{2,3} = 0, \\ X_1 u_{3,1} + X_2 u_{3,2} + X_3 u_{3,3} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung $\varphi = 0$ ist unter der Voraussetzung, dass $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$, oder, wie ich mich kürzer ausdrücken werde, x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines variabeln Punktes p bezeichnen, der analytische Ausdruck einer beliebigen Curve dritter Ordnung. Diese Curve wird der Gegenstand der folgenden Untersuchung sein. Den Coordinaten x_1, x_2, x_3 jedes Punktes dieser Curve entspricht ein System Werthe X_1, X_2, X_3, welches den Gleichungen (1) genügt. Betrachtet man diese Werthe, in demselben Coordinatensystem, als die Coordinaten eines zweiten Punktes P, so entspricht unter der Vermittelung der Gleichungen (1) einem jeden Punkte p der Curve $\varphi = 0$ ein anderer Punkt P derselben Curve; und umgekehrt dem Punkte P der Punkt p. Denn man kann in den Gleichungen (1) x_1, x_2, x_3 mit X_1, X_2, X_3 vertauschen, ohne die Gleichungen selbst zu ändern; wesshalb auch das Resultat der Elimination von x_1, x_2, x_3, welches den geometrischen Ort des Punktes P giebt, aus der Gleichung $\varphi = 0$ hervorgeht, wenn man X_1, X_2, X_3 statt x_1, x_2, x_3 setzt.

Die Gleichungen (1) lassen eine leichte geometrische Deutung zu. Sie sind die Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der beiden Punkte P und p, welche erfüllt werden müssen, wenn die genannten beiden Punkte harmonische Pole der drei Kegelschnitte

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

sind; oder, was dasselbe ist, eines jeden Kegelschnitts aus dem durch die Gleichung

$$\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

dargestellten Systeme von Kegelschnitten. Die Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ ist der geometrische Ort dieser Pole. (Harmonische Pole eines Kegelschnitts nennt man bekanntlich jedes Punktenpaar, von der Eigenschaft, dass die durch sie gelegte gerade Linie den Kegelschnitt in einem zweiten Punktenpaar schneidet, welches zu dem ersten harmonisch ist.)

Construirt man also ein Paar Punkte, welche harmonische Pole sind, zugleich für alle drei Kegelschnitte, oder für das ganze System von Kegelschnitten: so sind dieselben zwei unter der Vermittelung der Gleichungen (1) einander entsprechende Punkte P und p und liegen beide in der betrachteten Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$.

Wenn zwei solcher Punktenpaare gegeben sind, so findet man ein drittes Paar durch Anwendung des folgenden Lehrsatzes, dessen Beweis ich in Bd. 20, S. 301 des Crelle'schen Journals[1]) gegeben habe, nämlich: *Wenn die Endpunkte zweier Diagonalen eines vollständigen Vierseits zwei Paare harmonischer Pole eines Kegelschnitts sind, so sind auch die Endpunkte der dritten Diagonale harmonische Pole desselben Kegelschnitts.*

Der analytische Beweis dieses Satzes ergiebt sich aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der sechs Punkte, welche die Diagonalen eines vollständigen Vierseits begrenzen. Wenn man nämlich durch x_1, x_2, x_3 und X_1, X_2, X_3 die Coordinaten der Endpunkte p, P der ersten, durch x_1', x_2', x_3'; X_1', X_2', X_3' die Endpunkte p', P' der zweiten Diagonale, endlich durch x_1'', x_2'', x_3'' und X_1'', X_2'', X_3'' die Endpunkte p'', P'' der dritten Diagonale bezeichnet, so sind die erwähnten Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
A x_1 X_1 + A' x_1' X_1' + A'' x_1'' X_1'' &= 0, \\
A x_2 X_2 + A' x_2' X_2' + A'' x_2'' X_2'' &= 0, \\
A x_3 X_3 + A' x_3' X_3' + A'' x_3'' X_3'' &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(x_2 X_3 + x_3 X_2) + A'(x_2' X_3' + x_3' X_2') + A''(x_2'' X_3'' + x_3'' X_2'') &= 0, \\
A(x_3 X_1 + x_1 X_3) + A'(x_3' X_1' + x_1' X_3') + A''(x_3'' X_1'' + x_1'' X_3'') &= 0, \\
A(x_1 X_2 + x_2 X_1) + A'(x_1' X_2' + x_2' X_1') + A''(x_1'' X_2'' + x_2'' X_1'') &= 0,
\end{aligned}$$

in welchen die Grössen A, A', A'' unbestimmte Constanten bedeuten. Stellt man nun die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1,1} x_1 X_1 + \alpha_{2,2} x_2 X_2 + \alpha_{3,3} x_3 X_3 + \alpha_{2,3}(x_2 X_3 + x_3 X_2) + \alpha_{3,1}(x_3 X_1 + x_1 X_3) \\
&\qquad + \alpha_{1,2}(x_1 X_2 + x_2 X_1) = 0, \\
&\alpha_{1,1} x_1' X_1' + \alpha_{2,2} x_2' X_2' + \alpha_{3,3} x_3' X_3' + \alpha_{2,3}(x_2' X_3' + x_3' X_2') + \alpha_{3,1}(x_3' X_1' + x_1' X_3') \\
&\qquad + \alpha_{1,2}(x_1' X_2' + x_2' X_1') = 0, \\
&\alpha_{1,1} x_1'' X_1'' + \alpha_{2,2} x_2'' X_2'' + \alpha_{3,3} x_3'' X_3'' + \alpha_{2,3}(x_2'' X_3'' + x_3'' X_2'') + \alpha_{3,1}(x_3'' X_1'' + x_1'' X_3'') \\
&\qquad + \alpha_{1,2}(x_1'' X_2'' + x_2'' X_1'') = 0
\end{aligned}$$

1) [Seite 41 dieser Ausgabe.]

auf, welche erfüllt werden müssen, wenn die drei Punktenpaare harmonische Pole eines Kegelschnitts

$$\alpha_{1,1}x_1^2 + \alpha_{2,2}x_2^2 + \alpha_{3,3}x_3^2 + 2\,\alpha_{2,3}x_2x_3 + 2\,\alpha_{3,1}x_3x_1 + 2\,\alpha_{1,2}x_1x_2 = 0$$

sein sollen, so wird man wahrnehmen, dass sich die letzte Bedingungsgleichung mit Hülfe der beiden ersten und der vorhergehenden Systeme von sechs Gleichungen findet, wenn man die Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{1,2}$ multiplicirt und die Producte addirt.

Vermöge des eben bewiesenen Satzes erhält man nun aus zwei Punktenpaaren P, p; P', p', deren Coordinaten den Gleichungen (1) genügen, ein drittes Paar, wenn man der Curve dritter Ordnung ein Viereck einschreibt, dessen Diagonalen Pp und $P'p'$ sind, dieses Viereck vervollständigt und die Endpunkte der dritten Diagonale nimmt. Dieses lässt sich auch als Lehrsatz wie folgt aussprechen: *Wenn drei Punkte P, P', P'' der Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ auf einer geraden Linie liegen, so bilden die ihnen unter der Vermittelung der Gleichungen* (1) *entsprechenden Punkte p, p', p'' die Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten $p'p''$, $p''p$, pp' respective durch die Punkte P, P', P'' gehen.*

Es ergiebt sich hieraus zugleich eine leichte Construction des, einem beliebigen Punkte P der Curve entsprechenden Punktes p; wenn *ein* solches Punktenpaar P', p' gegeben ist. Denn verbindet man die Punkte P, P' durch eine gerade Linie, so schneidet dieselbe die Curve in einem Punkte P''. Verbindet man diesen mit dem Punkte p' durch eine zweite gerade Linie, so schneidet letztere die Curve in dem gesuchten Punkte p. Man erhält aber auch denselben Punkt p, wenn man den Schnittpunkt p'' der geraden Linie Pp' und der Curve mit dem Punkte P' durch eine gerade Linie verbindet. Denn diese geht ebenfalls durch den Punkt p.

Um zu jedem Punkte P den unter Vermittelung der Gleichungen (1) entsprechenden Punkt p construiren zu können, wenn nichts weiter als die Curve $\varphi = 0$ selbst gegeben ist, bleibt noch übrig, die Construction *eines* Punktenpaares P', p' zu finden. Zu diesem Zwecke stellen wir uns den Punkt P dem Punkte P' so nahe gerückt vor, dass beide zusammenfallen. Die gerade Linie PP' wird in diesem Falle zur Tangente der Curve. Die ihnen entsprechenden Punkte p, p' fallen ebenfalls zusammen. Zieht man nun von dem Schnittpunkte P'' der Tangente PP' und der Curve

die gerade Linie $P''p'$, welche, wie wir gesehen haben, durch p geht, so wird, weil p und p' zusammenfallen, die gerade Linie $P''p'$ eine Tangente im Punkte p werden. Demnach kann der einem beliebigen Punkte P' unter Vermittelung der Gleichungen (1) entsprechende Punkt p' auf folgende Weise construirt werden. Man ziehe die Tangente in dem Punkte P'. Von dem Schnittpunkte P'' derselben mit der Curve ziehe man eine andere Tangente. Der Berührungspunkt dieser zweiten Tangente wird der gesuchte Punkt p' sein. Nun lassen sich aber von einem Punkte P'' der Curve, wenn man die Tangente in diesem Punkte ausnimmt, vier Tangenten an die Curve ziehen, von denen die eine die Tangente im Punkte P' ist. Von den Berührungspunkten der drei andern wird demnach jeder dem Punkte P' entsprechen. Und in der That giebt es auch drei, einem gegebenen Punkte P' der Curve unter Vermittelung der Gleichungen (1) entsprechende Punkte p'. Denn da in die Gleichungen (1) die Coëfficienten aus der Function f eingehen, aber, wie man gesehen hat, drei verschiedene Functionen f existiren: so vereinigt auch das System der Gleichungen (1) drei verschiedene, den drei Functionen f entsprechende Systeme von Gleichungen, und in jedem derselben entspricht ein und demselben Punkte P ein anderer Punkt p. Die eben angegebene Construction lässt sich in Form eines Lehrsatzes wie folgt ausdrücken: *Wenn man von einem beliebigen Punkte der Curve dritter Ordnung* $\varphi = 0$ *die vier Tangenten an die Curve zieht (die Tangente in dem beliebigen Punkte nicht mitgerechnet): so entsprechen einem jeden Tangirungspunkte die drei übrigen in den drei verschiedenen, durch die Gleichungen (1) analytisch ausgedrückten Systemen.* Um diese drei Systeme sich entsprechender Punkte auch geometrisch zu sondern, ohne dazu der drei in (1) enthaltenen Systeme von Gleichungen zu bedürfen, dient die vorangeschickte Construction des dem Punkte P entsprechenden Punktes p, wenn ein solches Punktenpaar P', p' gegeben ist. Denn diese Construction giebt, wenn man den Punkt P die ganze Curve durchlaufen lässt, alle möglichen Punktenpaare in demselben Systeme, wie das gegebene, während der zuletzt angeführte Satz drei, den drei verschiedenen Systemen zugehörende Punktenpaare construiren lehrt.

Um den zuletzt angeführten Lehrsatz zu vervollständigen, betrachten wir die vier Tangirungspunkte p, p', p'', p''' der von einem beliebigen

Punkte 0 an die Curve dritter Ordnung gezogenen Tangenten. Von diesen vier Punkten werden, wie wir bemerkt haben, die Punktenpaare p, p'; p, p''; p, p''' den drei verschiedenen Systemen angehören, weil in einem jeden Systeme einem und demselben Punkte nur ein einziger entspricht. Das Punktenpaar p', p'', welches nach dem oben ausgesprochenen Lehrsatze einem von den drei Systemen angehört, kann nicht demjenigen Systeme eigen sein, welchem das erste Punktenpaar p, p' angehört. Denn wäre dieses der Fall, so müsste, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, die Tangente im Punkte p' die gerade Linie pp'' in einem Punkte der Curve treffen, und dieser könnte nur der Punkt 0 sein; was nicht möglich ist. Eben so wenig können die Punktenpaare p', p'' und p, p'' einem und demselben Systeme angehören. Also müssen es die Punktenpaare p', p'' und p, p''' sein. Einem andern Systeme gehören nur die Punktenpaare p, p' und p'', p''', und dem letzten Systeme gehören die Punktenpaare p, p'' und p', p''' an. Diese Bemerkungen fassen wir in folgenden Satz zusammen: *Wenn man von einem beliebigen Punkte der Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ die vier Tangenten an die Curve zieht, so lassen sich die vier Tangirungspunkte als die Ecken von drei verschiedenen Vierecken betrachten. Die gegenüber liegenden Ecken eines beliebigen dieser Vierecke sind zwei, demselben Systeme zugehörige Punktenpaare, und die Systeme, welche auf diese Weise den drei verschiedenen Vierecken entsprechen, sind verschieden.*

Man hat im Vorhergehenden gesehen, wie zwei Punktenpaare P, p; P', p' desselben Systems ein durch dieselben gegebenes drittes Paar P'', p'' bestimmen, welches eben demselben Systeme angehört. Nunmehr will ich nachweisen, wie zwei Punktenpaare P, p; Q, q, aus zwei verschiedenen Systemen, ein drittes Punktenpaar R, r des letzten Systems bestimmen. Zu diesem Ende lege ich durch die Curve dritter Ordnung zwei beliebige gerade Linien, von denen die eine die Curve in den Punkten P, Q, R, die andere in den Punkten P', Q', R' treffen möge. Wenn nun die drei geraden Linien PP', QQ', RR' die Curve respective in den Punkten P'', Q'', R'' schneiden, so liegen diese drei Punkte P'', Q'', R'' (was sich in den Elementen der Geometrie bewiesen findet) in einer geraden Linie. Dies lässt sich auch, wenn man drei gerade Linien als eine Curve dritter Ordnung, und zwei gerade Linien als einen Kegelschnitt betrachtet (was bekanntlich erlaubt ist), wie folgt ausdrücken:

Wenn von den neun Schnittpunkten zweier Curven dritter Ordnung sechs Schnittpunkte auf einem Kegelschnitt liegen, so liegen die drei andern auf einer geraden Linie. Lässt man die gerade Linie $P'Q'R'$ der geraden Linie PQR so nahe rücken, dass beide zusammenfallen, so erhält man den, eben wie der vorhergehende, bekannten Lehrsatz: *Die Tangenten der Curve dritter Ordnung in drei Punkten, welche in einer und derselben geraden Linie liegen, schneiden die Curve in drei Punkten, welche wieder in einer geraden Linie liegen.* Man vergleiche „Analyse de transversales par Poncelet“ im Crelle'schen Journal Bd. 8, S. 129—136, wo man die beiden letzten und andere aus ihnen gefolgerte, mit der vorliegenden Untersuchung im Zusammenhange stehende Sätze findet.

Wenn nun P, p und Q, q zwei Punktenpaare in verschiedenen Systemen sind, so trifft, wie oben bewiesen worden, das Tangentenpaar der Curve in den Punkten P, p in einem und demselben Punkte P'' der Curve zusammen, und das Tangentenpaar der Curve in den Punkten Q, q schneidet die Curve in einem und demselben Punkte Q''. Lässt man die geraden Linien PQ und pq die Curve respective in den Punkten R und r schneiden, so wird die Tangente in R, nach dem zuletzt genannten Lehrsatze, die Curve in einem Punkte R'' schneiden, welcher mit den beiden Punkten P'' und Q'' in einer und derselben geraden Linie liegt. Aus demselben Grunde muss aber auch die Tangente in r die Curve in R'' treffen. Es ist mithin R, r ein Punktenpaar aus einem der drei Systeme, und zwar aus dem dritten. Denn wenn dieses System dasselbe wäre, welchem das Punktenpaar P, p und Q, q zugehört, so müssten die geraden Linien PQ und pq in einem und demselben Punkte der Curve zusammenstossen; in welchem Falle die Punktenpaare P, Q und p, q einem und demselben Systeme angehören würden; was gegen die Voraussetzung ist. Wir haben also folgenden Lehrsatz bewiesen: *Wenn man ein Punktenpaar aus einem der drei Systeme mit einem zweiten Punktenpaar aus einem anderen Systeme durch zwei gerade Linien verbindet, so schneiden diese die Curve dritter Ordnung in einem Punktenpaar, welches dem dritten Systeme angehört.*

Die bis hierher gemachten Bemerkungen werde ich nun, geordnet, mit verwandten Sätzen zusammenstellen, deren Beweise sich leicht aus den entwickelten Principien ergeben.

3.

1. Der geometrische Ort eines, dreien beliebig gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen harmonischen Polenpaares ist eine Curve dritter Ordnung.

2. Jede gegebene Curve dritter Ordnung lässt sich als der geometrische Ort eines, einem Systeme Kegelschnitte gemeinschaftlichen harmonischen Polenpaares betrachten.

3. Solcher Systeme Kegelschnitte giebt es für jede beliebige Curve dritter Ordnung im Allgemeinen drei; also auch drei verschiedene Systeme Polenpaare auf einer und derselben Curve dritter Ordnung.

4. Das Tangentenpaar in einem Polenpaar an die Curve dritter Ordnung schneidet die Curve in einem und demselben Punkte. Und umgekehrt:

5. Jedes Tangentenpaar, von einem beliebigen Punkte der Curve dritter Ordnung an die Curve gezogen, berührt die Curve in einem Polenpaare.

Die Sätze 4 und 5 sind unmittelbare Folgen aus den beiden folgenden allgemeinen Sätzen:

6. In jedem der Curve dritter Ordnung einbeschriebenen Viereck, dessen Diagonalen von zwei Polenpaaren desselben Systems begrenzt werden, schneiden die gegenüber liegenden Seiten des Vierecks die Curve in einem und demselben Punkte; und die beiden Punkte, in welchen zwei aufeinander folgende Seiten des Vierecks die Curve schneiden, bilden ein Polenpaar desselben Systems. Und umgekehrt:

7. Die Diagonalen eines jeden, einer Curve dritter Ordnung einbeschriebenen vollständigen Vierseits werden von Polenpaaren begrenzt, welche einem und demselben Systeme angehören.

Aus den vorhergehenden Sätzen ergiebt sich eine allgemeine Construction der einer Curve dritter Ordnung einbeschriebenen vollständigen Vierseite, welche in Form eines Lehrsatzes also lautet:

8. Wenn man irgend ein Polenpaar P', p' einer Curve dritter Ordnung durch zwei gerade Linien mit einem beliebigen Punkte P'' der Curve, und die Schnittpunkte P, p dieser beiden geraden Linien und der Curve durch zwei neue gerade Linien mit dem Polenpaare P', p' verbindet, so bilden die beiden Linienpaare ein der Curve einbeschriebenes vollständiges Vierseit.

9. Man kann alle, einer Curve dritter Ordnung einbeschriebenen vollständigen Vierseite in drei verschiedene Systeme vertheilen. Ein beliebiges

vollständiges, der Curve einbeschriebenes Vierseit gehört dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem die, eine beliebige Diagonale desselben begrenzenden Punkte ein Polenpaar des einen oder des andern Systems sind.

10. *Alle einer Curve dritter Ordnung einbeschriebenen Dreiecke, deren Seiten die Curve in drei Punkten schneiden, welche in einer geraden Linie liegen, ordnen sich dreien Systemen solcher Dreiecke unter. Ein solches Dreieck gehört dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem eine Ecke und der Schnittpunkt der gegenüber liegenden Seite des Dreiecks und der Curve ein Polenpaar aus dem einen oder dem andern Systeme sind.*

11. *Es lassen sich einer Curve dritter Ordnung nur drei Dreiecke einbeschreiben, deren Seiten durch drei, auf der Curve gegebene, in einer geraden Linie liegende Punkte hindurchgehen; und diese Dreiecke gehören verschiedenen Systemen an.*

12. *Wenn man von einem beliebigen Punkte einer Curve dritter Ordnung die vier Tangenten an die Curve zieht, so ist ein beliebiger von den vier Berührungspunkten der Pol zu den drei andern, aus verschiedenen Systemen genommen; und wenn man drei von den Berührungspunkten als die Ecken eines Dreiecks betrachtet, so werden die Seiten dieses Dreiecks von Polenpaaren aus verschiedenen Systemen begrenzt.*

13. *Wenn von drei Punkten auf einer Curve dritter Ordnung ein Punkt der Pol ist zu den beiden andern, in zwei verschiedenen Systemen, so bilden die beiden letzten ein Polenpaar aus dem dritten Systeme.*

14. *Wenn man ein Polenpaar auf einer Curve dritter Ordnung mit einem zweiten Polenpaare derselben Curve aus einem andern Systeme durch zwei gerade Linien verbindet, so schneiden diese Linien die Curve in einem Polenpaare des dritten Systems.*

15. *Wenn man von einem beliebigen Punkte p einer Curve dritter Ordnung die vier Tangenten an die Curve zieht, so trifft jedes durch die vier Berührungspunkte gelegte Linienpaar die Curve in je einem und demselben Punkte, und von den drei Punkten, in welchen die drei Linienpaare, welche durch die vier Punkte gelegt werden können, die Curve schneiden, bilden je zwei Polenpaare, welche verschiedenen Systemen angehören. Diese drei Punkte und der Punkt p sind die Berührungspunkte der vier von einem und demselben Punkte der Curve an die Curve gezogenen Tangenten.*

16. Wenn man aus den drei Schnittpunkten einer beliebigen geraden Linie und einer Curve dritter Ordnung die zwölf Tangenten an die Curve zieht, so liegen von den zwölf Berührungspunkten sechzehnmal drei Punkte in einer geraden Linie.

Um die Combinationen derjenigen Berührungspunkte aufzustellen, welche in einer geraden Linie liegen, bezeichne ich irgend drei von den zwölf Berührungspunkten, die in einer geraden Linie liegen, durch α, β, γ; die diesen entsprechenden Pole in dem ersten Systeme durch α_1, β_1, γ_1, in dem zweiten Systeme durch α_2, β_2, γ_2 und in dem letzten Systeme durch α_3, β_3, γ_3. Alsdann giebt es folgende Combinationen der neun letzten Punkte, welche in einer geraden Linie liegen:

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3, \quad \alpha_2\beta_3\gamma_1, \quad \alpha_3\beta_1\gamma_2,$$
$$\alpha_1\beta_3\gamma_2, \quad \alpha_2\beta_1\gamma_3, \quad \alpha_3\beta_2\gamma_1;$$

was durch den Lehrsatz 14 bewiesen wird. Ueberdies giebt es noch folgende Combinationen der zwölf Berührungspunkte, welche in gerader Linie liegen:

$$\alpha\beta_1\gamma_1, \quad \beta\gamma_1\alpha_1, \quad \gamma\alpha_1\beta_1,$$
$$\alpha\beta_2\gamma_2, \quad \beta\gamma_2\alpha_2, \quad \gamma\alpha_2\beta_2,$$
$$\alpha\beta_3\gamma_3, \quad \beta\gamma_3\alpha_3, \quad \gamma\alpha_3\beta_3,$$
$$\alpha\beta\gamma.$$

Dies folgt aus dem Lehrsatze 6. Demnach sind die in dem Lehrsatze 11 erwähnten, der Curve einbeschriebenen Dreiecke, deren Seiten durch die drei in gerader Linie und zugleich auf der Curve gelegenen Punkte α, β, γ hindurchgehen, folgende drei:

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1, \quad \alpha_2\beta_2\gamma_2, \quad \alpha_3\beta_3\gamma_3.$$

Die aufgestellten Combinationen zeigen, dass es acht Systeme von je vier geraden Linien giebt, welche durch sämmtliche zwölf Berührungspunkte hindurchgehen. Die vier geraden Linien gehen nämlich durch die Punkte:

1.	$\alpha\beta\gamma$,	$\alpha_1\beta_2\gamma_3$,	$\alpha_2\beta_3\gamma_1$,	$\alpha_3\beta_1\gamma_2$,
2.	$\alpha\beta_1\gamma_1$,	$\alpha_1\beta_3\gamma_2$,	$\alpha_2\beta_2\gamma$,	$\alpha_3\beta\gamma_3$,
3.	$\alpha\beta_2\gamma_2$,	$\alpha_1\beta\gamma_1$,	$\alpha_2\beta_1\gamma_3$,	$\alpha_3\beta_3\gamma$,
4.	$\alpha\beta_3\gamma_3$,	$\alpha_1\beta_1\gamma$,	$\alpha_2\beta\gamma_2$,	$\alpha_3\beta_2\gamma_1$,

5.	$\alpha\,\beta\,\gamma,$	$\alpha_1\,\beta_3\,\gamma_2,$	$\alpha_2\,\beta_1\,\gamma_3,$	$\alpha_3\,\beta_2\,\gamma_1,$
6.	$\alpha\,\beta_1\,\gamma_1,$	$\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3,$	$\alpha_2\,\beta\,\gamma_2,$	$\alpha_3\,\beta_3\,\gamma,$
7.	$\alpha\,\beta_2\,\gamma_2,$	$\alpha_1\,\beta_1\,\gamma,$	$\alpha_2\,\beta_3\,\gamma_1,$	$\alpha_3\,\beta\,\gamma_3,$
8.	$\alpha\,\beta_3\,\gamma_3,$	$\alpha_1\,\beta\,\gamma_1,$	$\alpha_2\,\beta_2\,\gamma,$	$\alpha_3\,\beta_1\,\gamma_2.$

Hieraus ist ersichtlich, dass die zwölf Berührungspunkte auf einer Curve vierter Ordnung liegen. Wie die Gleichung dieser Curve gebildet werden kann, giebt folgender Lehrsatz an:

17. Wenn v eine gegebene homogene Function dritten Grades der drei Variabeln x_1, x_2, x_3, also

$$\text{I.}\qquad v = 0$$

die Gleichung einer gegebenen Curve dritter Ordnung und

$$\text{II.}\qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer gegebenen geraden Linie ist, und wenn man durch w die Determinante der Function v, gebildet aus den zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function, bezeichnet, so ist

$$\text{III.}\qquad \begin{aligned} a_1\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_3} - \frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + a_2\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_3}\right) \\ + a_3\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = 0 \end{aligned}$$

die Gleichung der Curve vierter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte der von den Schnittpunkten der gegebenen geraden Linie und der Curve dritter Ordnung an die letztere gezogenen Tangenten hindurchgeht.

Hieraus folgt, wenn man den Theil links der Gleichung (III) der Kürze wegen durch r, und durch b_1, b_2, b_3 unbestimmte Coëfficienten bezeichnet, dass:

$$\text{IV.}\qquad v(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) + r = 0$$

der allgemeine Ausdruck für die Curven vierter Ordnung sein wird, welche durch die erwähnten zwölf Berührungspunkte hindurchgehen; man wird die Coëfficienten b_1, b_2, b_3 in dieser Gleichung achtmal so bestimmen können, dass der Theil links der Gleichung in vier lineäre Factoren zerfällt.

Ich werde nun zeigen, wie der zuletzt aufgestellte Lehrsatz sich auf Curven $n$ter Ordnung ausdehnen lässt, und in welchem Zusammenhange diese Ausdehnung des Satzes mit dem Problem der *Doppeltangenten* der Curven steht.

Es sei $v = 0$ die zwischen den Variabeln x_1, x_2, x_3 homogene Gleichung einer beliebigen gegebenen Curve $n$ter Ordnung; v_1, v_2, v_3 seien die partiellen Differentialquotienten der Function v, nach den Variabeln genommen, und X_1, X_2, X_3 die Coordinaten eines beliebig gegebenen Punktes P ausserhalb der Curve. Die $n(n-1)$ Berührungspunkte der vom Punkte P an die Curve gezogenen Tangenten werden bekanntlich durch den Schnitt der beiden Curven

IV a. $$v = 0 \quad \text{und} \quad v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 = 0$$

bestimmt. Rückt der Punkt P in die Curve $v = 0$, so fallen mit ihm zwei Berührungspunkte zusammen und es lassen sich von diesem Punkte nur noch $n(n-1) - 2$ Tangenten an die Curve ziehen, wenn man die Tangenten in dem Punkte P selbst ausschliesst. Um die Curve zu finden, in welcher die Berührungspunkte sämmtlicher $n^2(n-1)$ Tangenten liegen, welche von den Schnittpunkten einer durch die Gleichung:

V. $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

gegebenen geraden Linie und der gegebenen Curve $v = 0$ an die letztere gezogen werden können, bezeichne ich die Function, in welche v übergeht, wenn man X_1, X_2, X_3 statt x_1, x_2, x_3 setzt, durch V, und durch (V) den Ausdruck, in welchen V durch die Substitution von

VI. $$X_1 = v_2 a_3 - v_3 a_2, \quad X_2 = v_3 a_1 - v_1 a_3, \quad X_3 = v_1 a_2 - v_2 a_1$$

übergeht. Die $n^2(n-1)$ Berührungspunkte stellen sich dann als die Schnittpunkte der beiden Curven

VII. $$v = 0 \quad \text{und} \quad (V) = 0$$

dar, von denen die erstere vom $n$ten, die andere vom $n(n-1)$ten Grade ist. Von diesen $n^2(n-1)$ Schnittpunkten fallen aber mit jedem Schnittpunkte der geraden Linie (V) und der Curve $v = 0$ zwei zusammen, so dass $2n$ Schnittpunkte als auf einer Curve zweiter Ordnung liegend, deren Gleichung $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = 0$ ist, zu betrachten sind. Nun weiss man, dass, wenn von den $n(p+q)$ Schnittpunkten zweier Curven vom $n$ten und $(p+q)$ten Grade nq Punkte auf einer Curve $q$ten Grades liegen, die übrigen np Punkte auf einer Curve $p$ten Grades liegen müssen. In dem vorliegenden Falle werden also die $n^2(n-1) - 2n$ Schnittpunkte der Curven (VII), welche nicht auf der geraden Linie (V) liegen, auf

einer Curve $[n(n-1)-2]$ter Ordnung liegen; woraus der Schluss zu ziehen ist, dass *(V)* von der Form

VIII. $$(V) = \frac{P_n \cdot v - Q_n (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2}{1.2 \dots . n}$$

sein wird, wo P_n und Q_n homogene Functionen der Variabeln, respective von den Graden $n(n-2)$ und $n(n-1)-2$, bedeuten. *Hiernach stellen sich die $n^2(n-1)-2n$ Berührungspunkte, welche nicht in der geraden Linie* (V) *liegen, als die Schnittpunkte der beiden Curven*

IX. $$v = 0 \quad \textit{und} \quad Q_n = 0$$

dar.

Die Richtigkeit dieses geometrisch abgeleiteten Resultats werde ich auch auf rein analytischem Wege nachweisen; bei welcher Gelegenheit sich zugleich die Bildungsweise der Functionen P_n und Q_n herausstellen wird. Zu diesem Ende bezeichne ich durch $[v]$ die Function, in welche v übergeht, wenn man $x_1 + \lambda X_1$, $x_2 + \lambda X_2$, $x_3 + \lambda X_3$ statt x_1, x_2, x_3 setzt. Setzt man nun $X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \partial$, so erhält man

X. $$[v] = (v) + \lambda(\partial v) + \frac{\lambda^2}{1.2}(\partial^2 v) + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{1.2 \dots . (n-1)}(\partial^{n-1} v) + \frac{\lambda^n}{1.2 \dots . n}(\partial^n v).$$

In dieser Gleichung betrachte ich X_1, X_2, X_3 als Functionen von x_1, x_2, x_3, welche durch die Gleichungen (VI) gegeben sind. Unter dieser Annahme sind die Glieder der Reihe rechts von dem Gleichheitszeichen homogene Functionen von den Graden:

$0, 1,$	$2,$	$3,$	$\dots . n$	in Beziehung auf a_1, a_2, a_3,
$1, 2,$	$3,$	$4,$	$\dots . n+1$	in Beziehung auf die Coëfficienten in v,
n, $2n-2$,	$3n-4$,	$4n-6$,	$\dots . n(n-1)$	in Beziehung auf x_1, x_2, x_3.

Man sieht leicht, dass das letzte Glied der Reihe gleich ist $\lambda^n (V)$. Es bleibt also, wenn man der Kürze wegen $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a$ setzt, zu beweisen übrig, dass das letzte Glied der Reihe von der Form

$$(\partial^n v) = P_n \cdot v - Q_n \cdot a^2$$

sei. Von derselben Form sind aber auch alle übrigen Glieder der Reihe, so dass

$$\text{XI.} \qquad (\partial^\mu v) = P_\mu . v - Q_\mu . a^2$$

ist, wo P_μ und Q_μ homogene Functionen bedeuten, respective von den Graden:

μ	und	$\mu - 2$	in Beziehung auf a_1, a_2, a_3,
μ	und	$\mu + 1$	in Beziehung auf die Coëfficienten in v,
$\mu(n-2)$	und	$(\mu+1)(n-2)$	in Beziehung auf x_1, x_2, x_3.

Dass die beiden ersten Glieder der Reihe diese Form haben, ist einleuchtend. Denn setzt man $(v) = P . v - Q . a^2$ und $(\partial v) = P_1 . v - Q_1 . a^2$, so erhält man, weil (∂v) identisch $= 0$ ist,

$$\text{XII.} \qquad P = 1, \qquad Q = 0, \qquad P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0.$$

Ich werde nun zeigen, wie sich jedes Glied der Reihe durch die beiden vorhergehenden Glieder ausdrücken lässt. Zu diesem Ende setze ich:

$$\text{XIII.} \left\{ \begin{array}{ll} Y_1 = X_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial X_1}{\partial x_3}, & Z_1 = Y_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + Y_3 \frac{\partial X_1}{\partial x_3}, \\ Y_2 = X_1 \frac{\partial X_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, & Z_2 = Y_1 \frac{\partial X_2}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + Y_3 \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \\ Y_3 = X_1 \frac{\partial X_3}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial X_3}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial X_3}{\partial x_3}, & Z_3 = Y_1 \frac{\partial X_3}{\partial x_1} + Y_3 \frac{\partial X_3}{\partial x_2} + Y_3 \frac{\partial X_3}{\partial x_3}. \end{array} \right.$$

Ferner gebe ich den aus den zweiten partiellen Differentialquotienten $v_{1,1}$, $v_{2,2}$, $v_{3,3}$, $v_{2,3}$, $v_{3,1}$, $v_{1,2}$ der Function v zusammengesetzten Ausdrücken der Kürze wegen folgende Bezeichnungen:

$$\text{XIV.} \left\{ \begin{array}{ll} V_{1,1} = v_{2,2}\, v_{3,3} - v_{2,3}^2, & V_{2,3} = v_{1,2}\, v_{1,3} - v_{1,1}\, v_{2,3}, \\ V_{2,2} = v_{3,3}\, v_{1,1} - v_{3,1}^2, & V_{3,1} = v_{2,3}\, v_{2,1} - v_{2,2}\, v_{3,1}, \\ V_{3,3} = v_{1,1}\, v_{2,2} - v_{1,2}^2, & V_{1,2} = v_{3,1}\, v_{3,2} - v_{3,3}\, v_{1,2}, \\ \multicolumn{2}{l}{\quad w = v_{1,1}\, v_{2,2}\, v_{3,3} + 2\, v_{1,2}\, v_{1,3}\, v_{2,3} - v_{1,1}\, v_{2,3}^2 - v_{2,2}\, v_{3,1}^2 - v_{3,3}\, v_{1,2}^2,} \\ \multicolumn{2}{l}{\quad \varDelta = V_{1,1}\, a_1^2 + V_{2,2}\, a_2^2 + V_{3,3}\, a_3^2 + 2\, V_{2,3}\, a_2\, a_3 + 2\, V_{3,1}\, a_3\, a_1 + 2\, V_{1,2}\, a_1\, a_2.} \end{array} \right.$$

Alsdann stellen sich die Grössen Y, wenn man die Werthe von X_1, X_2, X_3 und $\frac{\partial X_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial X_1}{\partial x_2}$, ... einsetzt, nach den nöthigen Reductionen wie folgt dar:

$$\text{XV.}\quad \begin{cases} Y_1 = \dfrac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{2}\, a \cdot \dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_1} - x_1 \varDelta\right\}, \\ Y_2 = \dfrac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{2}\, a \cdot \dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_2} - x_2 \varDelta\right\}, \\ Y_3 = \dfrac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{2}\, a \cdot \dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_3} - x_3 \varDelta\right\}, \end{cases}$$

woraus sich, wenn man erwägt, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varDelta}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varDelta}{\partial a_3}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \varDelta}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varDelta}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varDelta}{\partial a_3}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \varDelta}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \varDelta}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \varDelta}{\partial a_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

ist, durch Substitution in (XIII) folgende Werthe der Grössen Z ergeben:

$$\text{XVI.}\qquad Z_1 = -\varDelta X_1, \qquad Z_2 = -\varDelta X_2, \qquad Z_3 = -\varDelta X_3.$$

Jedes Glied der Reihe $[v]$ ist eine homogene Function der Variabeln x_1, x_2, x_3, und zugleich eine homogene Function der Grössen X_1, X_2, X_3, welche wiederum homogene Functionen der Variabeln x_1, x_2, x_3 sind. Ich werde nun die Differentiation nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 mit d bezeichnen, wenn sowohl die Grössen x, als die Grössen X, als variabel betrachtet werden: dagegen mit ∂, wenn nur die einen als variabel, die anderen als constant betrachtet werden. Mit dieser Bezeichnung ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_1} = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_1} - \left\{\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right\}, \\ \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_2} = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_2} - \left\{\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right\}, \\ \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_3} = \frac{d(\partial^\mu v)}{d x_3} - \left\{\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_1}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right\}. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_1} = \mu\,\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_2} = \mu\,\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial X_3} = \mu\,\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3};$$

mit Hülfe welcher Gleichungen sich das vorige System also darstellt:

$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_1} = \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_1} - \mu \left\{ \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right\},$$
$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_2} = \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_2} - \mu \left\{ \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right\},$$
$$\frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_3} = \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_3} - \mu \left\{ \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit X_1, X_2, X_3, addirt die Producte und erwägt, dass

$$(\partial^{\mu+1} v) = \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial(\partial^\mu v)}{\partial x_3} X_3$$

ist, so erhält man, mit Rücksicht auf (XIII),

$$(\partial^{\mu+1} v) = \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_1} X_1 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_2} X_2 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_3} X_3$$
$$- \mu \left\{ \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1} Y_1 + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2} Y_2 + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3} Y_3 \right\}.$$

Setzt man in diese Gleichung diejenigen Werthe von $\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_3}$, welche sich aus dem vorhergehenden Systeme von Gleichungen ergeben, wenn man in demselben $\mu - 1$ statt μ setzt, so geht dieselbe, mit Rücksicht auf (XIII) und (XVI), in

$$(\partial^{\mu+1} v) = \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_1} X_1 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_2} X_2 + \frac{d(\partial^\mu v)}{dx_3} X_3$$
$$- \mu \left\{ \frac{d(\partial^{\mu-1} v)}{dx_1} Y_1 + \frac{d(\partial^{\mu-1} v)}{dx_2} Y_2 + \frac{d(\partial^{\mu-1} v)}{dx_3} Y_3 \right\}$$
$$- \mu(\mu - 1) \Delta \left\{ \frac{\partial(\partial^{\mu-2} v)}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial(\partial^{\mu-2} v)}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial(\partial^{\mu-2} v)}{\partial x_3} X_3 \right\}$$

über. Da aber

$$\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial X_1} = (\mu - 1) \frac{\partial(\partial^{\mu-2} v)}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial X_2} = (\mu - 1) \frac{\partial(\partial^{\mu-2} v)}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial X_3} = (\mu - 1) \frac{\partial(\partial^{\mu-2} v)}{\partial x_3},$$
$$\frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial X_2} X_2 + \frac{\partial(\partial^{\mu-1} v)}{\partial X_3} X_3 = (\mu - 1)(\partial^{\mu-1} v)$$

ist, so ergiebt sich:

$$(\partial^{\mu+1} v) = \frac{d(\partial^{\mu} v)}{d x_1} X_1 + \frac{d(\partial^{\mu} v)}{d x_2} X_2 + \frac{d(\partial^{\mu} v)}{d x_3} X_3 - \mu \left\{ \frac{d(\partial^{\mu-1} v)}{d x_1} Y_1 + \frac{d(\partial^{\mu-1} v)}{d x_2} Y_2 + \frac{d(\partial^{\mu-1} v)}{d x_3} Y_3 \right\} - \mu(\mu - 1) \varDelta (\partial^{\mu-1} v);$$

woraus endlich folgt, wenn man die Werthe von Y substituirt:

$$\text{XVII.} \quad (\partial^{\mu+1} v) = \frac{d(\partial^{\mu} v)}{d x_1} X_1 + \frac{d(\partial^{\mu} v)}{d x_2} X_2 + \frac{d(\partial^{\mu} v)}{d x_3} X_3 - \frac{\mu}{n-1} \cdot \tfrac{1}{2} a \left\{ \frac{d(\partial^{\mu-1} v)}{d x_1} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_1} + \frac{d(\partial^{\mu-1} v)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_2} + \frac{d(\partial^{\mu-1} v)}{d x_3} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_3} \right\} + \frac{\mu}{n-1} (n - \mu + 1) \,.\, \varDelta \,.\, (\partial^{\mu-1} v).$$

Dieses ist die gesuchte Gleichung, welche jedes Glied der Reihe $[v]$ durch die beiden vorhergehenden ausdrückt. Es lässt sich aus ihr sogleich die Form des Ausdrucks $(\partial^{\mu+1} v)$ erkennen, wenn man berücksichtigt, dass

$$v_1 \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_1} + v_2 \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_2} + v_3 \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_3} = \frac{2}{n-1} \cdot a \cdot w$$

ist. Wenn nämlich die Ausdrücke $(\partial^{\mu} v)$ und $(\partial^{\mu-1} v)$ von der Form (XI) sind, so muss auch $(\partial^{\mu+1} v)$ diese Form haben. Denn setzt man

$$(\partial^{\mu} v) = P_{\mu} v . - Q_{\mu} a^2 \quad \text{und} \quad (\partial^{\mu-1} v) = P_{\mu-1} v - Q_{\mu-1} a^2,$$

so erhält man aus (XVII)

$$\text{XVIII.} \qquad (\partial^{\mu+1} v) = P_{\mu+1} \cdot v - Q_{\mu+1} \cdot a^2,$$

wo die Werthe von $P_{\mu+1}$ und $Q_{\mu+1}$ folgende sind:

$$\text{XIX.} \quad \begin{cases} P_{\mu+1} = \left(\frac{d P_{\mu}}{d x_1} X_1 + \frac{d P_{\mu}}{d x_2} X_2 + \frac{d P_{\mu}}{d x_3} X_3 \right) \\ \qquad - \frac{\mu}{n-1} \cdot \frac{1}{2} a \left(\frac{d P_{\mu-1}}{d x_1} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_1} + \frac{d P_{\mu-1}}{d x_2} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_2} + \frac{d P_{\mu-1}}{d x_3} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_3} \right) \\ \qquad + \frac{\mu(n-\mu+1)}{n-1} \cdot \varDelta \cdot P_{\mu-1}, \\ Q_{\mu+1} = \left(\frac{d Q_{\mu}}{d x_1} X_1 + \frac{d Q_{\mu}}{d x_2} X_2 + \frac{d Q_{\mu}}{d x_3} X_3 \right) \\ \qquad - \frac{\mu}{n-1} \cdot \frac{1}{2} a \left(\frac{d Q_{\mu-1}}{d x_1} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_1} + \frac{d Q_{\mu-1}}{d x_2} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_2} + \frac{d Q_{\mu-1}}{d x_3} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a_3} \right) \\ \qquad + \frac{\mu}{(n-1)^2} w \cdot P_{\mu-1} + \frac{\mu(n-\mu-1)}{n-1} \cdot \varDelta \cdot Q_{\mu-1}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Gleichungen für μ nach einander die Zahlen 1, 2, 3, so erhält man, mit Berücksichtigung von (XII),

$$\text{XX.}\quad\begin{cases}P_2=\frac{n}{n-1}\varDelta, \qquad Q_2=\frac{1}{(n-1)^2}\cdot w,\\ P_3=\frac{n}{n-1}\left(\frac{d\varDelta}{dx_1}X_1+\frac{d\varDelta}{dx_2}X_2+\frac{d\varDelta}{dx_3}X_3\right),\\ \qquad Q_3=\frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{dw}{dx_1}X_1+\frac{dw}{dx_2}X_2+\frac{dw}{dx_3}X_3\right),\\ P_4=\frac{n}{n-1}\left(\frac{d^2\varDelta}{dx_1^2}X_1^2+\frac{d^2\varDelta}{dx_2^2}X_2^2+\frac{d^2\varDelta}{dx_3^2}X_3^2\right.\\ \qquad\left.+2\frac{d^2\varDelta}{dx_2\,dx_3}X_2X_3+2\frac{d^2\varDelta}{dx_3\,dx_1}X_3X_1+2\frac{d^2\varDelta}{dx_1\,dx_2}X_1X_2\right)\\ \qquad-\frac{n.a}{(n-1)^2}\left(\frac{d\varDelta}{dx_1}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_1}+\frac{d\varDelta}{dx_2}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_2}+\frac{d\varDelta}{dx_3}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_3}\right),\\ \qquad Q_4=\frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{d^2w}{dx_1^2}X_1^2+\frac{d^2w}{dx_2^2}X_2^2+\frac{d^2w}{dx_3^2}X_3^2\right.\\ \qquad\left.+2\frac{d^2w}{dx_2\,dx_3}X_2X_3+2\frac{d^2w}{dx_3\,dx_1}X_3X_1+2\frac{d^2w}{dx_1\,dx_2}X_1X_2\right)\\ \qquad-\frac{a}{(n-1)^3}\left(\frac{dw}{dx_1}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_1}+\frac{dw}{dx_2}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_2}+\frac{dw}{dx_3}\cdot\frac{\partial\varDelta}{\partial a_3}\right)+\frac{3(n-2)}{(n-1)^3}w.\varDelta.\end{cases}$$

Die angegebenen Werthe von P_2 und Q_2 sind wichtig bei der Bestimmung der Wendepunkte einer Curve $n$ter Ordnung. Denn lässt man x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Wendepunktes der Curve $v=0$ bedeuten, so müssen die drei ersten Glieder der Reihe $[v]$ für alle Werthe von a_1, a_2, a_3 verschwinden. Da aber das zweite Glied von selbst verschwindet, so bleiben zur Bestimmung der Wendepunkte die beiden Gleichungen:

$$(v)=0, \qquad (\partial^2 v)=0$$

übrig, welche für alle Werthe von a_1, a_2, a_3 erfüllt werden sollen. Da nun $(\partial^2 v)=P_2 v-Q_2 a^2$ ist, so erhält man zur Bestimmung der Wendepunkte:

$$v=0, \qquad (n-1)^2 Q_2=w=0;$$

welche Gleichungen ich in Bd. 28 des Crelle'schen Journals S. 104 Lehrsatz 9 [1]) aufgestellt habe.

Auf der Zurückführung des Ausdrucks $(\partial^3 v)$, in dem Falle $n=3$, auf die Form $(\partial^3 v)=P_3 v-Q_3 a^2$, wo P_3 und Q_3 die angegebenen Werthe

1) [Seite 131 dieser Ausgabe].

haben, beruht der Beweis des Lehrsatzes 17. Denn setzt man in den Ausdruck Q_3 die Werthe von X_1, X_2, X_3 aus (VI), so geht derselbe in den Theil links der Gleichung (III) über.

Auf eben dieser Zurückführung, in dem Falle $n = 4$, beruht der Beweis des folgenden Lehrsatzes:

Wenn eine Curve vierter Ordnung $v = 0$ und eine gerade Linie $a = 0$ gegeben sind, so giebt es 32 Tangenten der Curve, welche von der Curve in zwei Punkten geschnitten werden, die harmonisch sind zu dem Berührungspunkte und dem Schnittpunkte der Tangente mit der gegebenen geraden Linie. Die Berührungspunkte der 32 Tangenten werden durch die beiden Gleichungen

$$v = 0 \quad und \quad \frac{\partial a}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_3} - \frac{\partial v}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial a}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)$$
$$+ \frac{\partial a}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = 0$$

bestimmt; wo w die Determinante der Function v bedeutet.

Die Reihe $[v]$ ist eine homogene Function der Grössen $x_1 + \lambda X_1$, $x_2 + \lambda X_2$ und $x_3 + \lambda X_3$. Betrachtet man diese drei Grössen als die Coordinaten eines Punktes, so wird dieser Punkt auf einer und derselben geraden Linie liegen, wie man auch die Grösse λ sich verändern lasse. Diese gerade Linie wird zur Tangente der Curve $v = 0$ in dem Punkte $x_1\, x_2\, x_3$, wenn dieser Punkt in die Curve selbst hineinrückt, also das erste Glied der Reihe verschwindet. Denn das zweite Glied verschwindet, wie oben bemerkt, von selbst, da X_1, X_2, X_3 die Bedeutung (VI) haben. Unter dieser Voraussetzung wird nun die Tangente eine Doppeltangente, wenn die Gleichung $[v] = 0$ ausser ihren beiden gleichen Wurzeln $\lambda = 0$ noch zwei andere gleiche Wurzeln hat; und die Bedingungsgleichung, welche zu erfüllen ist, damit dieses zutreffe, wird die Curve darstellen, welche die gegebene Curve $v = 0$ in solchen Punkten schneidet, in welchen die Tangenten zugleich Doppeltangenten der gegebenen Curve sind. Um diese Bedingungsgleichung aufzustellen, lasse ich aus der Gleichung $[v] = 0$ die beiden ersten verschwindenden Glieder weg und dividire mit λ^2. Dies giebt:

$$\frac{(\partial^2 v)}{1.2} + \lambda\cdot\frac{(\partial^3 v)}{1.2.3} + \lambda^2\cdot\frac{(\partial^4 v)}{1.2.3.4} + \cdots + \lambda^{n-2}\cdot\frac{(\partial^n v)}{1.2\ldots.n} = 0.$$

Da aber $(\partial^\mu v) = P_\mu . v - Q_\mu . a^2$ ist, so nimmt diese Gleichung, wenn man der Kürze wegen

$$\text{XXI.} \quad [[v]] = \frac{Q_2}{1.2} + \lambda \cdot \frac{Q_3}{1.2.3} + \lambda^2 \cdot \frac{Q_4}{1.2.3.4} + \cdots + \lambda^{n-2} \cdot \frac{Q_n}{1.2\ldots.n}$$

setzt, wegen $v = 0$, die einfachere Gestalt:

$$\text{XXII.} \qquad [[v]] = 0$$

an. Damit die Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, muss man durch denselben Werth von λ folgenden beiden Gleichungen genügen können:

$$\text{XXIII.} \begin{cases} \frac{(n-2)\,Q_2}{1.2} + \frac{(n-3)\,Q_3}{1.2.3} \cdot \lambda + \cdots \frac{2 \,.\, Q_{n-2}}{1.2\ldots.(n-2)} \cdot \lambda^{n-4} + \frac{Q_{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)} \cdot \lambda^{n-3} = 0, \\ \frac{Q_3}{1.2.3} + \frac{2 \,.\, Q_4}{1.2.3.4} \cdot \lambda + \cdots \frac{(n-3)\,Q_{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)} \cdot \lambda^{n-4} + \frac{(n-2)\,Q_n}{1.2\ldots.n} \cdot \lambda^{n-3} = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man λ aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung

$$\text{XXIV.} \qquad R = 0,$$

welche, da sie die unbestimmten Grössen a_1, a_2, a_3 enthält, ein ganzes System von Curven von der $(n+4)(n-2)(n-3)$ten Ordnung darstellt, welche sämmtlich durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgehen. Denn man sieht, dass die Function R homogen ist,

vom Grade $(n-2)(n-3)$ in Beziehung auf die Grössen a_1, a_2, a_3,
vom Grade $(n+4)(n-3)$ in Beziehung auf die Coëfficienten in v und
vom Grade $(n+4)(n-2)(n-3)$ in Beziehung auf die Variabeln x_1, x_2, x_3.

Wenn man in (XXIII) $(\partial^2 v)$, $(\partial^3 v)$, ... statt Q_2, Q_3, ... setzt, so ist das Resultat der Elimination von λ aus den beiden Gleichungen eine homogene Gleichung von den Graden $(n+2)(n-3)$, $(n+4)(n-3)$, $(n^2+2n-4)(n-3)$ in Beziehung auf die Grössen a_1, a_2, a_3, die Coëfficienten in v und die Variabeln x_1, x_2, x_3; und diese Gleichung stellt, wie die vorhergehende, eine Curve dar, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgeht. Es ist dieses dieselbe Gleichung, welche Herr Cayley (Bd. 34 des Crelle'schen Journals S. 37) durch

$$[Y] = 0$$

bezeichnet hat. Der Grad derselben lässt sich mit Hülfe der gegebenen Gleichung $v = 0$ der Curve um $4(n-3)$ Einheiten verringern. Denn da, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich,

$$[Y] = T.v - R.a^{4(n-3)}$$

ist, wo T eine homogene Function von den Graden

$$(n+2)(n-3), \quad (n+4)(n-3)-1, \quad (n^2+2n-4)(n-3)-n$$

in Beziehung auf die Grössen a_1, a_2, a_3, die Coëfficienten in v und die Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet, so reducirt sich die Gleichung, mit Zuziehung der Gleichung $v = 0$, auf die Gleichung (XXIV).

Es bleibt noch übrig, auf ähnliche Weise den Grad der letztern Gleichung $R = 0$ um $(n-2)(n-3)$ Einheiten zu verringern, um das Problem der Doppeltangenten vollständig zu lösen; was mir aber nicht hat gelingen wollen; selbst nicht in dem einfachsten Falle, wenn die gegebene Curve vom vierten Grade ist. In diesem Falle nimmt, wenn man in (XX) $n = 4$ setzt, die Gleichung (XXIV) die einfache Gestalt

$$\text{XXV.} \qquad 3.Q_2.Q_4 - Q_3.Q_3 = 0$$

an, deren Grad mit Hülfe der gegebenen Gleichung $v = 0$ noch um zwei Einheiten zu verringern bleibt.

Nach diesen Bemerkungen über die Doppeltangenten der Curven, zu welchen der Lehrsatz 17 Veranlassung gab, kehre ich zu dem Systeme von Gleichungen (1) zurück, von welchen die vorliegende Untersuchung der Curven dritter Ordnung ausging.

4.

Aus dem Systeme von Gleichungen (1) in No. 2 lassen sich andere Gleichungen von analytischem Interesse ableiten. Setzt man zu diesem Ende

$$\begin{aligned} u_{2,2}u_{3,3} - u_{2,3}^2 &= a_{1,1}, & u_{1,2}u_{1,3} - u_{1,1}u_{2,3} &= a_{2,3} = a_{3,2}, \\ u_{3,3}u_{1,1} - u_{3,1}^2 &= a_{2,2}, & u_{2,3}u_{2,1} - u_{2,2}u_{3,1} &= a_{3,1} = a_{1,3}, \\ u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}^2 &= a_{3,3}, & u_{3,1}u_{3,2} - u_{3,3}u_{1,2} &= a_{1,2} = a_{2,1}, \end{aligned}$$

und bestimmt die Verhältnisse der Coordinaten X_1, X_2, X_3 des Punktes P aus je zwei Gleichungen (1), so erhält man

$$X_1 : X_2 : X_3 = a_{1,1} : a_{1,2} : a_{1,3} = a_{2,1} : a_{2,2} : a_{2,3} = a_{3,1} : a_{3,2} : a_{3,3};$$

woraus sich, wenn man durch ϱ einen unbestimmten Factor bezeichnet, die Gleichungen

$$2. \quad \begin{cases} X_1 X_1 = \varrho\, a_{1,1}, & X_2 X_2 = \varrho\, a_{2,2}, & X_3 X_3 = \varrho\, a_{3,3}, \\ X_2 X_3 = \varrho\, a_{2,3}, & X_3 X_1 = \varrho\, a_{3,1}, & X_1 X_2 = \varrho\, a_{1,2} \end{cases}$$

ableiten lassen. Da sich in den Gleichungen (1) die Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes p mit den Coordinaten X_1, X_2, X_3 des Punktes P vertauschen lassen, so ist dieses auch in den von ihnen abgeleiteten Gleichungen (2) gestattet. Bezeichnet man nun durch A die Ausdrücke, in welche die homogenen Functionen zweiten Grades a in dem Theile rechts der Gleichungen (2) übergehen, wenn man X_1, X_2, X_3 statt x_1, x_2, x_3 setzt, und lässt ϱ' einen unbestimmten Factor bedeuten, so folgt aus den Gleichungen (2) durch jene Vertauschung:

$$3. \quad \begin{cases} x_1 x_1 = \varrho' A_{1,1}, & x_2 x_2 = \varrho' A_{2,2}, & x_3 x_3 = \varrho' A_{3,3}, \\ x_2 x_3 = \varrho' A_{2,3}, & x_3 x_1 = \varrho' A_{3,1}, & x_1 x_2 = \varrho' A_{1,2}. \end{cases}$$

Dieses System von Gleichungen steht mit dem Systeme von Gleichungen (2) in einer merkwürdigen Verbindung. Betrachtet man nämlich die in den Theilen rechts der Gleichungen (2) lineär vorkommenden sechs Producte $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, $x_3 x_3$, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$ als Unbekannte und löst das System von Gleichungen nach diesen Unbekannten auf, so erhält man das System von Gleichungen (3), mit *denselben* Coëfficienten der Producte $X_1 X_1$, $X_2 X_2$, $X_3 X_3$, $X_2 X_3$, $X_3 X_1$, $X_1 X_2$, mit welchen in (2) die Producte $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, ... $x_1 x_2$ multiplicirt sind, abgesehen von einem gemeinschaftlichen Factor.

Jeden sechs Punkten P der Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$, durch welche sich ein Kegelschnitt legen lässt, entsprechen sechs Punkte p, welche auf der Curve und zugleich auf einem andern Kegelschnitt liegen. Denn wenn die Gleichung des ersten Kegelschnitts

$$4. \quad \alpha_{1,1} X_1 X_1 + \alpha_{2,2} X_2 X_2 + \alpha_{3,3} X_3 X_3 + 2\,\alpha_{2,3} X_2 X_3 + 2\,\alpha_{3,1} X_3 X_1 + 2\,\alpha_{1,2} X_1 X_2 = 0$$

ist, so erhellt aus den Gleichungen (2), dass die Gleichung des zweiten Kegelschnitts

$$5. \quad \alpha_{1,1} a_{1,1} + \alpha_{2,2} a_{2,2} + \alpha_{3,3} a_{3,3} + 2\,\alpha_{2,3} a_{2,3} + 2\,\alpha_{3,1} a_{3,1} + 2\,\alpha_{1,2} a_{1,2} = 0$$

sein wird. Geht der erste Kegelschnitt in ein Linienpaar A, B über, dessen Gleichung

$$6. \qquad (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3)(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3) = 0$$

ist, so ist die Gleichung des zweiten Kegelschnitts

$$7. \qquad \alpha_1\beta_1 a_{1,1} + \alpha_2\beta_2 a_{2,2} + \alpha_3\beta_3 a_{3,3} + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) a_{2,3} + (\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) a_{3,1} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) a_{1,2} = 0.$$

Lässt man die zweite Linie B des Linienpaares sich der ersten A so lange nähern, bis sie mit ihr zusammenfällt, so geht die Gleichung (6) in

$$8. \qquad (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3)^2 = 0$$

über, während die Gleichung des zweiten Kegelschnitts die Form

$$9. \qquad \alpha_1\alpha_1 a_{1,1} + \alpha_2\alpha_2 a_{2,2} + \alpha_3\alpha_3 a_{3,3} + 2\,\alpha_2\alpha_3 a_{2,3} + 2\,\alpha_3\alpha_1 a_{3,1} + 2\,\alpha_1\alpha_2 a_{1,2} = 0$$

annimmt. Dieses ist aber die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher die Curve dritter Ordnung in drei verschiedenen Punkten berührt. Denn da die Schnittpunkte P der Curve dritter Ordnung und des Linienpaares (8) paarweise zusammenfallen, so werden auch die ihnen entsprechenden Schnittpunkte p des Kegelschnitts (9) und der Curve paarweise zusammenfallen, oder, was dasselbe ist, der Kegelschnitt wird die Curve in drei verschiedenen Punkten berühren.

Betrachtet man in der Gleichung (9) die Constanten α_1, α_2, α_3 als variabel, so drückt die genannte Gleichung ein ganzes System von Kegelschnitten aus, deren jeder die Curve in drei verschiedenen Punkten berührt. *Es entsprechen also jeden drei Punkten P der Curve dritter Ordnung, welche in einer geraden Linie liegen, drei Punkte p, in welchen ein Kegelschnitt die Curve berührt.* Dieses sind jedoch nicht alle Kegelschnitte von der genannten Eigenschaft. Denn da in die Gleichung (9) die Coëfficienten aus einer der drei Functionen f eingehen, so wird jeder dieser Functionen ein System solcher Kegelschnitte entsprechen. Die Gleichung (9) umfasst also drei verschiedene, den Functionen f entsprechende Gleichungen; und diese letztern sind die allgemeinen analytischen Ausdrücke für die drei Systeme von Kegelschnitten, welche die Curve in drei verschiedenen Punkten berühren. *Es entsprechen also jeden drei Punkten P der Curve dritter Ordnung, welche in einer geraden Linie*

liegen, drei Systeme von drei Punkten p, welche die Berührungspunkte dreier Kegelschnitte und der Curve sind. Da die drei Punkte P und die neun Punkte p als die Berührungspunkte der zwölf Tangenten angesehen werden können, welche von drei leicht zu bestimmenden, auf der Curve und einer geraden Linie gelegenen Punkten an die Curve gezogen werden, so liegen von diesen zwölf Punkten sechzehnmal drei Punkte in einer geraden Linie, und von den neun Punkten p sechsmal drei Punkte in einer geraden Linie.

Dass die erwähnten drei Systeme von Kegelschnitten (9) alle Kegelschnitte umfassen, welche die gegebene Curve in drei verschiedenen Punkten berühren, lässt sich durch folgende Betrachtung nachweisen. Es seien p_1, p_2, p_3 die Berührungspunkte eines Kegelschnitts und der Curve. Die drei Tangenten π_1, π_2, π_3 in diesen Punkten lassen sich als eine Curve dritter Ordnung betrachten. Da dieselben aber die gegebene Curve in neun Punkten schneiden, von welchen sechs in einem Kegelschnitte liegen, so müssen die drei andern in einer geraden Linie liegen. Demnach erhält man, wenn die beiden Berührungspunkte p_1 und p_2 auf der Curve beliebig gegeben sind, den dritten p_3, wenn man die Tangenten π_1, π_2 construirt (welche die Curve in den Punkten q_1 und q_2 schneiden mögen), hierauf die gerade Linie $q_1 q_2$ zieht, welche der Curve in dem Punkte q_3 begegnet und von diesem Punkte q_3 an die Curve eine Tangente zieht. Der Berührungspunkt p_3 wird dann der gesuchte Punkt sein. Nun lassen sich aber von dem Punkte q_3 der Curve vier Tangenten an die Curve ziehen, von denen eine die Curve in dem Schnittpunkte der geraden Linie $p_1 p_2$ und der Curve berührt. Dieser Punkt muss aber verworfen werden, weil unter dem Kegelschnitte, welcher die Curve in den Punkten berührt, die in einer geraden Linie liegen, nur ein Linienpaar verstanden werden kann, welches mit der geraden Linie zusammenfällt. Man hat also in der That nur drei Kegelschnitte, welche die gegebene Curve in drei verschiedenen Punkten berühren, von denen zwei auf der Curve beliebig gegeben sind. Diese drei Kegelschnitte finden sich aber auch unter den Kegelschnitten (9). Denn wenn P_1, P_2 die den Punkten p_1, p_2 entsprechenden Punkte in einem der drei Systeme sind und man bestimmt den dem Schnittpunkte P_3 der geraden Linie $P_1 P_2$ und der Curve entsprechenden Punkt p_3 in demselben Systeme, so

hat man den dritten Berührungspunkt des Kegelschnitts, welcher die Curve in den Punkten p_1, p_2 berührt. Diese Construction, für die drei Systeme ausgeführt, giebt ebenfalls drei Kegelschnitte von der genannten Eigenschaft, und welche nur jene drei vorhin erwähnten sein können. Dieses lässt sich kurz wie folgt zusammenfassen.

18. Alle Kegelschnitte, welche eine gegebene Curve dritter Ordnung in drei verschiedenen Punkten berühren, ordnen sich dreien Systemen unter. Ein gegebener Kegelschnitt dieser Art gehört dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem ein Berührungspunkt und der Schnittpunkt der geraden Linie, welche die beiden andern verbindet, mit der Curve ein Polenpaar aus dem einen oder dem andern Systeme bilden.

Auf dieselbe Weise, wie den drei Schnittpunkten P', P'', P''' der geraden Linie A und der Curve dritter Ordnung drei Punkte p', p'', p''' entsprechen, in welchen der Kegelschnitt (9) die Curve berührt, entsprechen auch den drei Schnittpunkten $P^{(4)}$, $P^{(5)}$, $P^{(6)}$ der geraden Linie B und der Curve drei Punkte $p^{(4)}$, $p^{(5)}$, $p^{(6)}$, in welchen der Kegelschnitt

$$10. \quad \beta_1\beta_1 a_{1,1} + \beta_2\beta_2 a_{2,2} + \beta_3\beta_3 a_{3,3} + 2\beta_2\beta_3 a_{2,3} + 2\beta_3\beta_1 a_{3,1} + 2\beta_1\beta_2 a_{1,2} = 0$$

die Curve berührt. Da aber das Linienpaar A, B, welches durch die Gleichung (6) dargestellt ist, die Curve in den sechs Punkten P schneidet, so geht der Kegelschnitt (7) durch die diesen entsprechenden sechs Punkte p. Dieses lässt sich umgekehrt auch so ausdrücken:

19. Wenn man durch die drei Tangirungspunkte eines Kegelschnitts und einer Curve dritter Ordnung einen beliebigen Kegelschnitt legt, so schneidet derselbe die Curve in drei neuen Punkten, in welchen ein anderer Kegelschnitt die Curve berührt.

Dass dieser berührende Kegelschnitt zu demselben System wie der erste berührende Kegelschnitt gehört, ist einleuchtend. Es ist auch noch zu bemerken, dass, wenn man den beliebigen Kegelschnitt, welcher durch die drei Berührungspunkte eines Kegelschnitts und der Curve gelegt ist, um die drei Berührungspunkte auf alle mögliche Art variiren lässt, unter den drei Schnittpunkten desselben mit der Curve auch die drei Tangirungspunkte eines beliebigen berührenden Kegelschnitts aus demselben Systeme sein werden.

5.

Um auch die speciellen Fälle der Curven dritter Ordnung in unsere Betrachtungen zu ziehen, bemerken wir, dass, während sich die Gleichung der Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$, wie in Band 28 des Crelle'schen Journals S. 90 [1]) gezeigt, im Allgemeinen auf die Form

11. $$\varphi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 2\pi y_1 y_2 y_3 = 0$$

zurückführen lässt, wo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ die Gleichungen dreier geraden Linien bedeuten, welche durch die neun Wendepunkte der Curve hindurchgehen, in dem besonderen Falle, wenn die Curve einen Doppelpunkt hat, aus jener Gleichung eines der drei ersten Glieder wegfällt, so dass die Gleichung der Curve die Gestalt

12. $$\varphi = y_1^3 + y_2^3 - 2\pi y_1 y_2 y_3 = 0$$

annimmt. Denn es ist leicht zu sehen, dass die Gleichung der Curve diese Form annehmen muss, wenn $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Tangenten in dem Doppelpunkte der Curve sind. Stellt man, um die Wendepunkte der Curve zu finden, welche einen Doppelpunkt hat, von der Function φ die Determinante

$$\psi = -24\pi^2 \{y_1^3 + y_2^3 + \tfrac{2}{3}\pi y_1 y_2 y_3\}$$

auf, so erhält man für diese Punkte:

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0;$$

woraus ersichtlich ist, dass sechs von den neun Wendepunkten in den Doppelpunkt fallen, während die drei andern in der geraden Linie $y_3 = 0$ liegen.

Von den vier Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte der Curve an die Curve gezogen werden können, fallen zwei mit derjenigen geraden Linie zusammen, welche den beliebigen Punkt der Curve mit dem Doppelpunkte verbindet. Da diese gerade Linie aber nicht als eine wahre Tangente zu betrachten ist, so bleiben in der That nur zwei Tangenten übrig, und die Tangirungspunkte p und P sind zwei entsprechende Pole in dem einzigen hier stattfindenden Systeme. Die Function f für diesen Fall ist, abgesehen von einem constanten Factor, auf welchen es nicht ankommt:

$$f = y_1^3 + y_2^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3.$$

1) [Seite 115 dieser Ausgabe].

Wenn man durch Y_1, Y_2, Y_3 dieselben lineären Functionen der Variabeln X_1, X_2, X_3 bezeichnet, welche y_1, y_2, y_3 von x_1, x_2, x_3 sind, so ergiebt sich folgendes System von Gleichungen zwischen den Coordinaten x_1, x_2, x_3 und X_1, X_2, X_3 der entsprechenden Pole p und P, welches dann in dem vorliegenden Falle das System von Gleichungen (1) vertritt:

$$\begin{aligned} Y_1 y_1 \quad &+ Y_2 \pi y_3 + Y_3 \pi y_2 = 0, \\ Y_1 \pi y_3 &+ Y_2 y_2 \quad + Y_3 \pi y_1 = 0, \\ Y_1 y_2 \quad &+ Y_2 y_1 \quad + 0 \qquad = 0. \end{aligned}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen ist zu sehen, dass die Verbindungslinien der beiden entsprechenden Pole p und P mit dem Doppelpunkte harmonisch sind zu den beiden Tangenten der Curve in dem Doppelpunkte. *Man erhält also den einem gegebenen Punkte P der Curve entsprechenden Pol p, wenn man P mit dem Doppelpunkte der Curve durch eine gerade Linie verbindet und zu dieser Verbindungslinie und dem Tangentenpaare in dem Doppelpunkte die vierte harmonische Linie construirt. Diese Linie schneidet die Curve in dem Punkte p.*

Wenn drei Punkte P der Curve auf einer geraden Linie A liegen, deren Gleichung

$$13. \qquad \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 = 0$$

ist, so berührt der Kegelschnitt

$$14. \qquad \begin{aligned} &\alpha_1 \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 \alpha_3 y_3^2 - 2\,\alpha_2 \alpha_3 y_2 y_3 - 2\,\alpha_3 \alpha_1 y_3 y_1 - 2\,\alpha_1 \alpha_2 y_1 y_2 \\ &\qquad - \frac{\alpha_3}{\pi^2} \{\alpha_3 y_1 y_2 - 2\,\alpha_2 \pi y_1^2 - 2\,\alpha_1 \pi y_2^2\} = 0 \end{aligned}$$

die Curve in den drei den Punkten P entsprechenden Polen p, welche dem Vorhergehenden zu Folge von dem Doppelpunkte aus leicht sich construiren lassen. Und diese Gleichung, welche analog der Gleichung (9) gebildet ist, stellt, wenn man α_1, α_2, α_3 beliebig variiren lässt, das ganze System der Kegelschnitte dar, welche die Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in drei verschiedenen Punkten berühren.

Wenn, zweitens, die betrachtete Curve zwei Doppelpunkte hat, so fallen in der Gleichung (11) zwei von den drei ersten Gliedern weg, und die Curve

$$15. \qquad \varphi = y_1^3 - 2\,\pi\, y_1 y_2 y_3 = 0$$

zerfällt in einen Kegelschnitt $y_1^2 - 2\pi y_2 y_3 = 0$ und in eine gerade Linie $y_1 = 0$. Letztere schneidet den Kegelschnitt in den beiden Doppelpunkten der Curve. Die Tangenten des Kegelschnitts in diesen beiden Punkten werden durch die Gleichungen $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ ausgedrückt. Jedem Punkte P der Curve entspricht nun ein Pol p, dessen Coordinaten folgenden Relationen unterworfen sind:

$$\begin{aligned} Y_1 y_1 + Y_2 \pi y_3 + Y_3 \pi y_2 &= 0, \\ Y_1 y_3 + 0 \quad\quad + Y_3 y_1 &= 0, \\ Y_1 y_2 + Y_2 y_1 \quad + 0 \quad\quad &= 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen sieht man, *dass das Linienpaar, welches zwei entsprechende Pole P und p mit einem der Doppelpunkte verbindet, zu der Tangente in dem Doppelpunkte und der Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte harmonisch ist.* Hiernach lässt sich, wenn ein Punkt P des Kegelschnitts gegeben ist, der entsprechende Pol p der Curve dritter Ordnung construiren; welcher ebenfalls auf dem Kegelschnitte liegen wird. Aus den beiden genannten Gleichungen entnimmt man ferner, *dass, wenn der Punkt P auf der Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte liegt, der entsprechende Pol p ebenfalls auf dieser geraden Linie liegen wird;* und aus der ersten Gleichung, *dass in diesem Falle das Polenpaar P, p harmonisch ist zu den beiden Doppelpunkten.* Durchschneidet man die Curve mit einer geraden Linie A:

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 = 0, \tag{16}$$

in drei Punkten P, so lassen sich nach den obigen Bemerkungen die entsprechenden Pole p leicht construiren. In diesen Polen p berührt nun der Kegelschnitt, dessen Gleichung

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 \alpha_3 y_3^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 y_2 y_3 - 2\alpha_3 \alpha_1 y_3 y_1 - 2\alpha_1 \alpha_2 y_1 y_2 \\ + \frac{2\alpha_2 \alpha_3 y_1^2}{\pi} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

ist, den Kegelschnitt zweimal und die gerade Linie, aus welchen die Curve besteht. Es ist hier noch zu bemerken, dass die Gleichung (17), wenn man darin α_1, α_2, α_3 variiren lässt, alle Kegelschnitte umfasst, welche den Kegelschnitt und die gerade Linie, aus welchen die Curve dritter Ordnung besteht, erstere in zwei verschiedenen Punkten, letztere in einem Punkte berühren.

Hieran knüpft sich nun die Lösung der nachstehenden Aufgabe. „Wenn ein Kegelschnitt und eine gerade Linie gegeben sind: die Be„rührungspunkte desjenigen Kegelschnitts zu construiren, welcher den „gegebenen Kegelschnitt in zwei Punkten und die gegebene gerade Linie „in *einem* Punkte berührt; sei es, dass die beiden Berührungspunkte auf „dem gegebenen Kegelschnitt, oder ein Berührungspunkt auf dem Kegel„schnitt, der andere auf der geraden Linie, gegeben sind."

Wenn endlich die betrachtete Curve drei Doppelpunkte hat, so fallen die drei ersten Glieder der Gleichung (11) weg und die Curve zerfällt in drei gerade Linien, deren Gleichungen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ sind. Es seien diese drei geraden Linien dieselben, welche im vorhergehenden Falle mit diesen Symbolen bezeichnet wurden. Es entspricht jedem Punkte P ein Pol p unter Vermittelung der Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 + Y_2 y_3 + Y_3 y_2 &= 0, \\ Y_1 y_3 + 0 \quad + Y_3 y_1 &= 0, \\ Y_1 y_2 + Y_2 y_1 + 0 \quad &= 0; \end{aligned}$$

woraus sich zeigt, dass jedem Punkte P auf einer Seite des durch die drei geraden Linien gebildeten Dreiecks der Pol p entspricht, der harmonisch ist zu ihm und dem Punktenpaare, welches die in Rede stehende Seite des Dreiecks begrenzt. Durchschneidet man das Dreieck mit der geraden Linie A in drei Punkten P, so wird der Kegelschnitt

$$18. \qquad \alpha_1 \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 \alpha_3 y_3^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 y_2 y_3 - 2\alpha_3 \alpha_1 y_3 y_1 - 2\alpha_1 \alpha_2 y_1 y_2 = 0$$

das Dreieck in den drei entsprechenden Polen berühren. Und diese Gleichung stellt, unter der Voraussetzung, dass α_1, α_2, α_3 beliebig variiren, alle Kegelschnitte dar, welche die Seiten des Dreiecks berühren. Zieht man die Gleichung (18) von der (17) ab, so erhält man $\frac{2\alpha_2 \alpha_3 y_1^2}{\pi} = 0$; welches beweist, dass die Kegelschnitte (17 und 18) in dem Berührungspunkte der geraden Linie $y_1 = 0$ eine vierpunktige Berührung haben. Dieses lässt sich wie folgt zusammenfassen. *Wenn man einen gegebenen Kegelschnitt und ein gegebenes Tangentenpaar desselben mit einer geraden Linie L durchschneidet, so lassen sich zwei Kegelschnitte construiren, von welchen der eine den gegebenen Kegelschnitt in den beiden Schnittpunkten der geraden Linie L und zugleich die Verbindungslinie M der Tangirungs-*

punkte des gegebenen Tangentenpaares, der andere das Tangentenpaar in den Schnittpunkten der geraden Linie L und zugleich die gerade Linie M berührt. Diese beiden Kegelschnitte berühren sich vierpunktig in demjenigen Punkte der geraden Linie M, welcher harmonisch ist zu dem Schnittpunkte der Linien L und M und den Endpunkten der geraden Linie M.

6.

Den drei Systemen von Kegelschnitten (9), welche die gegebene Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ in drei verschiedenen Punkten berühren, ordnen sich auch alle diejenigen Kegelschnitte unter, welche die Curve einmal vierpunktig und das andere mal zweipunktig berühren. Diese Art von Kegelschnitten (9) entspricht denjenigen unter den durch (8) dargestellten geraden Linien A, welche die Curve berühren. Um die Berührungspunkte eines beliebigen dieser Kegelschnitte zu finden, nehme man ein Polenpaar P, p an und schneide die Curve durch die gerade Linie Pp in q. Alsdann giebt es zwei Kegelschnitte, welche die Curve in q zweipunktig berühren und von welchen der eine die Curve in P, der andere in p vierpunktig berührt; und diese beiden Kegelschnitte gehören einem und demselben Systeme an. Es erhellt hieraus:

20. Dass alle Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung, einmal vierpunktig, das andere mal zweipunktig berühren, in drei Systeme zerfallen. Ein gegebener Kegelschnitt dieser Art gehört dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem der vierpunktige Berührungspunkt und der Schnittpunkt der Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte mit der Curve ein Polenpaar des einen oder des anderen Systems sind.

Ist der vierpunktige Berührungspunkt gegeben und der zweipunktige zu suchen, so verbinde man den vierpunktigen Berührungspunkt mit den drei ihm in den drei Systemen entsprechenden Polen durch drei gerade Linien. Diese drei geraden Linien schneiden die Curve in den gesuchten Punkten. Die Aufgabe lässt also drei Auflösungen zu. Ist dagegen der zweipunktige Berührungspunkt gegeben und der vierpunktige Berührungspunkt zu suchen, so ergeben sich zwölf Auflösungen der Aufgabe. Man erhält dieselben, wenn man zu dem gegebenen zweipunktigen Berührungspunkt die drei Pole in den drei Systemen construirt und von den letzteren

die zwölf Tangenten an die Curve zieht. Die Berührungspunkte sind dann die gesuchten Punkte.

Um analytisch die Kegelschnitte (9) zu bestimmen, welche die gegebene Curve dritter Ordnung einmal vierpunktig, das andere mal zweipunktig berühren, bleibt noch übrig, die Relation zwischen den drei Grössen α_1, α_2, α_3 aufzustellen, welche stattfinden muss, damit die gerade Linie, deren Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ ist, eine Tangente der Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ sei; oder mit andern Worten: *Wenn die Gleichung einer beliebigen Curve dritter Ordnung in Punktcoordinaten gegeben ist, dieselbe durch Liniencoordinaten auszudrücken.*

Diese Aufgabe lässt sich auf folgende Weise symmetrisch lösen. Man bilde die Determinante $\varDelta$ aus folgenden Grössen:

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3}, & \alpha_1, \\
\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}, & \alpha_2, \\
\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_2}, & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}, & \alpha_3, \\
\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0.
\end{array}$$

Sie wird sowohl in Beziehung auf x_1, x_2, x_3, als in Beziehung auf die Grössen α_1, α_2, α_3 homogen und vom zweiten Grade sein. Man betrachte ferner die sechs Producte $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, ... $x_1 x_2$ in den sechs Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \alpha_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \alpha_2 = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \alpha_3 = 0,$$
$$x_1 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0,$$
$$x_2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0,$$
$$x_3 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0$$

als die Unbekannten und löse diese lineären Gleichungen auf. Setzt man alsdann die Werthe der genannten sechs Producte in die Gleichung $\varDelta = 0$, in welcher dieselben lineär vorkommen, so hat man die gesuchte homogene Gleichung vom sechsten Grade in Beziehung auf die Liniencoordinaten α_1, α_2, α_3. Dass das System von sechs Gleichungen stattfindet, wenn $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ die Gleichung der Tangente der Curve $\varphi = 0$ in dem Punkte ist, dessen Coordinaten x_1, x_2, x_3 sind, ist einleuchtend.

Es bleibt also noch nachzuweisen, dass auch die Determinante $\varDelta$ unter diesen Bedingungen verschwindet. Zu diesem Ende bemerke ich, dass von den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}x_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}x_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3}x_3 + 2\alpha_1 t &= A_1,\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}x_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}x_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3}x_3 + 2\alpha_2 t &= A_2,\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\partial x_1}x_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\partial x_2}x_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}x_3 + 2\alpha_3 t &= A_3,\\
\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \qquad &= A_4
\end{aligned}$$

die drei ersten in die, mit dem Factor 2 multiplicirten drei ersten Gleichungen des obigen Systems, und die letzte in die Gleichung der Tangente übergehen, wenn man $t = 1$ und $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ setzt. Betrachtet man aber die in diesen Gleichungen explicite und lineär vorkommenden Grössen x_1, x_2, x_3, t als Unbekannte und löst sie nach diesen Unbekannten, z. B. nach x_1, auf, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$x_1 \varDelta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4.$$

Setzt man nun $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, so verschwindet $\varDelta$; was zu beweisen war.

7.

Unter den drei Systemen von Kegelschnitten (9), welche die gegebene Curve dritter Ordnung in drei verschiedenen Punkten berühren, finden sich auch solche Kegelschnitte, welche mit der Curve eine sechspunktige Berührung haben. Denn wenn man die gerade Linie A in die Lage einer Wendetangente bringt, welche, wie bekannt, der Curve in drei Punkten P begegnet, die in einen zusammenfallen, so werden die diesen entsprechenden Punkte p, welche die Berührungspunkte der Kegelschnitte (9) sind, ebenfalls in einen zusammenfallen; woraus eben eine sechspunktige Berührung entsteht. Da aber jeder von den neun Wendepunkten drei ihm entsprechende Pole hat, *so hat eine Curve dritter Ordnung im Allgemeinen 27 Punkte π, in welchen sie von Kegelschnitten sechspunktig berührt werden kann.* Wenn man von einem der Wendepunkte δ die drei

Tangenten an die Curve zieht, so werden die Tangirungspunkte α, β, γ die dem Wendepunkte δ entsprechenden Pole in den drei Systemen sein; was aus der in No. 2 angegebenen Construction des einem gegebenen Punkte der Curve entsprechenden Poles erhellt. Diese drei Punkte α, β, γ liegen in einer und derselben geraden Linie. Denn bekanntlich liegen die sechs Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte an die Curve dritter Ordnung gezogen werden können, in einem Kegelschnitte. Rückt nun der beliebige Punkt in einen Wendepunkt, so fallen drei von den Berührungspunkten in einen Punkt der Wendetangente; wesshalb die drei übrigen ebenfalls in einer geraden Linie liegen müssen.

21. Die Berührungspunkte der 27 Tangenten, welche von den Wendepunkten einer Curve dritter Ordnung an die Curve gezogen werden können, sind diejenigen Punkte π, in welchen Kegelschnitte die Curve sechspunktig berühren können. Die 27 Kegelschnitte, welche die Curve sechspunktig berühren, sowie die 27 Berührungspunkte π, zerfallen in drei Systeme von je neun Kegelschnitten oder neun Punkten. Ein beliebiger von diesen Kegelschnitten und sein Berührungspunkt gehören dem einen oder dem andern Systeme an, je nachdem der Berührungspunkt und der Schnittpunkt der Tangente in dem Berührungspunkte mit der Curve, welcher Schnittpunkt ein Wendepunkt ist, ein Polenpaar des einen oder des andern Systems bilden.

Um die Lage der 27 Punkte α, β, γ zu einander zu erforschen, muss man die Lage der neun Wendepunkte δ ins Auge fassen. Letztere lässt sich aus dem Satze von Poncelet: „dass jede, durch zwei Wende„punkte der Curve dritter Ordnung gelegte gerade Linie auch einen „dritten Wendepunkt der Curve trifft", auf folgende Art erkennen. Wenn δ_1, δ_4, δ_7 drei, nicht in einer geraden Linie liegende Wendepunkte sind, so schneiden die geraden Linien $\delta_4 \delta_7$, $\delta_7 \delta_1$, $\delta_1 \delta_4$ die Curve respective in drei neuen Wendepunkten δ_2, δ_5, δ_8. Man überzeugt sich leicht, dass diese letzteren ebenfalls nicht in einer geraden Linie liegen. Denn lägen sie in einer geraden Linie, so hätte man folgende vier Combinationen der sechs Wendepunkte, welche in einer geraden Linie liegen:

$$\delta_4 \delta_7 \delta_2, \quad \delta_7 \delta_1 \delta_5, \quad \delta_1 \delta_4 \delta_8, \quad \delta_2 \delta_5 \delta_8.$$

Verbindet man diese sechs Wendepunkte mit irgend einem der drei andern durch sechs gerade Linien, so müsste jede von diesen Linien die Curve in einem neuen Wendepunkte schneiden. Man erhielte also auf diese Weise statt der neun Wendepunkte dreizehn. Da nun die Wendepunkte δ_2, δ_5, δ_8 nicht in einer geraden Linie liegen, so werden die geraden Linien $\delta_5\,\delta_8$, $\delta_8\,\delta_2$, $\delta_2\,\delta_5$ die Curve in den drei noch übrigen Wendepunkten δ_3, δ_6, δ_9 schneiden. Erwägt man endlich, dass die geraden Linien $\delta_1\,\delta_2$, $\delta_4\,\delta_5$, $\delta_7\,\delta_8$ die Curve nur in den Punkten δ_3, δ_6, δ_9 schneiden können, so erhält man folgende Combinationen der Wendepunkte, welche auf einer geraden Linie liegen:

$$\begin{array}{lll} \delta_1\,\delta_2\,\delta_3\ldots\ldots & \delta_4\,\delta_5\,\delta_6\ldots\ldots & \delta_7\,\delta_8\,\delta_9, \\ \delta_2\,\delta_4\,\delta_7\ldots\ldots & \delta_3\,\delta_5\,\delta_8\ldots\ldots & \delta_1\,\delta_6\,\delta_9, \\ \delta_5\,\delta_7\,\delta_1\ldots\ldots & \delta_6\,\delta_8\,\delta_2\ldots\ldots & \delta_4\,\delta_9\,\delta_3, \\ \delta_8\,\delta_1\,\delta_4\ldots\ldots & \delta_9\,\delta_2\,\delta_5\ldots\ldots & \delta_7\,\delta_3\,\delta_6. \end{array}$$

Ich werde die den Wendepunkten δ_1, δ_2, ... δ_9 entsprechenden Pole π

in dem ersten Systeme durch α_1, α_2, ... α_9;
in dem zweiten Systeme durch β_1, β_2, ... β_9;
in dem dritten Systeme durch γ_1, γ_2, ... γ_9

bezeichnen. Wenn nun $\delta_\varkappa\,\delta_\lambda\,\delta_\mu$ irgend eine der angegebenen zwölf Combinationen der Wendepunkte ist, welche in einer geraden Linie liegen, so sind

$$\alpha_\varkappa\,\alpha_\lambda\,\delta_\mu, \qquad \beta_\varkappa\,\beta_\lambda\,\delta_\mu, \qquad \gamma_\varkappa\,\gamma_\lambda\,\delta_\mu$$

drei Coordinaten von Punkten, welche ebenfalls in einer geraden Linie liegen. Denn wenn man ein Polenpaar $\alpha_\varkappa\,\delta_\varkappa$ mit einem zweiten Polenpaar $\alpha_\lambda\,\delta_\lambda$ desselben Systems durch zwei gerade Linien $\alpha_\varkappa\,\alpha_\lambda$ und $\delta_\varkappa\,\delta_\lambda$ verbindet, so schneiden sich die Verbindungslinien nach Satz 6 in einem und demselben Punkte der Curve. Es schneidet aber die gerade Linie $\delta_\varkappa\,\delta_\lambda$ die Curve in δ_μ: folglich liegen die Punkte $\alpha_\varkappa$, α_λ, δ_μ in einer und derselben Linie; was sich kurz so ausdrücken lässt:

22. Jede gerade Linie, welche zwei Punkte π aus demselben Systeme verbindet, schneidet die Curve dritter Ordnung in einem Wendepunkte; woraus folgt, *dass 108 mal zwei Punkte π und ein Wendepunkt in einer geraden Linie liegen.*

Wenn, wie oben, $\delta_\varkappa \delta_\lambda \delta_\mu$ irgend eine Combination der Wendepunkte ist, welche auf einer und derselben geraden Linie liegen, so ist $\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu$ eine Combination von drei Punkten π, welche ebenfalls auf einer geraden Linie liegen. Denn wenn man ein Polenpaar $\alpha_\varkappa \delta_\varkappa$ mit einem Polenpaare $\beta_\lambda \delta_\lambda$ eines anderen Systems durch zwei gerade Linien $\delta_\varkappa \delta_\lambda$ und $\alpha_\varkappa \beta_\lambda$ verbindet, so schneiden dieselben nach Satz 14 die Curve in einem Polenpaare $\delta_\mu \gamma_\mu$ des dritten Systems. Dieses, mit der obigen Bemerkung, dass auch $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$ in einer geraden Linie liegen, verbunden, giebt folgenden Lehrsatz:

23. Jede gerade Linie, welche zwei Punkte π verbindet, die verschiedenen Systemen angehören, schneidet die Curve dritter Ordnung in einem Punkte π des dritten Systems. Es liegen also 81 mal drei Punkte π auf einer geraden Linie.[1])

Da die neun Punkte π aus einem und demselben Systeme die den neun Wendepunkten der Curve dritter Ordnung in diesem Systeme entsprechenden Pole sind, so werden von den ersteren so oft sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, als von den letzteren sechs auf einem Linienpaare liegen. Hieraus folgt mit Rücksicht auf die angegebene Lage der Wendepunkte, der Lehrsatz:

24. Von den neun Punkten π eines und desselben Systems liegen 66 mal sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.

Hieraus erhellt, dass diese neun Punkte nicht die Durchschnittspunkte zweier Curven dritter Ordnung sein können.

Wenn man in dem Lehrsatze 19 für den ersten Kegelschnitt denjenigen auswählt, welcher in einem Punkte π die Curve sechspunktig berührt, so ergiebt sich folgende Eigenschaft dieser Punkte:

---

1) Herr Professor Steiner giebt in dem Auszuge aus seiner am 27. November 1845 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung (Crelle's Journal Bd. 32, S. 182) die Zahl der geraden Linien, von denen jede durch drei Punkte π hindurchgeht, auf 108 an. Nach meiner Auseinandersetzung müssen einige von den 108 geraden Linien, welche dieser berühmte Geometer im Auge gehabt hat, zusammenfallen, so dass nur 81 wirklich von einander verschiedene Linien übrig bleiben.

25. Alle Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung in einem Punkte π dreipunktig berühren, schneiden die Curve in drei Punkten, in welchen ein anderer Kegelschnitt die Curve berührt; und umgekehrt:

26. Es giebt neun Kegelschnitte, welche durch die drei Ecken eines der Curve dritter Ordnung einbeschriebenen Dreiecks hindurchgehen (dessen Seiten die Curve in drei in gerader Linie liegenden Punkten schneiden), und welche in einem andern Punkte die Curve dreipunktig berühren. Der Ort dieser Berührungspunkte sind die neun Punkte π, welche demselben Systeme angehören, dem das Dreieck angehört.

Königsberg, im Juli 1847.

12.

Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung.

(Fortsetzung der Abhandlungen No. 10 und No. 11 im 28. Bande und No. 10 im 36. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik [No. 8, 9 und 11 dieser Ausgabe]).

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 38, Seite 241—256.]

1.

Wenn man durch u eine homogene Function von den drei Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet und durch u_1, u_2, u_3 die ersten, durch u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{23}, u_{31}, u_{12} die zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function nach den Variabeln genommen, so ist bekanntlich

$$1. \quad \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 = (n-1)u_1, \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 = (n-1)u_2, \\ u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 = (n-1)u_3, \end{cases}$$

welche Gleichungen, nach x_1, x_2, x_3 aufgelöst, insofern diese Grössen explicite in den Theilen der Gleichungen links vorkommen, folgende Ausdrücke geben:

$$2. \quad \begin{cases} \dfrac{\Delta x_1}{n-1} = U_{11}u_1 + U_{12}u_2 + U_{13}u_3, \\ \dfrac{\Delta x_2}{n-1} = U_{21}u_1 + U_{22}u_2 + U_{23}u_3, \\ \dfrac{\Delta x_3}{n-1} = U_{31}u_1 + U_{32}u_2 + U_{33}u_3; \end{cases}$$

wo die Determinante Δ der Function u und die Grössen U folgende Bedeutung haben:

$$3.\quad \begin{cases} \Delta = u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{12}^2, \\ U_{11} = u_{22}u_{33} - u_{23}^2, \qquad U_{23} = U_{32} = u_{12}u_{13} - u_{11}u_{23}, \\ U_{22} = u_{33}u_{11} - u_{31}^2, \qquad U_{31} = U_{13} = u_{23}u_{21} - u_{22}u_{31}, \\ U_{33} = u_{11}u_{22} - u_{12}^2, \qquad U_{12} = U_{21} = u_{31}u_{32} - u_{33}u_{12}. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (2) der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3 und addirt die Producte, so erhält man die Gleichung

$$4.\quad \frac{n}{n-1}\Delta . u = U_{11}u_1^2 + U_{22}u_2^2 + U_{33}u_3^2 + 2U_{23}u_2u_3 + 2U_{31}u_3u_1 + 2U_{12}u_1u_2,$$

deren Theil rechts ich der Kürze wegen mit D bezeichne.

Diese Gleichung wird identisch, wenn man in dem Theile derselben links

$$u = \frac{1}{n.(n-1)}\{u_{11}x_1^2 + u_{22}x_2^2 + u_{33}x_3^2 + 2u_{23}x_2x_3 + 2u_{31}x_3x_1 + 2u_{12}x_1x_2\}$$

statt u und in dem Theile rechts die Werthe von u_1, u_2, u_3 aus (1) setzt, ohne dass man die zweiten Differentialquotienten u zu entwickeln brauchte. Differentiirt man unter dieser Hypothese die vorliegende identische Gleichung (4) nach den sechs zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u, so erhält man folgendes für die Theorie der algebraischen Curven wichtige System von Gleichungen:

$$5.\quad \begin{cases} D_{11} \equiv u_{22}u_3^2 - 2u_{23}u_2u_3 + u_{33}u_2^2 = \frac{n}{n-1}U_{11}u - \frac{x_1^2}{(n-1)^2}\Delta, \\ D_{22} \equiv u_{33}u_1^2 - 2u_{31}u_3u_1 + u_{11}u_3^2 = \frac{n}{n-1}U_{22}u - \frac{x_2^2}{(n-1)^2}\Delta, \\ D_{33} \equiv u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2 = \frac{n}{n-1}U_{33}u - \frac{x_3^2}{(n-1)^2}\Delta, \\ \frac{1}{2}D_{23} \equiv u_{12}u_1u_3 + u_{13}u_1u_2 - u_{23}u_1^2 - u_{11}u_2u_3 = \frac{n}{n-1}U_{23}u - \frac{x_2x_3}{(n-1)^2}\Delta, \\ \frac{1}{2}D_{31} \equiv u_{23}u_2u_1 + u_{21}u_2u_3 - u_{31}u_2^2 - u_{22}u_3u_1 = \frac{n}{n-1}U_{31}u - \frac{x_3x_1}{(n-1)^2}\Delta, \\ \frac{1}{2}D_{12} \equiv u_{31}u_3u_2 + u_{32}u_3u_1 - u_{12}u_3^2 - u_{33}u_1u_2 = \frac{n}{n-1}U_{12}u - \frac{x_1x_2}{(n-1)^2}\Delta, \end{cases}$$

wo $D_{\varkappa\lambda}$ die Differentiation von D nach $u_{\varkappa\lambda}$ andeutet, insofern der Differentialquotient $u_{\varkappa\lambda}$ nur in den Grössen U_{pq} enthalten ist. Differentiirt man die identische Gleichung (4) z. B. nach u_{33}, so erhält man

$$\frac{n}{n-1}U_{33}u + \frac{x_3^2}{(n-1)^2}\Delta = D_{33} + \frac{\partial D}{\partial u_3}\frac{x_3}{n-1}.$$

Setzt man in diese Gleichung für $\frac{\partial D}{\partial u_3}$ seinen Werth $\frac{2x_3}{n-1}\Delta$, so erhält man die dritte von den Gleichungen (5). Aehnliche Formeln lassen sich auf dem angegebenen Wege für homogene Functionen von mehr als drei Variabeln entwickeln, von welchen die mit vier Variabeln in der Theorie der algebraischen Oberflächen Anwendung finden.

Von diesen Formeln dient die dritte zur Transformation des Krümmungshalbmessers und der Coordinaten des Mittelpunkts der Krümmung einer beliebigen Curve $n$ter Ordnung in eine neue Form. Denn wenn man die rechtwinkligen Coordinaten eines variabeln Punktes durch x_1 und x_2 bezeichnet und $x_3 = 1$ setzt, so ist

$$u = 0$$

die allgemeine Gleichung einer Curve $n$ter Ordnung, deren Krümmungsradius ϱ in dem Punkte x_1, x_2 der Curve durch die bekannte Gleichung

$$\varrho = \pm \frac{(u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2}$$

ausgedrückt, und deren Krümmungsmittelpunkt durch die Coordinaten X_1, X_2 mittels folgender Gleichungen bestimmt wird:

$$X_1 - x_1 = -u_1 \cdot \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2},$$
$$X_2 - x_2 = -u_2 \cdot \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2}.$$

Diese Gleichungen gehen aber, wenn man erwägt, dass $u = 0$ und $x_3 = 1$ ist, mittels der dritten Gleichung (5) in die einfacheren

$$6. \quad \begin{cases} \varrho = \pm \dfrac{(n-1)^2(u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{12}^2}, \\ X_1 - x_1 = \dfrac{(n-1)^2 u_1(u_1^2 + u_2^2)}{u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{12}^2}, \\ X_1 - x_1 = \dfrac{(n-1)^2 u_2(u_1^2 + u_2^2)}{u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{31}^2} \end{cases}$$

über. Im Anfange der Abhandlung „Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung“ (Bd. 28, No. 11 dieses Journals)[1]) ist dieser Transformation von mir Erwähnung gethan.

---

1) [Seite 127 dieser Ausgabe, Z. 14 v. o.]

Ich werde nun den Krümmungsradius ϱ einer beliebigen, durch rechtwinklige Coordinaten x, y analytisch ausgedrückten Curve durch Liniencoordinaten darstellen. Sind y' und y'' der erste und der zweite Differentialquotient von y, nach x genommen, so ist bekanntlich:

$$\varrho = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Eine beliebige gerade Linie, deren Gleichung von der Form $ax+by+1=0$ ist, wird durch die Coëfficienten a, b, welche man die Coordinaten der geraden Linie nennt, vollständig bestimmt. Wenn diese gerade Linie in allen ihren Lagen die Curve berühren soll, so wird sich dieses durch eine Gleichung zwischen den Liniencoordinaten ausdrücken lassen, welche die in Liniencoordinaten dargestellte Gleichung der Curve ist. Die gerade Linie wird aber zur Tangente der Curve unter den Bedingungen:

$$a = -\frac{y'}{xy'-y}, \qquad b = \frac{1}{xy'-y},$$

woraus, wenn man durch b' den ersten und durch b'' den zweiten Differentialquotienten von b, nach a genommen, bezeichnet,

$$y' = -\frac{a}{b}, \qquad y'' = \frac{(ab'-b)^3}{b''b^3}$$

folgt. Setzt man diese Werthe in den obigen Ausdruck des Krümmungsradius, so erhält man für den gesuchten Ausdruck:

$$7. \qquad \varrho = \pm \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}\,.\,b''}{(ab'-b)^3}.$$

Es sei nun $u=0$ die in Liniencoordinaten gegebene Gleichung einer beliebigen Curve. Bezeichnet man dann durch u_1 und u_2 die ersten Differentialquotienten der Function u, nach a und nach b genommen; ferner durch u_{11}, u_{12}, u_{22} die zweiten Differentialquotienten, so erhält man

$$u_1 + u_2 b' = 0, \qquad u_{11} + 2u_{12}b' + u_{22}b'^2 + u_2 b'' = 0;$$

und wenn man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von b' und b'' in die Gleichung (7) setzt, so ergiebt sich

$$8. \qquad \varrho = \pm \frac{(u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2)(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{(au_1+bu_2)^3}.$$

Nimmt man aber an, dass u eine algebraische ganze Function der Liniencoordinaten a, b sei, so lässt sich dieser Ausdruck für den Krümmungsradius auf ähnliche Art wie oben mit Hülfe der dritten Formel (5) einfacher darstellen, nämlich:

Wenn u eine beliebige ganze und homogene Function $n$ten Grades von den Variabeln a_1, a_2, a_3 ist und u_1, u_2, u_3 die ersten, u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{23}, u_{31}, u_{12} die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u nach den Variabeln genommen bedeuten; ferner a_1 und a_2 die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Liniencoordinaten sind und $a_3 = 1$ ist: so stellt die Gleichung $u = 0$ eine beliebige Curve $n$ter Classe dar, für welche der den Coordinaten a_1, a_2 der Tangente entsprechende Krümmungsradius

$$9. \qquad \varrho = \pm \frac{(u_{11} u_{22} u_{33} + 2 u_{12} u_{13} u_{23} - u_{11} u_{23}^2 - u_{22} u_{31}^2 - u_{33} u_{12}^2)(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(n-1)^2 u_3^3}$$

ist.

Ich werde nun diejenigen Tangenten der Curve $n$ter Classe $u = 0$ betrachten, in deren Tangirungspunkten der Krümmungsradius gleich 0 ist. Der obige Ausdruck des Krümmungsradius kann auf doppelte Weise verschwinden. Setzt man den *zweiten* Factor des Zählers $a_1^2 + a_2^2 = 0$, so erhält man zwei Gleichungen; nämlich die genannte, und die Gleichung der Curve $n$ter Classe $u = 0$, zur Bestimmung der Coordinaten solcher Tangenten, welche die Curve in Punkten berühren, in welchen der Krümmungsradius $= 0$ ist. Die Tangenten bilden mit der x Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems und mit jeder geraden Linie Winkel, deren trigonometrische Tangenten gleich $\pm\sqrt{-1}$ sind. Diese Art von Tangenten der Curve mag hier unberücksichtigt bleiben. Sie entsprechen nach dem Gesetze der Reciprocität den in der Unendlichkeit gelegenen Punkten der reciproken Curven, in welchen Punkten die Curven bekanntlich unendlich grosse Krümmungsradien haben. Setzt man den *ersten* Factor $u_{11} u_{22} u_{33} + 2 u_{12} u_{13} u_{23} - u_{11} u_{23}^2 - u_{22} u_{31}^2 - u_{33} u_{12}^2$, die Determinante der Function u, gleich Null, so ergeben sich daraus und aus der Gleichung der Curve die Coordinaten der *Rückkehrtangenten,* welche, mit Ausschluss der vorher genannten, solche Tangenten sind, die die Curve in Punkten berühren, in welchen die Krümmungsradien der Curve verschwinden. Diesen Rückkehrtangenten entsprechen in den reciproken Curven die Wendepunkte, in welchen bekanntlich die Krümmungsradien der Curven

unendlich gross sind. Aus der Ansicht der die Coordinaten der Rückkehrtangenten bestimmenden Gleichungen ergiebt sich nun folgender Lehrsatz:

Eine Curve $n$ter Classe hat im Allgemeinen $3n(n-2)$ Rückkehrtangenten.

Zur Bestimmung dieser Rückkehrtangenten dient Folgendes:

Wenn u eine ganze und homogene Function $n$ten Grades von den Variabeln a_1, a_2, a_3 ist; Δ die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u zusammengesetzte Determinante bedeutet und $\frac{a_1}{a_3}$, $\frac{a_2}{a_3}$ die rechtwinkligen (oder schiefwinkligen) Coordinaten einer variabeln Linie sind, so bestimmen die Gleichungen

$$u = 0, \qquad \Delta = 0$$

die Coordinaten der Rückkehrtangenten der Curve $n$ter Classe $u = 0$.

Der Lehrsatz folgt nach dem Gesetze der Reciprocität aus dem entsprechenden, bekannten Satze von den Wendepunkten; allein die darauf folgende Angabe dürfte nicht ohne Weiteres aus diesem Gesetze herzuleiten sein. Sie stimmt mit der Regel zur Bestimmung der Wendepunkte einer Curve $n$ter Ordnung, welche ich im 28. Bde. S. 104[1]) gegeben habe, vollständig überein, wenn man die Punktcoordinaten in Liniencoordinaten verändert.

Ich werde nun, indem ich $n = 3$ setze, um die Natur der Curven dritter Classe darzulegen, in dem folgenden Paragraphen einige Sätze über diese Curven aufstellen, deren Beweise sich aus den früher mitgetheilten Sätzen über Curven dritter Ordnung mit Hülfe des Reciprocitätsgesetzes ergeben, oder durch Deutung der sie begründenden Gleichungen, nach Umänderung der Punktcoordinaten in Liniencoordinaten.

2.

1. Alle, dreien gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen harmonischen Polarenpaare berühren eine und dieselbe Curve dritter Classe.

Harmonische Polaren eines Kegelschnittes sind bekanntlich jede zwei gerade Linien, welche mit dem aus dem Schnittpunkte derselben an den Kegelschnitt gezogenen Tangentenpaare ein harmonisches Büschel bilden.

---

1) [Seite 131 dieser Ausgabe].

2. Wenn eine Curve dritter Classe gegeben ist, so lassen sich drei verschiedene Systeme von Kegelschnitten finden, deren gemeinschaftliche harmonische Polarenpaare die Curve dritter Classe berühren.

Diese Systeme von Kegelschnitten werden auf folgende Art aus der zwischen a_1, a_2, a_3 gegebenen homogenen Gleichung $\Phi = 0$ der Curve dritter Classe gefunden, in welcher $\frac{a_1}{a_3}$, $\frac{a_2}{a_3}$ die Liniencoordinaten der Tangente bedeuten. Wenn F diejenige Function dritten Grades ist, die zur Determinante die Function Φ hat, und man bezeichnet durch F_1, F_2, F_3 die nach den Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten der Function F, so stellt sich das gesuchte System Kegelschnitte in Liniencoordinaten durch die Gleichung

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$$

dar; in welcher Gleichung λ_1, λ_2, λ_3 beliebige Constanten sind. Da sich aber drei verschiedene Functionen F bestimmen lassen, deren Determinanten die gegebene Function Φ ausdrücken, so giebt es auch drei verschiedene Systeme Kegelschnitte von der genannten Art. Den vorhergehenden Satz werde ich kürzer so ausdrücken:

3. Jede Curve dritter Classe hat drei verschiedene Systeme Polarenpaare.

4. Die Verbindungslinie der Tangirungspunkte jedes Polarenpaares der Curve dritter Classe berührt diese Curve. Und umgekehrt:

5. Jede Tangente der Curve dritter Classe schneidet die Curve in vier Punkten. Die Tangenten der Curve in irgend zwei von den vier Schnittpunkten bilden ein Polarenpaar.

6. Betrachtet man irgend zwei, demselben Systeme zugehörige Polarenpaare der Curve dritter Classe als die gegenüberliegenden Seiten eines der Curve umschriebenen Vierecks, so bilden die Diagonalen des Vierecks ein demselben Systeme zugehöriges Polarenpaar.

7. Jede drei Tangentenpaare der Curve dritter Classe, welche sich in denselben vier Punkten schneiden, bilden drei, demselben Systeme angehörende Polarenpaare.

8. Wenn man ein Polarenpaar der Curve dritter Classe mit einer Tangente der Curve durchschneidet und durch die beiden Schnittpunkte ein neues Tangentenpaar an die Curve legt, so wird die Verbindungslinie der

Schnittpunkte des Polarenpaares mit dem Tangentenpaare wieder zu einer Tangente der Curve.

9. *Die Systeme von drei Tangentenpaaren einer Curve dritter Classe, welche sich in denselben vier Punkten schneiden, zerfallen in drei Gattungen. Ein solches System ist demjenigen Systeme zugeordnet, in welchem eines von den drei Tangentenpaaren ein Polarenpaar ist.*

10. *Die der Curve dritter Classe umschriebenen Dreiecke, welche die Eigenschaft haben, dass die von den Ecken derselben an die Curve gezogenen Tangenten sich in einem und demselben Punkte schneiden, lassen sich in drei Systeme von Dreiecken sondern. Ein solches Dreieck gehört demjenigen System an, in welchem eine Seite und die durch die gegenüber liegende Ecke gehende Tangente ein Polarenpaar ist.*

11. *Es lassen sich der Curve dritter Classe nur drei Dreiecke umschreiben, deren Ecken auf den drei, von einem beliebigen Punkte an die Curve gezogenen Tangenten liegen.*

12. *Jede Tangente der Curve dritter Classe schneidet dieselbe in vier Punkten. Von den vier Tangenten in diesen vier Schnittpunkten ist jede die Polare zu den drei andern in verschiedenen Systemen, und irgend drei derselben bilden, zu zweien combinirt, drei Polarenpaare in verschiedenen Systemen.*

13. *Wenn von drei Tangenten der Curve dritter Classe eine Tangente die Polare zu den beiden andern in zwei verschiedenen Systemen ist, so bilden die beiden letzten ein Polarenpaar aus dem dritten Systeme.*

14. *Drei von einem beliebigen Punkte an die Curve dritter Classe gezogene Tangenten haben in verschiedenen Systemen drei Polaren, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden.*

15. *Wenn man die Curve dritter Classe mit einer Tangente derselben schneidet, so bilden die Tangenten in den vier Schnittpunkten ein vollständiges Vierseit, dessen drei Diagonalen paarweise Polarenpaare aus verschiedenen Systemen sind. Die Tangirungspunkte dieser Diagonalen und der Tangirungspunkt der ersten Tangente liegen auf einer und derselben geraden Linie, welche die Curve berührt.*

16. *Wenn man von einem beliebigen Punkte an die Curve dritter Classe drei Tangenten zieht, so schneiden dieselben die Curve in zwölf*

Punkten. Von den zwölf Tangenten in diesen Punkten schneiden sich sechzehnmal drei Tangenten in einem Punkte.

17. Wenn V eine beliebig gegebene homogene Function dritten Grades von den Liniencoordinaten a_1, a_2, a_3 *bedeutet, also*

$$V = 0$$

die Gleichung einer beliebig gegebenen Curve dritter Classe, und

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 = 0$$

die Gleichung eines gegebenen Punktes ist, so ist, wenn man die Determinante der Function V, gebildet aus den zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function, durch W bezeichnet,

$$\alpha_1\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial W}{\partial a_3} - \frac{\partial V}{\partial a_3}\frac{\partial W}{\partial a_2}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial V}{\partial a_3}\frac{\partial W}{\partial a_1} - \frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial W}{\partial a_3}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial W}{\partial a_2} - \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial W}{\partial a_1}\right) = 0$$

die Gleichung einer Curve vierter Classe, welche von den Tangenten berührt wird, die die Curve dritter Classe in denjenigen Punkten berühren, in welchen die drei aus dem gegebenen Punkte an die Curve gezogenen Tangenten die Curve schneiden.

Diese Sätze entsprechen den Sätzen 1 bis 17 in der vorhergehenden Abhandlung. Ich füge hiezu noch einige Sätze, welche den früher aufgestellten Sätzen über die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung auf gleiche Weise entsprechen.

18. Jede zwei Rückkehrtangenten einer Curve dritter Classe schneiden sich in einem Punkte, durch welchen auch eine dritte Rückkehrtangente geht.

19. Es lassen sich viermal drei Punkte angeben, durch welche die neun Rückkehrtangenten einer Curve dritter Classe gehen.

20. Wenn man die homogene Gleichung einer Curve dritter Classe durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln b_1, b_2, b_3 *auf die Form*

$$b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + 6\,\Pi\, b_1 b_2 b_3 = 0$$

bringt, so sind $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$ *die Gleichungen der drei Punkte, in welchen sich die neun Rückkehrtangenten der Curve zu dreien schneiden.*

Von diesen Sätzen werde ich in den folgenden Paragraphen Gebrauch machen.

3.

Eine beliebig gegebene homogene Function φ dritten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 lässt sich, wie ich im 28. Bande dieses Journals S. 95 [1]) bewiesen habe, durch lineäre Substitutionen von der Form

$$10. \quad \begin{cases} x_1 = x_1^{(1)} y_1 + x_1^{(2)} y_2 + x_1^{(3)} y_3, \\ x_2 = x_2^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2 + x_2^{(3)} y_3, \\ x_3 = x_3^{(1)} y_1 + x_3^{(2)} y_2 + x_3^{(3)} y_3 \end{cases}$$

auf die einfache Form

$$11. \quad \varphi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3$$

zurückführen. Wenn man durch $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, oder, kürzer ausgedrückt, durch x_1, x_2, x_3 rechtwinklige Punktcoordinaten bezeichnet, so stellt die Gleichung $\varphi = 0$ eine beliebige Curve dritter Ordnung dar, und die Gleichungen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ sind die Gleichungen von drei geraden Linien, welche durch die neun Wendepunkte der Curve gehen (Bd. 28 S. 107).[2]) Ich werde fortan die Variabeln y_1, y_2, y_3, welche als Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3 durch die Substitutionen (10) gegeben sind, die neuen Coordinaten des Punktes nennen, welcher durch die rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3 bestimmt ist.

Die Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$, welche ich hier untersuchen werde, lässt sich als der geometrische Ort der harmonischen Polenpaare dreier zu bestimmender Kegelschnitte oder eines ganzen Systems Kegelschnitte betrachten, unter welchen die drei erwähnten beliebig gewählt werden können (Bd. 28 S. 105).[3]) Die Gleichung dieser Kegelschnitte erhält man (wie an der citirten Stelle bewiesen worden ist) aus derjenigen der Function f (deren Determinante die Function φ ist), wenn man die Summe der partiellen Differentialquotienten der Function f, jede mit einer veränderlichen Constante multiplicirt, gleich Null setzt. Es ist aber die Function f, durch die neuen Coordinaten ausgedrückt, abgesehen von einem constanten Factor, mit welchem dieselbe multiplicirt ist und auf welchen es hier nicht ankommt, folgende:

---

1) [Diese Ausgabe, S. 121.]
2) [Diese Ausgabe, S. 135.]
3) [Diese Ausgabe, S. 133.]

12. $$f = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\,p\,y_1\,y_2\,y_3;$$

wo p durch die Gleichung dritten Grades

13. $$p^3 + 3\,p^2\,\pi + \tfrac{1}{2} = 0$$

gegeben ist. Mithin erhält man für die Gleichung des gesuchten Systems von Kegelschnitten:

$$k_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0.$$

Setzt man nun je zwei von den Grössen λ gleich Null, so erhält man aus dieser Gleichung die Gleichungen

14. $$y_1^2 + 2\,p\,y_2\,y_3 = 0; \qquad y_2^2 + 2\,p\,y_1\,y_3 = 0; \qquad y_3^2 + 2\,p\,y_1\,y_2 = 0$$

dreier Kegelschnitte, deren gemeinschaftliche Polenpaare auf der Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ liegen.

Es seien y_1, y_2, y_3 und Y_1, Y_2, Y_3 die neuen Coordinaten eines beliebigen, diesen drei Kegelschnitten gemeinschaftlichen Polenpaares, welches ich kürzer ein Polenpaar der Curve genannt habe. Alsdann hat man folgende Bedingungsgleichungen:

15. $$\begin{cases} y_1\,Y_1 + p\,y_3\,Y_2 + p\,y_2\,Y_3 = 0, \\ p\,y_3\,Y_1 + y_2\,Y_2 + p\,y_1\,Y_3 = 0, \\ p\,y_2\,Y_1 + p\,y_1\,Y_2 + y_3\,Y_3 = 0; \end{cases}$$

aus welchen sich durch Elimination von y_1, y_2, y_3 oder Y_1, Y_2, Y_3 wiederum die Gleichung der Curve $\varphi = 0$ ergiebt. Durch dieses Polenpaar der Curve lege ich eine gerade Linie, deren Gleichung

16. $$b_1\,y_1 + b_2\,y_2 + b_3\,y_3 = 0$$

sei, welche durch Substitution der Werthe von y_1, y_2, y_3, wie sie sich durch Auflösung der linearen Gleichungen (10) ergeben, in

17. $$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 = 0$$

übergehe. Zwischen den rechtwinkligen Coordinaten dieser geraden Linie a_1, a_2, a_3 und den neuen Coordinaten derselben geraden Linie, welche ich als die Coëfficienten b_1, b_2, b_3 der durch die neuen Punktcoordinaten ausgedrückten Gleichung (16) der geraden Linie definire, erhält man folgende Relationen:

$$18. \quad \begin{cases} b_1 = x_1^{(1)} a_1 + x_2^{(1)} a_2 + x_3^{(1)} a_3 \\ b_2 = x_1^{(2)} a_1 + x_2^{(2)} a_2 + x_3^{(2)} a_3 \\ b_3 = x_1^{(3)} a_1 + x_2^{(3)} a_2 + x_3^{(3)} a_3, \end{cases}$$

welche die einen bestimmen, wenn die anderen gegeben sind. Damit nun die gerade Linie (16) durch das erwähnte Polenpaar der Curve hindurchgehe, müssen folgende zwei Gleichungen erfüllt werden:

$$19. \quad \begin{cases} b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 = 0, \\ b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den fünf Gleichungen (15 und 19) die Variabeln y_1, y_2, y_3 und Y_1, Y_2, Y_3, welche in diesen Gleichungen die Stelle von vier Unbekannten vertreten, da nur ihre *Verhältnisse* in die Gleichungen eingehen, so erhält man eine Relation $\Phi = 0$ zwischen den neuen Coordinaten b_1, b_2, b_3 der geraden Linie (16), welche ein Polenpaar der Curve verbindet. Diese Elimination lässt sich am einfachsten dadurch ausführen, dass man den Gleichungen (15 und 19) die Form

$$\begin{aligned} -\frac{y_1 Y_1}{p} &= y_2 Y_3 + y_3 Y_2, & \mu b_1 &= y_2 Y_3 - y_3 Y_2, \\ -\frac{y_2 Y_2}{p} &= y_3 Y_1 + y_1 Y_3, & \mu b_2 &= y_3 Y_1 - y_1 Y_3, \\ -\frac{y_3 Y_3}{p} &= y_1 Y_2 + y_2 Y_1, & \mu b_3 &= y_1 Y_2 - y_2 Y_1 \end{aligned}$$

giebt und sie paarweise addirt, oder von einander abzieht, wodurch man

$$\begin{aligned} \mu b_1 - \frac{y_1 Y_1}{p} &= 2 y_2 Y_3, & -\mu b_1 - \frac{y_1 Y_1}{p} &= 2 y_3 Y_2, \\ \mu b_2 - \frac{y_2 Y_2}{p} &= 2 y_3 Y_1, & -\mu b_2 - \frac{y_2 Y_2}{p} &= 2 y_1 Y_3, \\ \mu b_3 - \frac{y_3 Y_3}{p} &= 2 y_1 Y_2, & -\mu b_3 - \frac{y_3 Y_3}{p} &= 2 y_2 Y_1 \end{aligned}$$

erhält. Multiplicirt man alsdann die erste Gleichung (19) nach einander mit $2 Y_1$, $2 Y_2$, $2 Y_3$ und setzt die Werthe der Producte rechts aus den zuletzt abgeleiteten Gleichungen hinein, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$20. \quad \begin{cases} -2 p b_1 y_1 Y_1 + b_3 y_2 Y_2 + b_2 y_3 Y_3 = 0, \\ b_3 y_1 Y_1 - 2 p b_2 y_2 Y_2 + b_1 y_3 Y_3 = 0, \\ b_2 y_1 Y_1 + b_1 y_2 Y_2 - 2 p b_3 y_3 Y_3 = 0, \end{cases}$$

woraus durch Elimination der drei Producte $y_1 Y_1$; $y_2 Y_2$; $y_3 Y_3$ die gesuchte Relation $\Phi = 0$ hervorgeht. Ich bemerke noch, dass, wenn man in (20)

$$y_1 Y_1 = B_1; \qquad y_2 Y_2 = B_2; \qquad y_3 Y_3 = B_3$$

setzt, b_1, b_2, b_3 und B_1, B_2, B_3 die Coordinaten eines Polarenpaares der Curve dritter Classe $\Phi = 0$ sind.

Auf dem angegebenen Wege findet man für die Function Φ:

21. $$\Phi = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + 6\,\Pi\, b_1 b_2 b_3,$$

wo die Constante Π durch die lineäre Gleichung

22. $$p^3 + \tfrac{3}{2} p\, \Pi - \tfrac{1}{4} = 0$$

bestimmt wird, und nun p eine der drei Wurzeln der Gleichung (13) ist.

Aus dem Grade der Gleichung $\Phi = 0$ lässt sich nun folgender Lehrsatz schliessen, welchem ich zugleich seinen entsprechenden beifüge:

21. Die geraden Linien, welche Polenpaare einer Curve dritter Ordnung aus einem und demselben Systeme verbinden, berühren eine Curve dritter Classe.

Die Punkte, in welchen sich Polarenpaare einer Curve dritter Classe aus einem und demselben Systeme schneiden, liegen auf einer Curve dritter Ordnung.

Da eine Curve dritter Ordnung drei Systeme Polenpaare und eine Curve dritter Classe drei Systeme Polarenpaare hat, so lassen sich die beiden genannten Sätze, mit Berücksichtigung der früher angegebenen, auch so ausdrücken:

22. Wenn man von einem variabeln Punkte einer gegebenen Curve dritter Ordnung Tangenten an die Curve zieht und durch die vier Tangirungspunkte drei Linienpaare legt, so berührt jedes dieser drei Linienpaare eine andere Curve dritter Classe.

Wenn man eine gegebene Curve dritter Classe mit einer variabeln Tangente durchschneidet, so bilden die Tangenten in den vier Schnittpunkten ein vollständiges Vierseit, in welchem jede von den drei Diagonalen von einem Punktenpaare begrenzt wird, welches eine andere Curve dritter Ordnung beschreibt.

Aus der Form der Function Φ lässt sich Folgendes schliessen, was zur Vervollständigung der vorhergehenden Sätze 22 dient:

23. Durch die neun Wendepunkte der gegebenen Curve dritter Ordnung lassen sich viermal drei gerade Linien legen. Diese drei geraden Linien bilden ein Dreieck, in dessen Ecken sich die neun Rückkehrtangenten jeder der drei Curven dritter Classe zu dreien schneiden.

Die neun Rückkehrtangenten der gegebenen Curve dritter Classe gehen viermal durch drei Punkte. Diese drei Punkte bilden die Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten durch die neun Wendepunkte jeder der drei Curven dritter Ordnung gehen.

Ich werde in dem folgenden Paragraphen die oben durchgeführte Untersuchung, aus einem anderen Gesichtspunkte betrachtet, wieder aufnehmen; einer nicht unwichtigen Bemerkung wegen, die sich auf dem eingeschlagenen Wege schwerer begründen lässt.

4.

Es seien z_1, z_2, z_3 die neuen Coordinaten eines beliebigen Punktes P der betrachteten Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$. Von ihm aus lassen sich an die Curve vier Tangenten ziehen, deren Tangirungspunkte in dem Kegelschnitte

$$z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = 0$$

liegen, welcher die Curve zugleich in dem Punkte P berührt. Setzt man der Kürze wegen $\beta = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3$, so werden die Coefficienten β_1, β_2, β_3 sich immer so bestimmen lassen, dass die Gleichung

$$23. \qquad \varphi + \tfrac{1}{3} \beta \left(z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) = \alpha . b . B$$

identisch wird; in welcher Gleichung α, b, B lineäre, homogene, noch zu bestimmende Functionen von y_1, y_2, y_3 bedeuten, die, der Reihe nach gleich Null gesetzt, die Tangente in dem Punkte P und das durch die vier Tangirungspunkte gelegte Linienpaar darstellen. Setzt man also

$$\alpha_1 = z_1^2 + 2\pi z_2 z_3, \qquad \alpha_2 = z_2^2 + 2\pi z_3 z_1, \qquad \alpha_3 = z_3^2 + 2\pi z_1 z_2,$$
$$\alpha = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3,$$
$$b = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3,$$
$$B = B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3,$$

so werden die unbekannten Coëfficienten in den genannten lineären, homogenen Functionen sich durch Entwicklung der beiden Theile der identischen Gleichung (23) und durch Gleichsetzung der Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln finden lassen. Aus dieser Gleichsetzung gehen aber folgende Gleichungen hervor:

$$24. \quad \begin{cases} 1 + \beta_1 z_1 = \alpha_1 b_1 B_1, \quad 1 + \beta_2 z_2 = \alpha_2 b_2 B_2, \quad 1 + \beta_3 z_3 = \alpha_3 b_3 B_3, \\ \beta_2 z_1 + 2\pi \beta_1 z_3 = \alpha_2 b_1 B_1 + \alpha_1 (b_1 B_2 + b_2 B_1), \\ \beta_1 z_2 + 2\pi \beta_2 z_3 = \alpha_1 b_2 B_2 + \alpha_2 (b_1 B_2 + b_2 B_1), \\ \beta_3 z_2 + 2\pi \beta_2 z_1 = \alpha_3 b_2 B_2 + \alpha_2 (b_2 B_3 + b_3 B_2), \\ \beta_2 z_3 + 2\pi \beta_3 z_1 = \alpha_2 b_3 B_3 + \alpha_3 (b_2 B_3 + b_3 B_2), \\ \beta_1 z_3 + 2\pi \beta_3 z_2 = \alpha_1 b_3 B_3 + \alpha_3 (b_3 B_1 + b_1 B_3), \\ \beta_3 z_1 + 2\pi \beta_1 z_2 = \alpha_3 b_1 B_1 + \alpha_1 (b_3 B_1 + b_1 B_3). \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen, in welchen sich, wie man bemerken wird, die Indices vertauschen lassen, die Grössen b_1, b_2, b_3 und B_1, B_2, B_3 zu bestimmen, hebe ich die vierte Gleichung heraus und eliminire β_1 und β_2 mit Zuziehung der beiden ersten Gleichungen. Dieses giebt

$$25. \quad -\frac{\alpha_1}{z_1 z_2} + \frac{z_1}{z_2} \alpha_2 b_2 B_2 + 2\pi \frac{z_3}{z_1} \alpha_1 b_1 B_1 = \alpha_2 b_1 B_1 + \alpha_1 (b_1 B_2 + b_2 B_1),$$

und durch Vertauschung der Indices 1, 2 geht die Gleichung in

$$26. \quad -\frac{\alpha_2}{z_1 z_2} + \frac{z_2}{z_1} \alpha_1 b_1 B_1 + 2\pi \frac{z_3}{z_2} \alpha_2 b_2 B_2 = \alpha_1 b_2 B_2 + \alpha_2 (b_1 B_2 + b_2 B_1)$$

über. Ich multiplicire nun die erste dieser Gleichungen mit α_2, die zweite mit α_1 und ziehe das Letztere von dem Ersteren ab. Dadurch erhalte ich

$$(z_1 b_2 B_2 - z_2 b_1 B_1) \left(\frac{\alpha_1^2}{z_1} + \frac{\alpha_2^2}{z_2} - \frac{2\pi \alpha_1 \alpha_2 z_3}{z_1 z_2} \right) = 0.$$

Da der zweite Factor in dieser Gleichung nicht gleich Null sein kann, so wird:

$$b_1 B_1 : b_2 B_2 = z_1 : z_2.$$

Durch Vertauschung der Indices in dieser Proportion erhält man

$$b_1 B_1 : b_2 B_2 : b_3 B_3 = z_1 : z_2 : z_3,$$

oder, wenn man durch $\varkappa$ einen unbestimmten Factor bezeichnet:

$$27. \qquad b_1 B_1 = \varkappa z_1; \qquad b_2 B_2 = \varkappa z_2; \qquad b_3 B_3 = \varkappa z_3.$$

Setzt man diese Werthe von $b_1 B_1$ und $b_2 B_2$ in die obige Gleichung (25) und bezeichnet den Ausdruck $2\pi\varkappa - \frac{1}{z_1 z_2 z_3}$, welcher sich durch die Vertauschung der Indices nicht ändert, der Kürze wegen durch λ, so geht diese Gleichung in

$$\lambda z_3 = b_1 B_2 + b_2 B_1$$

über; woraus durch Vertauschung der Indices wiederum folgende drei Gleichungen hervorgehen:

$$28. \quad b_2 B_3 + b_3 B_2 = \lambda z_1; \qquad b_3 B_1 + b_1 B_3 = \lambda z_2; \qquad b_1 B_2 + b_2 B_1 = \lambda z_3.$$

Die Grössen b_1, b_2, b_3 und B_1, B_2, B_3, oder vielmehr ihre Verhältnisse, lassen sich aus den Gleichungen (27 und 28) nicht anders als durch Auflösung einer cubischen Gleichung finden; was geometrisch schon daraus erhellt, dass sich durch die genannten vier Tangirungspunkte drei Linienpaare legen lassen. Um die cubische Gleichung auf symmetrische Weise abzuleiten, nehme man an, dass Z_1, Z_2, Z_3 drei Grössen seien, welche den beiden Gleichungen

$$b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + b_3 Z_3 = 0, \qquad B_1 Z_1 + B_2 Z_2 + B_3 Z_3 = 0$$

genügen; also die neuen Coordinaten desjenigen Punktes, in welchem sich die Linien $b = 0$ und $B = 0$ schneiden. Alsdann lassen sich aus den Gleichungen (27 und 28) leicht folgende drei Gleichungen zusammenstellen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} z_1 Z_1 + z_3 Z_2 + z_2 Z_3 &= 0, \\ z_3 Z_1 + \frac{1}{p} z_2 Z_2 + z_1 Z_3 &= 0, \\ z_2 Z_1 + z_1 Z_3 + \frac{1}{p} z_3 Z_3 &= 0. \end{aligned}$$

in welchen der Kürze wegen $\frac{\lambda}{\varkappa} = 2p$ gesetzt ist. Eliminirt man nun die Hülfsgrössen Z_1, Z_2, Z_3 und bemerkt, dass $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 6\pi z_1 z_2 z_3 = 0$ ist, weil z_1, z_2, z_3 die neuen Coordinaten eines Punktes der Curve $\varphi = 0$ sind, so erhält man für die gesuchte cubische Gleichung:

$$29. \qquad p^3 + 3p^2\pi + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Diese Gleichung stimmt aber mit der Gleichung (13) überein. Es ist mithin p hier dieselbe Grösse, welche an der genannten Stelle mit diesem Buchstaben bezeichnet wurde.

Will man nun die Verhältnisse $b_1 : b_2 : b_3$ und $B_1 : B_2 : B_3$ suchen, nachdem man einen Werth von p berechnet hat, welcher der Gleichung (29) genügt, so kann dies aus folgenden Gleichungen geschehen:

$$30. \qquad \begin{cases} b_1 B_1 = \varkappa z_1, & b_2 B_3 + b_3 B_2 = 2p\varkappa z_1, \\ b_2 B_2 = \varkappa z_2, & b_3 B_1 + b_1 B_3 = 2p\varkappa z_2, \\ b_3 B_3 = \varkappa z_3, & b_1 B_2 + b_2 B_1 = 2p\varkappa z_3, \end{cases}$$

in welche die Gleichungen (27 und 28) übergehen, wenn man für λ den Werth $2p\varkappa$ setzt. Es erfordert diese Bestimmung nur die Auflösung von quadratischen Gleichungen; welche ich übergehe. Es lässt sich aber aus den zuletzt angeführten Gleichungen ein wichtiges geometrisches Resultat ziehen. Denn multiplicirt man die drei ersten Gleichungen mit $2p$ und zieht sie von den drei letzten ab, so erhält man

$$31. \qquad \begin{cases} -2p\, b_1 B_1 + b_3 B_2 + b_2 B_3 = 0, \\ b_3 B_1 - 2p\, b_2 B_2 + b_1 B_3 = 0, \\ b_2 B_1 + b_1 B_2 - 2p\, b_3 B_3 = 0; \end{cases}$$

welche Gleichungen mit den Gleichungen (20) übereinstimmen, wenn man $y_1 Y_1 = B_1$, $y_2 Y_2 = B_2$, $y_3 Y_3 = B_3$ setzt. Dieses beweist aber, dass das betrachtete Linienpaar $b = 0$ und $B = 0$ ein Polarenpaar der Curve dritter Classe $\Phi = 0$ ist. Die Lehrsätze 22 lassen sich hiernach wie folgt vervollständigen:

24. Wenn man von einem variabeln Punkte einer gegebenen Curve dritter Ordnung Tangenten an die Curve zieht und durch die vier Tangirungspunkte drei Linienpaare legt, so berührt jedes der drei Linienpaare eine andere Curve dritter Classe und ist zugleich ein Polarenpaar dieser Curve.

Wenn man eine gegebene Curve dritter Classe mit einer variabeln Tangente durchschneidet, so bilden die Tangenten in den vier Durchschnittspunkten ein vollständiges Vierseit, in welchem jede der drei Diagonalen von einem Punktenpaare begrenzt wird, welches eine andere Curve dritter Ordnung beschreibt, und dieses Punktenpaar ist zugleich ein Polenpaar dieser Curve.

Königsberg, im August 1847.

13.

Eigenschaften der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 38, Seite 257—261.]

---

1. Von den neun Wendepunkten $\delta_1, \delta_2 \ldots . \delta_9$ *einer beliebigen Curve dritter Ordnung liegen zwölfmal drei Punkte in einer geraden Linie, nach folgendem Schema:*

$$\begin{array}{llll} \delta_1\,\delta_2\,\delta_3 \equiv A_1, & \delta_1\,\delta_4\,\delta_8 \equiv B_1, & \delta_1\,\delta_5\,\delta_7 \equiv C_1, & \delta_1\,\delta_6\,\delta_9 \equiv D_1, \\ \delta_4\,\delta_5\,\delta_6 \equiv A_2, & \delta_3\,\delta_6\,\delta_7 \equiv B_2, & \delta_2\,\delta_6\,\delta_8 \equiv C_2, & \delta_3\,\delta_5\,\delta_8 \equiv D_2, \\ \delta_7\,\delta_8\,\delta_9 \equiv A_3, & \delta_2\,\delta_5\,\delta_9 \equiv B_3, & \delta_3\,\delta_4\,\delta_9 \equiv C_3, & \delta_2\,\delta_4\,\delta_7 \equiv D_3; \end{array}$$

wo die Zeichen für die zwölf geraden Linien so angenommen sind, dass A_1, A_2, A_3 *drei gerade Linien bedeuten, welche durch sämmtliche neun Wendepunkte hindurchgehen; ebenso* B_1, B_2, B_3, *etc.*

Den Beweis dieses Satzes habe ich in einem früheren Bande dieses Journals [1]) gegeben. Man kann ihn aber auch prüfen, wenn man die Coordinaten der Wendepunkte selbst durch lineäre Gleichungen ausdrückt. Ist nämlich von der Curve dritter Ordnung $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3 = 0$ die Gleichung, in welcher y_1, y_2, y_3 lineäre Functionen der rechtwinkligen Coordinaten bedeuten, die, wie man weiss, gleich Null gesetzt, die Gleichungen von drei geraden Linien werden, welche durch die neun Wendepunkte hindurchgehen: so erhält man aus der Verbindung der

---

1) [Diese Ausgabe, S. 135 und 141.]

Gleichungen der genannten drei geraden Linien mit der Gleichung der Curve für die Wendepunkte folgende Verhältnisse der linearen Functionen y_1, y_2, y_3:

	y_1	y_2	y_3
δ_1	0 :	$+1$:	-1
δ_2	0 :	$+1$:	$-k''$
δ_3	0 :	$+1$:	$-k'$
δ_4	-1 :	0 :	$+1$
δ_5	$-k''$:	0 :	$+1$
δ_6	$-k'$:	0 :	$+1$
δ_7	$+1$:	$-k'$:	0
δ_8	$+1$:	-1 :	0
δ_9	$+1$:	$-k''$:	0,

wo k' und k'' die beiden imaginären dritten Wurzeln der Einheit sind.

Hieraus ergiebt sich nun für die Gleichungen der zwölf geraden Linien:

$$A_1 \equiv y_1 = 0; \qquad B_1 \equiv y_1 + y_2 + y_3 = 0;$$
$$A_2 \equiv y_2 = 0; \qquad B_2 \equiv y_1 + k'' y_2 + k' y_3 = 0;$$
$$A_3 \equiv y_3 = 0; \qquad B_3 \equiv y_1 + k' y_2 + k'' y_3 = 0;$$
$$C_1 \equiv k' y_1 + y_2 + y_3 = 0; \qquad D_1 \equiv k'' y_1 + y_2 + y_3 = 0;$$
$$C_2 \equiv y_1 + y_2 + k' y_3 = 0; \qquad D_2 \equiv y_1 + y_2 + k'' y_3 = 0;$$
$$C_3 \equiv y_1 + k' y_2 + y_3 = 0; \qquad D_3 \equiv y_1 + k'' y_2 + y_3 = 0.$$

Die neun letzten Gleichungen erhält man unmittelbar, wenn man in den drei Substitutionen (Bd. 28 S. 96 des Crelle'schen Journals)[1]) die Grössen z_1, z_2, z_3 gleich Null setzt.

Dem obigen Satze entspricht folgender Satz von den Rückkehrtangenten einer Curve dritter Classe:

I. Von den neun Rückkehrtangenten δ_1, δ_2, ... δ_9 einer beliebigen Curve dritter Classe schneiden sich zwölfmal drei Rückkehrtangenten in einem Punkte, in der Art, wie es das obige Schema zeigt, wo A_1, A_2, ... D_3 die zwölf Schnittpunkte bedeuten.

1) [Diese Ausgabe, S. 122.]

Diese beiden Sätze lassen sich auch umkehren, wie folgt:

2. Wenn neun Punkte, in einer und derselben Ebene, eine solche Lage zu einander haben, dass zwölfmal drei von ihnen auf einer geraden Linie liegen, so wie das obige Schema es vorschreibt, so sind diese neun Punkte die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung, welche durch die neun Punkte hindurchgehen.

II. Wenn neun gerade Linien, in einer und derselben Ebene, eine solche Lage zu einander haben, dass zwölfmal drei von diesen Linien durch einen und denselben Punkt gehen, nach Vorschrift des obigen Schema's, so sind diese neun geraden Linien die Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe, welche von den neun geraden Linien berührt werden.

Die geraden Linien A_1, A_2, A_3 bilden die Seiten eines Dreiecks a_1, a_2, a_3. Die Coordinaten der diesen Seiten gegenüberliegenden Ecken a_1, a_2, a_3 des Dreiecks lassen sich leicht aus den angegebenen Gleichungen bestimmen. Ebenso die Coordinaten der Ecken b_1, b_2, b_3 des durch die Linien B_1, B_2, B_3 gebildeten Dreiecks u. s. w. Für diese Coordinaten ergeben sich nämlich folgende Verhältnisse der Grössen y_1, y_2, y_3:

	y_1 y_2 y_3
a_1	$1 : 0 : 0$
a_2	$0 : 1 : 0$
a_3	$0 : 0 : 1$
b_1	$1 : 1 : 1$
b_2	$1 : k' : k''$
b_3	$1 : k'' : k'$,

	y_1 y_2 y_3
c_1	$1 : k' : k'$
c_2	$1 : 1 : k''$
c_3	$1 : k'' : 1$
d_1	$1 : k'' : k''$
d_2	$1 : 1 : k'$
d_3	$1 : k' : 1$.

Betrachtet man nun die neun geraden Linien Δ, deren Gleichungen

$$\begin{array}{lll}\Delta_1 \equiv y_2 - y_3 = 0, & \Delta_4 \equiv y_1 - y_3 = 0, & \Delta_7 \equiv y_1 - k'' y_2 = 0,\\ \Delta_2 \equiv y_2 - k'\, y_3 = 0, & \Delta_5 \equiv y_1 - k'' y_3 = 0, & \Delta_8 \equiv y_1 - y_2 = 0,\\ \Delta_3 \equiv y_2 - k'' y_3 = 0, & \Delta_6 \equiv y_1 - k'\, y_3 = 0, & \Delta_9 \equiv y_1 - k'\, y_2 = 0\end{array}$$

sind, so ist leicht zu sehen, dass auf jeder derselben ein Punkt *a*, ein Punkt *b*, ein Punkt *c* und ein Punkt *d* liegt; was genauer durch folgenden Satz ausgedrückt wird:

3. Die geraden Linien A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3; D_1, D_2, D_3 (in Satz 1) bilden vier Dreiecke, deren entsprechende Ecken a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3 auf neun geraden Linien Δ liegen, so, wie es das folgende Schema angiebt:

$$\begin{array}{lll} a_1 b_1 c_1 d_1 \equiv \Delta_1, & a_2 b_1 c_3 d_3 \equiv \Delta_4, & a_3 b_2 c_1 d_3 \equiv \Delta_7, \\ a_1 b_3 c_2 d_3 \equiv \Delta_2, & a_2 b_3 c_1 d_2 \equiv \Delta_5, & a_3 b_1 c_2 d_2 \equiv \Delta_8, \\ a_1 b_2 c_3 d_2 \equiv \Delta_3, & a_2 b_2 c_2 d_1 \equiv \Delta_6, & a_3 b_3 c_3 d_1 \equiv \Delta_9. \end{array}$$

Und unter der Voraussetzung des Satzes (I) hat man folgenden, dem vorhergehenden entsprechenden Satz:

III. Die Punkte A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2 C_3; D_1, D_2, D_3 bilden die Ecken von vier Dreiecken, deren entsprechende Seiten a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3 durch neun Punkte Δ gehen, auf die Weise, wie es das vorhergehende Schema angiebt.

In dem ersteren Falle schneiden sich, wie aus dem letzten Schema zu sehen ist, zwölfmal drei gerade Linien Δ in einem Punkte, in folgender Art:

$$\begin{array}{llll} \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \equiv a_1; & \Delta_1 \Delta_4 \Delta_8 \equiv b_1; & \Delta_1 \Delta_5 \Delta_7 \equiv c_1; & \Delta_1 \Delta_6 \Delta_9 \equiv d_1; \\ \Delta_4 \Delta_5 \Delta_6 \equiv a_2; & \Delta_3 \Delta_6 \Delta_7 \equiv b_2; & \Delta_2 \Delta_6 \Delta_8 \equiv c_2; & \Delta_3 \Delta_5 \Delta_8 \equiv d_2; \\ \Delta_7 \Delta_8 \Delta_9 \equiv a_3; & \Delta_2 \Delta_5 \Delta_9 \equiv b_3; & \Delta_3 \Delta_4 \Delta_9 \equiv c_3; & \Delta_2 \Delta_4 \Delta_7 \equiv d_3. \end{array}$$

Dieses Schema geht in das erste (in 1) über, wenn man für die kleinen Buchstaben die entsprechenden grossen und für die grossen die entsprechenden kleinen setzt. Aus dieser Bemerkung gehen mit Rücksicht auf II und 2 folgende Sätze 4 und IV hervor:

4. Die neun geraden Linien Δ (in 3) sind die Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe, welche von den neun geraden Linien Δ berührt werden.

Von jedem der Wendepunkte der Curve dritter Ordnung lassen sich nur drei Tangenten an die Curve ziehen, und die Tangirungspunkte liegen in einer geraden Linie. Diese den neun Wendepunkten entsprechenden neun geraden Linien sind die Linien Δ; wie aus ihren oben angegebenen Gleichungen ersichtlich ist. Bringt man hiermit den Lehr-

satz 22 aus der früheren Abhandlung[1]) in Verbindung, nämlich: „Wenn man von einem variabeln Punkte der Curve dritter Ordnung Tangenten an die Curve zieht und durch die vier Tangirungspunkte drei Linienpaare legt, so berührt jedes von den drei Linienpaaren eine andere Curve dritter Classe“: so zeigt sich sogleich, dass die neun Linien Δ die Rückkehrtangenten dieser drei Curven dritter Classe sind.

IV. Die neun Punkte Δ (in III) sind die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung, welche durch die neun Punkte gehen.

Jede Rückkehrtangente der Curve dritter Classe schneidet die Curve nur in drei Punkten, und die Tangenten der Curve in diesen drei Punkten schneiden sich in einem und demselben Punkte. Auf diese Weise entspricht jeder Rückkehrtangente ein Punkt, und die den neun Rückkehrtangenten entsprechenden neun Punkte sind eben die Punkte Δ. Stellt man diese Bemerkung mit dem reciproken Lehrsatz 22 zusammen, nämlich: „Wenn man die Curve dritter Classe mit einer variabeln Tangente durchschneidet, so bilden die Tangenten in den vier Schnittpunkten ein vollständiges Vierseit, in welchem jede von den drei Diagonalen von einem Punktenpaare begrenzt wird, welches eine andere Curve dritter Ordnung beschreibt“: so zeigt sich, dass die neun Punkte Δ die Wendepunkte eben dieser drei Curven dritter Ordnung sind.

Die neun geraden Linien Δ lassen sich auch auf eine andere als die beschriebene Art construiren. Denn betrachtet man das Dreieck a_1, a_2, a_3, so zeigt sich leicht, dass die Linien $a_1\delta_1$ und Δ_1; $a_1\delta_2$ und Δ_2; $a_1\delta_3$ und Δ_3 zu den Seiten A_2 und A_3 des Dreiecks harmonisch sind; ferner, dass die Linien $a_2\delta_4$ und Δ_4; $a_2\delta_5$ und Δ_5; $a_2\delta_6$ und Δ_6 harmonisch sind zu den Seiten A_3 und A_1; endlich, dass die Linien $a_3\delta_7$ und Δ_7; $a_3\delta_8$ und Δ_8; $a_3\delta_9$ und Δ_9 harmonisch sind zu den Seiten A_1 und A_2.

Aus dieser Bemerkung ergiebt sich folgender Lehrsatz:

5. Wenn man durch die neun Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung die Seiten eines Dreiecks hindurchlegt (was viermal geschehen kann), den Schnittpunkt einer Seite mit der Curve durch eine gerade Linie mit der

---

1) [Diese Ausgabe, S. 205.]

gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbindet und zu dieser Verbindungslinie sowie den beiden Seiten des Dreiecks, welche sich in ihr schneiden, die vierte harmonische Linie construirt, so geht diese Linie durch eine Ecke eines jeden von den vier Dreiecken hindurch, deren Seiten die Curve in den neun Wendepunkten schneiden.

Diesem Satze entspricht folgender andere:

V. Wenn man ein Dreieck construirt, durch dessen Ecken die neun Rückkehrtangenten einer Curve dritter Classe hindurchgehen (was viermal geschehen kann), und zu den beiden Seiten des Dreiecks sowie der Rückkehrtangente, welche in einer Ecke des Dreiecks zusammenstossen, die vierte harmonische Linie construirt, so schneidet diese die gegenüberliegende Seite des Dreiecks in einem Punkte, durch welchen eine Seite jedes Dreiecks hindurchgeht, in dessen Ecken sich die neun Rückkehrtangenten zu dreien schneiden.

Königsberg, im September 1847.

14.

Transformation einer beliebigen homogenen Function dritten Grades von zwei Variabeln durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln, in eine Form, welche nur die dritten Potenzen der neuen Variabeln enthält.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 38, Seite 262—265.]

Es sei

1. $$f = a\,x^3 + 3\,b\,x^2 y + 3\,c\,x\,y^2 + d\,y^3$$

eine beliebig gegebene homogene Function dritten Grades zwischen den beiden Variabeln x und y. Diese Function lässt sich durch Substitutionen von der Form

2. $$x = \alpha\,u - \beta\,v, \qquad y = \alpha'\,u - \beta'\,v$$

auf die einfachere Form

3. $$f = A\,.\,u^3 - B\,.\,v^3$$

bringen, weil die Zahl der zu bestimmenden Grössen $\alpha, \beta, \alpha', \beta', A$ und B die Zahl der Bedingungsgleichungen um zwei Einheiten übersteigt; woraus zugleich folgt, dass man zweien von den zu bestimmenden Grössen *beliebige* Werthe geben kann, während die übrigen durch sie *bestimmte* Werthe erhalten.

Wenn man den Ausdruck $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$, gleich wie in der Abhandlung „Ueber die Elimination der Variabeln u. s. w.“ in diesem Journal Bd. 28 S. 68 [1]), mit dem Namen „*Determinante* der gegebenen

1) [Diese Ausgabe, No. 8, Seite 89.]

Function f in Rücksicht auf die Variabeln x, y" bezeichnet, so kann man, weil f sich auch als eine Function der Variabeln u, v betrachten lässt, ebenso die *Determinante* der gegebenen Function in Rücksicht auf die Variabeln u und v bilden. Die erstere werde mit φ, die andere mit φ' bezeichnet. Es ist alsdann

$$4. \qquad \varphi = \frac{1}{r^2}\varphi';$$

wo r die Determinante bedeutet, welche aus den Coefficienten von u und v der Substitutionen (2) gebildet ist. Den Beweis dieser Gleichung findet man in der oben citirten Abhandlung (S. 89)[1]).

Setzt man in die letzte Gleichung die Werthe φ und φ' und dividirt durch die Zahl 36, so erhält man

$$5. \qquad \frac{\varphi}{36} = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2 = -\frac{1}{r^2}ABuv.$$

Aus den Substitutionen (2) ist aber ersichtlich, dass für $u = 1$, $v = 0$, x und y die Werthe α und α', und für $u = 0$, $v = -1$, x und y die Werthe β und β' annehmen. Setzt man also den Theil rechts der letzten Gleichung $= 0$, so erhält man die Gleichung

$$6. \qquad \frac{\varphi}{36} = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2 = 0,$$

welcher genug gethan wird, wenn man α und α' oder β und β' statt x und y setzt. Die Verhältnisse $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\beta}{\beta'}$ sind demnach als die Wurzeln der quadratischen Gleichung (6) bestimmt, in welcher $y = 1$ ist, und es können, wie schon oben bemerkt, den Grössen α' und β' beliebige Werthe gegeben; z. B. es kann $\alpha' = \beta' = 1$ gesetzt werden, wodurch α und β geradezu die Wurzeln der genannten quadratischen Gleichung werden.

Um die Werthe von A und B zu bestimmen, bemerke ich, dass die Function f in A oder in B übergeht, wenn man α und α' oder β und β' statt x und y setzt. Diese Ausdrücke kann man jedoch mit Hülfe der Gleichung (6) in einfachere verwandeln. Setzt man nämlich der Kürze wegen für die Coëfficienten in der Gleichung (6):

$$ac - b^2 = m, \qquad ad - bc = n, \qquad bd - c^2 = p,$$

so ergeben sich folgende identische Gleichungen:

---

1) [Diese Ausgabe, Seite 114.]

$$7.\quad \begin{cases} f - \dfrac{[amx + (3bm - an)y]}{m^2} \cdot \dfrac{\varphi}{36} = y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{n^2 - 4mp}{6m^2}, \\ f - \dfrac{[dpy + (3cp - dn)x]}{p^2} \cdot \dfrac{\varphi}{36} = x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \dfrac{n^2 - 4mp}{6p^2}, \\ f - \left\{\dfrac{a}{m}x + \dfrac{d}{p}y\right\} \cdot \dfrac{\varphi}{36} = -xy \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \dfrac{n^2 - 4mp}{6mp}, \end{cases}$$

deren Theile links sämmtlich in A oder in B übergehen, wenn man α und α' oder β und β' statt x und y setzt, weil φ für diese Werthe der Variabeln verschwindet. Macht man von der ersten Gleichung Gebrauch, indem man die sich aus ihr ergebenden Werthe von A und B in (3) substituirt, so erhält man die gesuchte transformirte Function:

$$8.\quad f = \frac{n^2 - 4mp}{6m^2} \cdot \left\{\alpha'^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha u^3 - \beta'^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta v^3\right\},$$

wo $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta$ die Ausdrücke bedeuten, in welche der zweite Differentialquotient $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ übergeht, wenn man α und α' oder β und β' statt x und y setzt.

Mit dieser Transformation steht die allgemeine Auflösung der cubischen Gleichungen in der engsten Verbindung. Dann setzt man $\frac{x}{y} = X$, so wird $f = 0$ eine cubische Gleichung in X, von der allgemeinsten Form. Diese Gleichung geht aber, wenn man $\frac{u}{v} = \omega$ und $\alpha' = \beta' = 1$ setzt, durch die Substitution

$$9.\quad X = \frac{\alpha\omega - \beta}{\omega - 1}$$

in

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha \cdot \omega^3 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta = 0$$

über; woraus sich, wenn man mit k irgend eine dritte Wurzel der Einheit bezeichnet, der Werth

$$10.\quad \omega = \frac{1}{k} \sqrt[3]{\left(\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha}\right)}$$

von ω ergiebt. Bezeichnet man nun durch X_1, X_2, X_3 die drei Wurzeln der Gleichung $f=0$, durch k eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit, und substituirt den eben gefundenen Werth von ω in (9), so erhält man

$$11. \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\alpha \sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta} - \beta \sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha}}{\sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta} - \sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha}}, \\[2ex] X_2 = \dfrac{\alpha \sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta} - k\beta \sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha}}{\sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta} - k\sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha}}, \\[2ex] X_3 = \dfrac{\alpha \sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta} - k^2\beta \sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha}}{\sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta} - k^2\sqrt[3]{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha}}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke der Wurzeln der cubischen Gleichung haben eine Form, in welcher alle algebraischen Functionen, aus welchen sie zusammengesetzt sind, durch rationale Functionen der Wurzeln ausgedrückt werden können. Denn betrachtet man in den Gleichungen (11)

$$\alpha,\ \beta \text{ und } \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta}}$$

als die Unbekannten, so erhält man durch die Auflösung nach den Unbekannten:

$$12. \quad \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\alpha}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\beta}} = \dfrac{X_1 + kX_2 + k^2X_3}{X_1 + k^2X_2 + kX_3}, \\[2ex] \alpha = -\dfrac{X_2X_3 + k^2X_3X_1 + kX_1X_2}{X_1 + k^2X_2 + kX_3}, \\[2ex] \beta = -\dfrac{X_2X_3 + kX_3X_1 + k^2X_1X_2}{X_1 + kX_2 + k^2X_3}. \end{cases}$$

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich folgende Regel für die Bildung der Wurzeln einer gegebenen cubischen Gleichung:

Es sei $f(x) = 0$ eine gegebene cubische Gleichung: so stelle man die Determinante der homogenen Function $y^3 f\left(\frac{x}{y}\right)$ dritten Grades auf. Setzt man diese Determinante gleich Null und zugleich $y = 1$, so erhält man eine quadratische Gleichung in x, aus deren Wurzeln α, β die Wurzeln X_1, X_2, X_3 der gegebenen cubischen Gleichung $f(x) = 0$ nach Vorschrift der Formeln (11) zusammengesetzt sind.

Ich will noch bemerken, dass der Ausdruck von X_2, wenn in der gegebenen Gleichung das Glied, welches x^2 enthält, fehlt, in

$$X_2 = \frac{\alpha\sqrt[3]{\beta} - k\beta\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta} - k\sqrt[3]{\alpha}} = -k\sqrt[3]{(\beta\,.\,\alpha\beta)} - k^2\sqrt[3]{(\alpha\,.\,\alpha\beta)}$$

übergeht. Dieses ist, wenn man für das Product $\alpha\beta$ seinen Werth setzt, die bekannte Cardani'sche Formel.

Königsberg, den 18. December 1847.

15.

Transformation einer beliebigen gegebenen homogenen Function vierten Grades von zwei Variabeln durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln in die Form, welche nur die geraden Potenzen der neuen Variabeln enthält.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 41, Seite 243—263.]

Es giebt nur zwei homogene ganze Functionen, deren Determinanten respective von demselben Grade sind, wie die Functionen selbst. Ich verstehe unter *Determinante* einer Function die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten zusammengesetzte Determinante. Die Transformation der einen, nämlich der homogenen ganzen Function dritten Grades von drei Variabeln, durch lineäre Substitutionen, habe ich in Crelle's Journal Band 28 Seite 68 [1]) auseinandergesetzt. Die Transformation der andern, der homogenen ganzen Function vierten Grades von zwei Variabeln, welche eine in die Augen fallende Analogie mit der ersteren darbietet und gleich wie jene eine einfache geometrische Interpretation gestattet, werde ich im Folgenden behandeln. An diese Aufgabe wird sich die Auflösung der allgemeinen biquadratischen Gleichungen anschliessen; nebst der Untersuchung einer irreductibeln Gleichung vom sechsten Grade, welche vermöge gewisser Eigenschaften der Wurzeln sich algebraisch auflösen lässt.

---

1) [Diese Ausgabe, No. 8, Seite 89.]

1.

Wenn man durch u eine beliebige gegebene homogene Function vierten Grades der beiden Variabeln x_1, x_2, durch u_1, u_2 die ersten und durch u_{11}, $u_{12} = u_{21}$, u_{22} die zweiten partiellen Differentialquotienten, nach den Variabeln genommen, bezeichnet, so hat man:

$$1. \quad \begin{cases} x_1 u_{11} + x_2 u_{12} = 3\, u_1, \\ x_1 u_{21} + x_2 u_{22} = 3\, u_2. \end{cases}$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen diejenigen Grössen x_1, x_2, welche in den Theilen derselben links explicite vorkommen, als die Unbekannten und löst die in Rücksicht auf diese Unbekannten lineären Gleichungen auf, so erhält man, wenn man für den Ausdruck $u_{11} u_{22} - u_{12}^2$ (der in dem Folgenden den Namen der *Determinante* der Function u führen soll) der Kürze wegen v setzt:

$$2. \quad \begin{cases} x_1 v = +\, 3\, u_1 u_{22} - 3\, u_2 u_{12}, \\ x_2 v = -\, 3\, u_1 u_{12} + 3\, u_2 u_{11}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen gehen nun durch Differentiation nach den Variabeln folgende Gleichungen hervor:

$$3. \quad \begin{cases} x_1 v_1 - 2\, v = \, 3\, u_1 u_{221} - 3\, u_2 u_{112}, \\ x_1 v_2 = \, 3\, u_1 u_{222} - 3\, u_2 u_{122}, \\ x_2 v_1 = -\, 3\, u_1 u_{112} + 3\, u_2 u_{111}, \\ x_2 v_2 - 2\, v = -\, 3\, u_1 u_{122} + 3\, u_2 u_{112}, \end{cases}$$

in welchen der Kürze wegen v_1, v_2 für die ersten partiellen Differentialquotienten der Function v und u_{111}, u_{112}, u_{122}, u_{222} für die dritten Differentialquotienten der Function u gesetzt ist.

Es sei ferner die gegebene Function:

$$4. \quad u = a_{40} x_1^4 + 4\, a_{31} x_1^3 x_2 + 6\, a_{22} x_1^2 x_2^2 + 4\, a_{13} x_1 x_2^3 + a_{04} x_2^4,$$

und die aus den zweiten Differentialquotienten gebildete Determinante dieser Function:

$$5. \quad v = b_{40} x_1^4 + 4\, b_{31} x_1^3 x_2 + 6\, b_{22} x_1^2 x_2^2 + 4\, b_{13} x_1 x_2^3 + b_{04} x_2^4.$$

Alsdann hat man:

$$6.\quad \begin{cases} \frac{1}{4}u_1 = a_{40}x_1^3 + 3\,a_{31}x_1^2x_2 + 3\,a_{22}x_1x_2^2 + a_{13}x_2^3, \\ \frac{1}{4}u_2 = a_{31}x_1^3 + 3\,a_{22}x_1^2x_2 + 3\,a_{13}x_1x_2^2 + a_{04}x_2^3, \\ \frac{1}{4}v_1 = b_{40}x_1^3 + 3\,b_{31}x_1^2x_2 + 3\,b_{22}x_1x_2^2 + b_{13}x_2^3, \\ \frac{1}{4}v_2 = b_{31}x_1^3 + 3\,b_{22}x_1^2x_2 + 3\,b_{13}x_1x_2^2 + b_{04}x_2^3. \end{cases}$$

Betrachtet man in diesen vier Gleichungen die vier Grössen x_1^3, $x_1^2\,x_2$, $x_1x_2^2$, x_2^3 rechts als die Unbekannten und löst die in Rücksicht auf diese Unbekannten lineären Gleichungen auf, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$7.\quad \begin{cases} 4\,Rx_1^3 = \pi_{40}u_1 + \pi_{31}u_2 + p_{40}v_1 + p_{31}v_2, \\ 4\,Rx_1^2x_2 = \pi_{31}u_1 + \pi_{22}u_2 + p_{31}v_1 + p_{22}v_2, \\ 4\,Rx_1x_2^2 = \pi_{22}u_1 + \pi_{13}u_2 + p_{22}v_1 + p_{13}v_2, \\ 4\,Rx_2^3 = \pi_{13}u_1 + \pi_{04}u_2 + p_{13}v_1 + p_{04}v_2; \end{cases}$$

welche Gleichungen aus eben so vielen verschiedenen Grössen p und π zusammengesetzt sind, als die aufzulösenden Gleichungen verschiedene Coëfficienten a und b enthalten. Der gemeinsame Nenner R der Unbekannten ist, da die Grössen b vom zweiten Grade sind, vom sechsten Grade und homogen in Rücksicht auf die Grössen a. Die Grössen π und p sind ebenfalls homogen und von den Graden 5 und 4.

Zum Beweise jener Behauptung dienen die Gleichungen (3), welche ich vorausgeschickt habe. Denn multiplicirt man die erste Gleichung (7) mit x_2, die zweite mit x_1 und setzt die Werthe von x_1v_1, x_1v_2, x_2v_1, x_2v_2 aus (3), so erhält man

$$\begin{aligned} 4\,Rx_1^3x_2 &= u_1\{\pi_{40}x_2 - p_{40}\,3\,u_{112} - p_{31}\,3\,u_{122}\} \\ &\quad + u_2\{\pi_{31}x_2 + p_{40}\,3\,u_{111} + p_{31}\,3\,u_{112}\} + p_{31}\,2\,v, \\ 4\,Rx_1^3x_2 &= u_1\{\pi_{31}x_1 + p_{31}\,3\,u_{221} + p_{22}\,3\,u_{222}\} \\ &\quad + u_2\{\pi_{22}x_1 - p_{31}\,3\,u_{112} - p_{22}\,3\,u_{122}\} + p_{31}\,2\,v; \end{aligned}$$

welche beide Gleichungen die Form

$$4\,Rx_1^3x_2 = u_1A_1 + u_2A_2 + A\,.\,2\,v$$

haben, wo A_1 und A_2 homogene Functionen von x_1 und x_2 ersten Grades sind, und A eine Constante ist. Betrachtet man aber in dieser identischen Gleichung die vier Coëfficienten der Variabeln in A_1 und A_2 und die

Constante A als fünf Unbekannte, so erhält man, durch Gleichsetzung der Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung, fünf in Beziehung auf die Unbekannten lineäre Gleichungen, aus welchen sich für die Unbekannte A nur ein einziger Werth ergiebt. Dieser Coëfficient A von $2v$ ist also in den beiden vorhergehenden Gleichungen einer und derselbe; also ist auch die Grösse p_{31} in den beiden ersten Gleichungen (7) eine und dieselbe. Auf eben die Art lässt sich beweisen, dass auch die Grössen p_{22} in der zweiten und dritten Gleichung denselben Werth haben, etc.

Um zu beweisen, dass auch π_{31} in den beiden ersten Gleichungen (7) eine und dieselbe Grösse ist, setze ich in den Gleichungen (3) statt $2v$ seinen Werth $= \frac{1}{2}(x_1 v_1 + x_2 v_2)$ und statt u_{111}, u_{112}, u_{122}, u_{222} ihre Werthe als lineäre Functionen von x_1, x_2. Wenn man zu diesen Gleichungen, welche, da die erste und letzte Gleichung nicht verschieden sind, nur die Stelle von drei Gleichungen vertreten, noch die Gleichung $4u = x_1 u_1 + x_2 u_2$ hinzufügt, so hat man vier Gleichungen, deren Theile rechts die vier Grössen $x_1 u_1$, $x_1 u_2$, $x_2 u_1$, $x_2 u_2$, und deren Theile links die fünf Grössen $x_1 v_1$, $x_1 v_2$, $x_2 v_1$, $x_2 v_2$ und u auf lineäre Weise enthalten. Es lassen sich also die vier ersten Grössen lineär durch die fünf letzten Grössen ausdrücken. Setzt man nun diese Ausdrücke für $x_1 u_1$, $x_1 u_2$, $x_2 u_1$, $x_2 u_2$ in die erste mit x_2 multiplicirte Gleichung (7) und gleichzeitig in die zweite mit x_1 multiplicirte Gleichung (7), so nehmen beide Gleichungen die Form

$$4 R x_1^3 x_2 = v_1 B_1 + v_2 B_2 + B . 4u$$

an; wo B_1 und B_2 lineäre homogene Functionen von x_1 und x_2, und B eine Constante bedeuten. Bestimmt man die vier Constanten in B_1 und B_2 und die Constante B, indem man die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der letzten identischen Gleichung einander gleich setzt, so wird sich, weil die aufzulösenden Gleichungen lineär sind, nur ein einziger Werth von B ergeben. Da aber eben sowohl in der ersten, als in der zweiten behandelten Gleichung (7), um sie auf die genannte gemeinschaftliche Form zurückzuführen, B für π_{31} zu setzen war, so wird auch diese Grösse π_{31} in den beiden ersten Gleichungen (7) denselben Werth haben. Ebenso lässt sich beweisen, dass π_{22} in der zweiten und dritten Gleichung denselben Werth hat etc.

Wenn man die Werthe von x_1^3, $x_1^2 x_2$, $x_1 x_2^2$, x_2^3 aus den Gleichungen (7) in die Theile rechts der Gleichungen (6) setzt, so erhält man durch Gleichstellung der Coëfficienten der Grössen u_1, u_2, v_1 und v_2 auf beiden Seiten der Gleichungen (6) folgende Systeme von Gleichungen:

$$8. \quad \begin{cases} R = a_{40}\pi_{40} + 3\,a_{31}\pi_{31} + 3\,a_{22}\pi_{22} + a_{13}\pi_{13}, \\ 0 = a_{40}\pi_{31} + 3\,a_{31}\pi_{22} + 3\,a_{22}\pi_{13} + a_{13}\pi_{04}, \\ 0 = a_{31}\pi_{40} + 3\,a_{22}\pi_{31} + 3\,a_{13}\pi_{22} + a_{04}\pi_{13}, \\ R = a_{31}\pi_{31} + 3\,a_{22}\pi_{22} + 3\,a_{13}\pi_{13} + a_{04}\pi_{04}, \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} 0 = b_{40}\pi_{40} + 3\,b_{31}\pi_{31} + 3\,b_{22}\pi_{22} + b_{13}\pi_{13}, \\ 0 = b_{40}\pi_{31} + 3\,b_{31}\pi_{22} + 3\,b_{22}\pi_{13} + b_{13}\pi_{04}, \\ 0 = b_{31}\pi_{40} + 3\,b_{22}\pi_{31} + 3\,b_{13}\pi_{22} + b_{04}\pi_{13}, \\ 0 = b_{31}\pi_{31} + 3\,b_{22}\pi_{22} + 3\,b_{13}\pi_{13} + b_{04}\pi_{04}, \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} 0 = a_{40}p_{40} + 3\,a_{31}p_{31} + 3\,a_{22}p_{22} + a_{13}p_{13}, \\ 0 = a_{40}p_{31} + 3\,a_{31}p_{22} + 3\,a_{22}p_{13} + a_{13}p_{04}, \\ 0 = a_{31}p_{40} + 3\,a_{22}p_{31} + 3\,a_{13}p_{22} + a_{04}p_{13}, \\ 0 = a_{31}p_{31} + 3\,a_{22}p_{22} + 3\,a_{13}p_{13} + a_{04}p_{04}, \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} R = b_{40}p_{40} + 3\,b_{31}p_{31} + 3\,b_{22}p_{22} + b_{13}p_{13}, \\ 0 = b_{40}p_{31} + 3\,b_{31}p_{22} + 3\,b_{22}p_{13} + b_{13}p_{04}, \\ 0 = b_{31}p_{40} + 3\,b_{22}p_{31} + 3\,b_{13}p_{22} + b_{04}p_{13}, \\ R = b_{31}p_{31} + 3\,b_{22}p_{22} + 3\,b_{13}p_{13} + b_{04}p_{04}. \end{cases}$$

Diese vier Systeme von Gleichungen lassen sich, als Sätze, wie folgt aussprechen:

8. *Die Ausdrücke $x_2 u_1$ und $x_1 u_2$ verschwinden, wenn man in ihnen $\pi_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke $x_1 u_1$ und $x_2 u_2$ den Werth $4\,R$ annehmen.*

9. *Die Ausdrücke $x_1 v_1$, $x_1 v_2$, $x_2 v_1$, $x_2 v_2$ verschwinden sämmtlich, wenn man $\pi_{\varkappa\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt.*

10. *Die Ausdrücke $x_1 u_1$, $x_1 u_2$, $x_2 u_1$, $x_2 u_2$ verschwinden sämmtlich, wenn man $p_{\varkappa\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt.*

11. *Die Ausdrücke $x_2 v_1$ und $x_1 v_2$ verschwinden, wenn man in ihnen $p_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke $x_1 v_1$ und $x_2 v_2$ den Werth $4\,R$ annehmen.*

Man setze nun statt der Grössen a die entsprechenden Grössen b. Durch diese Aenderung mögen die Grössen p, welche allein von den Grössen a abhangen, in die entsprechenden Grössen q übergehen, so dass die Gleichungen (10) in

$$12.\quad \begin{cases} 0 = b_{40}q_{40} + 3\,b_{31}q_{31} + 3\,b_{22}q_{22} + b_{13}q_{13}, \\ 0 = b_{40}q_{31} + 3\,b_{31}q_{22} + 3\,b_{22}q_{13} + b_{13}q_{04}, \\ 0 = b_{31}q_{40} + 3\,b_{22}q_{31} + 3\,b_{13}q_{22} + b_{04}q_{13}, \\ 0 = b_{31}q_{31} + 3\,b_{22}q_{22} + 3\,b_{13}q_{13} + b_{04}q_{04} \end{cases}$$

sich verwandeln. Aus der Vergleichung dieses Systemes von Gleichungen mit dem Systeme (9) ergiebt sich, dass die Grössen q den entsprechenden Grössen π proportional sind. Es folgt daher:

$$q_{\varkappa,4-\varkappa} = \mu\pi_{\varkappa,4-\varkappa}.$$

Und wenn man diese Werthe der Grössen π in die Gleichungen (8) setzt, so gehen dieselben in

$$13.\quad \begin{cases} \mu R = a_{40}q_{40} + 3\,a_{31}q_{31} + 3\,a_{22}q_{22} + a_{13}q_{13}, \\ \quad 0 = a_{40}q_{31} + 3\,a_{31}q_{22} + 3\,a_{22}q_{13} + a_{13}q_{04}, \\ \quad 0 = a_{31}q_{40} + 3\,a_{22}q_{31} + 3\,a_{13}q_{22} + a_{04}q_{13}, \\ \mu R = a_{31}q_{31} + 3\,a_{22}q_{22} + 3\,a_{13}q_{13} + a_{04}q_{04} \end{cases}$$

über. Diese beiden Systeme enthalten folgende Sätze:

12. *Die Ausdrücke* x_1v_1, x_1v_2, x_2v_1, x_2v_2 *verschwinden sämmtlich, wenn man* $q_{\varkappa\lambda}$ *für die Producte* $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ *setzt.*

13. *Die Ausdrücke* x_2u_1, x_1u_2 *verschwinden, wenn man in ihnen* $q_{\varkappa\lambda}$ *für die Producte* $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ *setzt, während die Ausdrücke* x_1u_1, x_2u_2 *den Werth* $4\mu R$ *annehmen.*

Da die Grössen p in Rücksicht auf die Grössen a vom vierten Grade sind, so werden die Grössen q vom achten, und die Grösse μ wird vom dritten Grade sein.

Man kann die Grössen p, π, R, so wie die Grössen q und μ, dem Vorhergehenden zu Folge, als Functionen von a bestimmt betrachten. Die ersteren stellen sich nämlich, wenn man die gegebenen Gleichungen (6) auflöst, als die Coëfficienten in den aufgelösten Gleichungen (7) dar; die Grössen q entstehen aus den entsprechenden Grössen p, wenn man in

den letzteren die Grössen a in die entsprechenden Grössen b verändert, und die Grösse μ stellt sich als der gemeinsame Quotient bei der Division der Grössen q durch die entsprechenden Grössen π dar. Wenn nun diese Grössen auf die angegebene Art als bestimmt betrachtet werden, so kann man umgekehrt die Aufgabe stellen: Die Form der Grössen a zu bestimmen, welche allein den Gleichungen (13) genügen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (12) wird man finden, dass dieselben von der Form

$$a_{\varkappa,4-\varkappa} + N b_{\varkappa,4-\varkappa}$$

sind, oder, wenn in den Gleichungen (13) μR eine beliebige Grösse bedeutet, so werden die Werthe der Grössen a von der Form

$$M a_{\varkappa,4-\varkappa} + N b_{\varkappa,4-\varkappa}$$

sein. Hierauf beruht folgender Satz:

14. *Jede homogene Function u vom vierten Grade, deren Coëfficienten a den Gleichungen* (13) *genügen, in welchen μR einen beliebigen Werth hat, die Grössen q aber die im Vorhergehenden bestimmten Werthe haben, ist von der Form:*

$$Mu + Nv.$$

Woraus wiederum folgt:

15. *Die Determinante w der Function v, das heisst die Determinante der Determinante der Function u ist von der Form:*

$$w = mu + nv.$$

Denn setzt man in den Gleichungen (3) für die Grössen a die entsprechenden Grössen b, wodurch die Grössen b in die Grössen c übergehen mögen und die Functionen u in v und v in w sich verändern, so verschwinden die Theile rechts der auf diese Weise veränderten Gleichungen, wenn man $q_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, nach (12), und die Gleichungen selbst nehmen die Gestalt der Gleichungen (13) an; mit dem Unterschiede, dass die Grössen c die Stelle der Grössen a vertreten. Es verschwinden also die Ausdrücke $x_2 w_1$ und $x_1 w_2$, wenn man $q_{\varkappa,\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke $x_1 w_1$, $x_2 w_2$ einen und denselben Werth annehmen.

Die Grösse R war im Vorhergehenden als die Determinante folgender Componenten bestimmt:

$$\begin{array}{llll} a_{40} & 3\,a_{31} & 3\,a_{22} & a_{13}, \\ a_{31} & 3\,a_{22} & 3\,a_{13} & a_{04}, \\ b_{40} & 3\,b_{31} & 3\,b_{22} & b_{13}, \\ b_{31} & 3\,b_{22} & 3\,b_{13} & b_{04}. \end{array}$$

Durch die Aenderung der Grössen a in die entsprechenden Grössen b, wodurch die Grössen $b_{\varkappa\lambda}$ nach (15) in die entsprechenden Grössen $m\,a_{\varkappa\lambda} + n\,b_{\varkappa\lambda}$ übergehen, möge R in S übergehen. Macht man aber die erwähnte Aenderung der Componenten der Determinante R und bildet hierauf die Determinante, so zeigt sich leicht, dass

16. $$S = m^2 R$$

ist. Aendert man auch die erste Gleichung (11) auf die genannte Weise, so geht dieselbe in

$$S = m\,(a_{40}\,q_{40} + 3\,a_{31}\,q_{31} + 3\,a_{22}\,q_{22} + a_{13}\,q_{13})$$

über. Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten des Systems (13), so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (16):

17. $$\mu = m.$$

Wenn man in den Gleichungen (8 und 9), durch welche die Grössen π bestimmt sind, die Grössen a in die entsprechenden Grössen b übergehen lässt, wodurch die Grössen b in die Grössen $m\,a + n\,b$ und R in $m^2 R$ übergehen, so werden die Gleichungen erfüllt, wenn man für die Grössen π die entsprechenden Grössen $m^2 p - n\,q$ setzt. Daraus folgt:

18. *Dass durch die Aenderung der Grössen a in die entsprechenden Grössen b, die Grössen b in die entsprechenden Grössen $m\,a + n\,b$, die Grössen π in die entsprechenden Grössen $m^2 p - n\,q$, die Grössen p in die entsprechenden Grössen $m\,\pi$, ferner R in $m^2 R$, u in v und v in $w = m\,u + n\,v$ übergehen.*

Wenn man eine Function U aus der beliebig gegebenen Function u vierten Grades und ihrer Determinante v in der Art zusammensetzt, dass

19. $$U = d\,.\,u + \delta\,.\,v$$

ist, wo d und δ beliebige Constanten bedeuten, so hat die Determinante V dieser Function die merkwürdige Eigenschaft, dass sie von *derselben* Form wie U ist.

Denn erwägt man, dass die Ausdrücke $x_2 U_1$ und $x_1 U_2$ verschwinden und die Ausdrücke $x_1 U_1$ und $x_2 U_2$ den Werth $4mRd$ annehmen, wenn man $q_{\varkappa,\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, und verändert man in den Gleichungen (3) die Buchstaben u in U und v in V: so ist aus diesen geänderten Gleichungen zu ersehen, dass auch die Ausdrücke $x_2 V_1$ und $x_1 V_2$ verschwinden, während die Ausdrücke $x_1 V_1$ und $x_2 V_2$ gleiche Werthe annehmen, wenn man $q_{\varkappa,\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt; woraus sich mit Rücksicht auf (14) Folgendes ergiebt:

20. *Die Determinante V der Function $d.u + \delta.v$ ist von der Form*

$$V = D.u + \varDelta.v.$$

Um D und $\varDelta$ zu bestimmen, bemerke ich, dass u den Werth $2R$ annimmt, und v verschwindet, wenn man $\pi_{\varkappa,\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, und dass v den Werth $2R$ annimmt und u verschwindet, wenn man $p_{\varkappa,\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt. Bezeichnet man nun durch V_π und V_p die Ausdrücke, in welche V übergeht, wenn man $\pi_{\varkappa,\lambda}$ oder $p_{\varkappa,\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, so erhält man aus (20):

$$21. \qquad V_\pi = 2RD; \qquad V_p = 2R\varDelta.$$

Durch diese Gleichungen werden zwar die Grössen D und $\varDelta$ als homogene Functionen zweiten Grades in Rücksicht auf d und δ bestimmt, allein die folgende directe Bestimmung dieser Functionen gewährt noch einfachere Resultate. Ich bemerke noch, dass die Coëfficienten von δ^2 in den Functionen D und $\varDelta$ respective m und n sind, weil für $d = 0$ und $\delta = 1$, $V = mu + nv$ wird, und dass die Coëfficienten von d^2 in den Functionen D und $\varDelta$ respective 0 und 1 sind, weil für $\delta = 0$, $V = v$ wird.

Wenn man die Determinante v der in (4) gegebenen Function u bildet, so wird man für die Coëfficienten b der Determinante v folgende Werthe erhalten:

$$22. \qquad \begin{cases} b_{40} = 12^2(a_{40}a_{22} - a_{31}^2), \\ 2.b_{31} = 12^2(a_{40}a_{13} - a_{31}a_{22}), \\ 6.b_{22} = 12^2(a_{40}a_{04} + 2a_{31}a_{13} - 3a_{22}^2), \\ 2.b_{13} = 12^2(a_{04}a_{31} - a_{13}a_{22}), \\ b_{04} = 12^2(a_{04}a_{22} - a_{13}^2). \end{cases}$$

Bildet man hierauf die Determinante V und setzt die Coëfficienten von x_1^4 und x_2^4 auf beiden Seiten der Gleichung (20) einander gleich, so erhält man die beiden Gleichungen

$$12^2\{(d\,a_{40}+\delta\,b_{40})(d\,a_{22}+\delta\,b_{22})-(d\,a_{31}+\delta\,b_{31})^2\}=D\,a_{40}+\varDelta\,b_{40},$$
$$12^2\{(d\,a_{04}+\delta\,b_{04})(d\,a_{22}+\delta\,b_{22})-(d\,a_{13}+\delta\,b_{13})^2\}=D\,a_{04}+\varDelta\,b_{04},$$

aus welchen sich folgende Werthe von D und $\varDelta$ und m und n, welches die Coëfficienten von δ^2 in D und $\varDelta$ sind, ergeben:

$$23.\quad\left\{\begin{aligned} D &= -2\,n\,d\,\delta+m\,\delta^2,\\ \varDelta &= +d^2+n\,\delta^2,\\ m &= 3\,.\,12^5\{a_{22}\,a_{04}\,a_{40}+2\,a_{13}\,a_{31}\,a_{22}-a_{22}^3-a_{04}\,a_{31}^2-a_{40}\,a_{13}^2\},\\ n &= +12^3\{4\,a_{13}\,a_{31}-3\,a_{22}^2-a_{04}\,a_{40}\}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$24.\qquad \nabla=d\varDelta-\delta D=d^3+3\,n\,d\,\delta^2-m\,\delta^3,$$

so lassen sich die Grössen D und $\varDelta$ durch die partiellen Differentialquotienten von ∇ wie folgt ausdrücken:

$$D=-\tfrac{1}{3}\frac{\partial\nabla}{\partial\delta},\qquad \varDelta=+\tfrac{1}{3}\frac{\partial\nabla}{\partial d}.$$

Die Determinante von $w=mu+nv$ wird nach dem Vorhergehenden gleich $-n^2m\,.\,u+(m^2+n^3)v$. Dieselbe wird aber auch aus $w=mu+nv$ gefunden, wenn man die Grössen a in die entsprechenden Grössen b verändert; wodurch u in v und v in $mu+nv$ übergeht. Wenn nun durch diese Aenderung m in m' und n in n' übergeht, so geht u in $mn'u+(m'+nn')v$ über. Es ist daher

$$-n^2m=mn'\qquad\text{und}\qquad m^2+n^3=m'+nn',$$

woraus

$$m'=m^2+2\,n^3;\qquad n'=-n^2\ \text{folgt.}$$

25. *Wenn also die Grössen a in die entsprechenden Grössen b übergehen, so geht m in $m^2+2\,n^3$ und $(-n)$ in $(-n)^2$ über.*

2.

Die Transformation der gegebenen Function

4. $$u = a_{40}x_1^4 + 4a_{31}x_1^3x_2 + + 6a_{22}x_1^2x_2^2 + 4a_{13}x_1x_2^3 + a_{04}x_2^4$$

durch Substitutionen von der Form

26. $$\begin{cases} x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \\ x_2 = \alpha' y_1 + \beta' y_2 \end{cases}$$

in die Form

27. $$u = Ay_1^4 + 6Cy_1^2y_2^2 + By_2^4$$

erfordert die Bestimmung von sieben unbekannten Grössen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, A, B, C. Substituirt man die Werthe von x_1 und x_2 aus (26) in die gegebene Function u, welche den Theil links der Gleichung (27) bildet, und setzt auf beiden Seiten dieser Gleichung die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln einander gleich, so erhält man nur fünf Gleichungen; welches beweist, dass man zweien von den zu bestimmenden Unbekannten beliebige Werthe geben, z. B. $\alpha' = \beta' = 1$ setzen kann. Von diesen fünf Gleichungen führe ich nur die drei an, welche die Werthe von A, B, C bestimmen, nämlich:

28. $$\begin{cases} A = (u)_\alpha, \qquad B = (u)_\beta, \\ 12C = \alpha\alpha(u_{11})_\beta + 2\alpha\alpha'(u_{12})_\beta + \alpha'\alpha'(u_{22})_\beta \\ \quad = \beta\beta(u_{11})_\alpha + 2\beta\beta'(u_{12})_\alpha + \beta'\beta'(u_{22})_\alpha; \end{cases}$$

wo $(u)_\alpha, (u_{11})_\alpha, \ldots, (u)_\beta, (u_{11})_\beta, \ldots$ die Ausdrücke bedeuten, in welche $u, u_{11}, \ldots$ übergehen, wenn man in ihnen statt x_1, x_2 entweder α, α' oder β, β' setzt. Die beiden andern Gleichungen, welche die Verhältnisse $\alpha : \alpha'$ und $\beta : \beta'$ bestimmen, werde ich durch andere äquivalente Gleichungen ersetzen.

Betrachtet man u als eine Function der Variabeln y_1, y_2, bezeichnet die Determinante $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2$ derselben durch v' und setzt die Determinante $\alpha\beta' - \alpha'\beta = r$, so ist die Determinante:

29. $$v = \frac{1}{r^2}v'.$$

Diese Gleichung findet man in Crelle's Journal (Bd. 28 S. 89)[1]) hergeleitet. Die Determinante v' ist nun

1) [Seite 114 dieser Ausgabe.]

$$v' = 12^2 C\left(A y_1^4 + \frac{AB - 3C^2}{C} y_1^2 y_2^2 + B y_2^4\right).$$

Wenn man diesen Werth in (29) setzt, so wird

$$v = \frac{12^2 C}{r^2}\left(A y_1^4 + \frac{AB - 3C^2}{C} y_1^2 y_2^2 + B y_2^4\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\delta = \frac{r^2 \varrho}{12^2(AB - 9C^2)}$, die Gleichung (27) mit $d = -\frac{C\varrho}{(AB - 9C^2)}$ und addirt beide Gleichungen, so erhält man

$$30. \qquad d.u + \delta.v = \varrho y_1^2 y_2^2.$$

Diese Gleichung beweist, *dass sich jede gegebene homogene Function vierten Grades von zwei Variabeln und ihre Determinante mit solchen Constanten multipliciren lassen, dass die Summe ein vollständiges Quadrat wird.*

Um die Constanten d und δ, oder vielmehr ihr Verhältniss, worauf es hier ankommt, zu bestimmen, bemerke ich, dass, da $U = d.u + \delta.v$ ein vollständiges Quadrat ist, dieselben Werthe der Variabeln x_1, x_2, welche U verschwinden machen, auch die partiellen Differentialquotienten U_1, U_2 dieser Function werden verschwinden machen. Aus den Gleichungen (2) ist aber zu ersehen, dass für die Werthe der Variabeln x_1, x_2, für welche die partiellen Differentialquotienten u_1 und u_2 der Function u verschwinden, auch die Determinante verschwindet. Mithin verschwindet für die Werthe der Variabeln, für welche U verschwindet, auch die Determinante $V = Du + \Delta v$ dieser Function. Nun ist aber, wie aus (26) erhellt, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ für $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha'$, und $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ für $x_1 = \beta$, $x_2 = \beta'$. Es verschwindet also nach (30) $U = d.u + \delta.v$ für diese beiden Werthenpaare, und ebenso die Determinante $V = Du + \Delta v$ dieser Function. Diese Werthenpaare genügen also den beiden Gleichungen

$$31. \qquad d.u + \delta.v = 0 \quad \text{und} \quad Du + \Delta v = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen u und v und setzt der Kürze wegen, wie in dem vorigen Paragraphen, $\nabla = d.\Delta - \delta.D$, so erhält man, mit Rücksicht auf (24), zur Bestimmung des Verhältnisses $d:\delta$ die cubische Gleichung

$$32. \qquad \nabla = d^3 + 3nd\delta^2 - m\delta^3 = 0.$$

Diese Gleichung beweist, *dass sich jede beliebige Function vierten Grades von zwei Variabeln und ihre Determinante auf drei verschiedene Arten mit solchen Constanten multipliciren lassen, dass ihre Summe jedesmal ein vollständiges Quadrat wird.*

Wenn man nun ein Werthenpaar d und δ bestimmt hat, welches der cubischen Gleichung (32) genügt, und man setzt dieses für d und δ in eine der Gleichungen (31), z. B. in die erste, so werden die beiden Werthenpaare von x_1, x_2, welche dieser ersten Gleichung genügen, die gesuchten Werthe von α, α' und β, β' sein. Da aber in diese Gleichung nur das Verhältniss von x_1 zu x_2 eingeht, so wird man von diesen Variabeln die eine, z. B. x_2, und ebenso die Unbekannten α' und β', gleich 1 setzen können; worauf sich die beiden andern α und β als die ungleichen Wurzeln der nach x_1 biquadratischen Gleichung darstellen, welche zwei Paare gleicher Wurzeln enthält. Hat man aber durch Auflösung dieser Gleichung die Coëfficienten der Substitutionen (26) gefunden, so geben die Gleichungen (28) die Werthe der Coëfficienten A, B, C in der transformirten Function (27).

Die Verhältnisse $\alpha : \alpha'$ und $\beta : \beta'$ sind nach dem Vorhergehenden als die ungleichen Wurzeln einer der biquadratischen Gleichungen (31) bezeichnet. Es ist aber wichtig, statt dieser eine quadratische Gleichung zu bilden, deren Wurzeln die ungleichen Wurzeln der biquadratischen Gleichung (31) sind. Zu diesem Zwecke differentiire ich die durch die Substitutionen (26) identische Gleichung (30)

$$d . u + \delta . v = \varrho\, y_1^2 y_2^2$$

zweimal partiell nach x_1, was

$$d . u_{11} + \delta . v_{11} = 2\varrho \left\{ \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right)^2 y_2^2 + 4 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} y_1 y_2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right)^2 y_1^2 \right\}$$

giebt, oder, wenn man $\alpha\beta' - \alpha'\beta = r$ setzt:

$$d . u_{11} + \delta . v_{11} = \frac{2\varrho}{r^2} \{ \beta'^2 y_2^2 - 4\alpha'\beta' y_1 y_2 + \alpha'^2 y_1^2 \}.$$

Ich nehme nun an, es sei in dieser identischen Gleichung, sowohl rechts als links, α, α' oder β, β' statt x_1, x_2 gesetzt. Unter dieser Hypothese verschwindet das Product $y_1 y_2$ und bleibt die Gleichung richtig, wenn

man das Glied $-4\alpha'\beta' y_1 y_2$ in $+2\alpha'\beta' y_1 y_2$ verändert. Durch diese Aenderung geht aber die Gleichung in

$$d.u_{11} + \delta.v_{11} = \frac{2\varrho}{r^2}(\beta' y_2 + \alpha' y_1)^2$$

über, oder, wenn man für $\beta' y_2 + \alpha' y_1$ seinen Werth x_2 setzt, in:

$$d.u_{11} + \delta.v_{11} - \frac{2\varrho}{r^2} x_2^2 = 0.$$

Dieses ist die gesuchte quadratische Gleichung, deren Wurzeln die ungleichen Wurzeln der biquadratischen Gleichung (31) sind. Ich führe folgende drei Formen dieser quadratischen Gleichung an:

$$33.\quad \begin{cases} d.u_{11} + \delta.v_{11} - \frac{2\varrho}{r^2} x_2^2 = 0, \\ d.u_{12} + \delta.v_{12} + \frac{2\varrho}{r^2} x_1 x_2 = 0, \\ d.u_{22} + \delta.v_{22} - \frac{2\varrho}{r^2} x_1^2 = 0. \end{cases}$$

Die zweite und dritte Gleichung erhält man durch einen ähnlichen Calcul, wenn man, statt die identische Gleichung (30) zweimal nach x_1 zu differentiiren, sie nach x_1 und x_2, oder zweimal nach x_2 differentiirt. Die dritte Gleichung erhält man aber auch unmittelbar aus der ersten, wenn man x_1 mit x_2 vertauscht, und die zweite aus einer angemessenen Combination der ersten und dritten Gleichung mit der Gleichung (31).

Um diese drei Gleichungen in *eine* von der allgemeinsten Form zu vereinigen, bezeichne ich mit p_1 und p_2 zwei beliebige Grössen, multiplicire die drei Gleichungen der Reihe nach mit p_1^2, $2p_1p_2$, p_2^2 und addire die Producte. Dies giebt die Gleichung

$$34.\quad \begin{aligned} & d\{u_{11}p_1^2 + 2u_{12}p_1p_2 + u_{22}p_2^2\} \\ & + \delta(v_{11}p_1^2 + 2v_{12}p_1p_2 + v_{22}p_2^2) - \frac{2\varrho}{r^2}(x_1p_2 - x_2p_1)^2 = 0, \end{aligned}$$

welche sich auch, wenn man mit (u_{11}), (u_{12}), ... (u_{22}), (v_{11}), ... die Ausdrücke bezeichnet, in welche u_{11}, u_{12}, ... übergehen, wenn man darin statt x_1, x_2 die beliebigen Grössen p_1, p_2 setzt, so darstellen lässt:

$$35.\quad \begin{aligned} & d\{(u_{11})x_1^2 + 2(u_{12})x_1x_2 + (u_{22})x_2^2\} \\ & + \delta\{(v_{11})x_1^2 + 2(v_{12})x_1x_2 + (v_{22})x_2^2\} - \frac{2\varrho}{r^2}(x_1p_2 - x_2p_1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Es bleibt nun noch übrig, den Werth von $\frac{2\varrho}{r^2}$, welche Grösse in den vorhergehenden Gleichungen vorkommt, zu bestimmen. Zu diesem Zwecke erinnere man sich, dass die angegebenen quadratischen Gleichungen dieselben Wurzeln haben, welche die biquadratischen Gleichungen (31) doppelt enthalten. Aus diesem Umstande lässt sich schliessen, dass jede der quadratischen Gleichungen, z. B. die erste Gleichung (33), quadrirt, in die biquadratische Gleichung, abgesehen von einem constanten Factor σ, übergehen muss, oder, dass folgende identische Gleichung stattfindet:

$$\left\{d.u_{11}+\delta.v_{11}-\frac{2\varrho}{r^2}x_2^2\right\}^2=\sigma(d.u+\delta.v).$$

Setzt man die Coëfficienten von x_1^4 zu beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich, so erhält man

$$\sigma=12^2(d\,a_{40}+\delta\,b_{40}).$$

Durch Gleichsetzung der Coëfficienten von $x_1x_2^3$ zu beiden Seiten der Gleichung erhält man eine Gleichung, aus welcher sich, wenn man den gefundenen Werth von σ substituirt, folgender Werth von $-\frac{2\varrho}{r^2}$ ergiebt:

$$-\frac{2\varrho}{r^2}=\frac{\frac{12^2}{2}\{(d a_{40}+\delta b_{40})(d a_{13}+\delta b_{13})-(d a_{31}+\delta b_{31})(d a_{22}+\delta b_{22})\}}{6(d a_{31}+\delta b_{31})}.$$

Um den Zähler dieses Ausdrucks zu transformiren, nehme ich die zweite Gleichung (22), nämlich

$$b_{31}=\frac{12^2}{2}(a_{40}a_{13}-a_{31}a_{22})$$

zu Hülfe. Diese Geichung geht in

$$D a_{31}+\Delta b_{31}=\frac{12^2}{2}\{(d\,a_{40}+\delta\,b_{40})(d\,a_{13}+\delta\,b_{13})-(d\,a_{31}+\delta\,b_{31})(d\,a_{22}+\delta\,b_{22})\}$$

über, wenn man die Grössen a in die entsprechenden Grössen $d\,a+\delta\,b$ übergehen lässt; durch welche Aenderung u in $d.u+\delta.v$ und v in $Du+\Delta v$ übergeht. Es ist daher:

$$-\frac{2\varrho}{r^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{Da_{31}+\Delta b_{31}}{da_{31}+\delta b_{31}}.$$

Da aber nach (32) $\frac{D}{\varDelta} = \frac{d}{\delta}$ ist, so nimmt der gesuchte Werth von $-\frac{2\varrho}{r^2}$ die einfache Gestalt

36. $$-\frac{2\varrho}{r^2} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\varDelta}{\delta}$$

an.

Ich werde nun noch ein Paar Formeln ableiten, welche in der vorliegenden Untersuchung eine Anwendung finden.

In der identischen Geichung (30) hatten die Coëfficienten d und δ die Bedeutung:

$$d = -\frac{C\varrho}{AB - 9C^2}, \qquad \delta = \frac{r^2\varrho}{12^2(AB - 9C^2)}.$$

Wenn man die zweite Gleichung in die erste dividirt, so erhält man

$$\frac{d}{\delta} = -12^2\frac{C}{r^2},$$

und wenn man den Werth von $r = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ substituirt,

37. $$C = -\frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2}{12^2} \cdot \frac{d}{\delta}.$$

Dieser Werth von C hat eine einfachere Gestalt, als der in (28). Ferner erhält man aus der zweiten der eben angegebenen Gleichungen, wenn man den Werth von ϱ aus (36) substituirt:

38. $$AB - 9C^2 = -\frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^4}{12^3} \cdot \frac{\varDelta}{\delta^2}.$$

Diese Untersuchung beweist folgende Auflösungsmethode des behandelten Problems:

„Man bestimme durch Auflösung der cubischen Gleichung (32) „ein Werthenpaar d und δ, welches dieser Gleichung genügt, setze „dasselbe und den Werth von $-\frac{2\varrho}{r^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\varDelta}{\delta}$ aus (36) in eine „der quadratischen Gleichungen (33) und suche zwei Werthen-„paare α, α' und β, β' (den Wurzeln der quadratischen Gleichung „entsprechend), welche der Gleichung genügen. Diese sind dann

„die Coëfficienten der Substitutionen (26), durch welche die ge-
„gebene Function u in

39. $$u = (u)_\alpha y_1^4 - \frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2}{2.12} \cdot \frac{d}{\delta} y_1^2 y_2^2 + (u)_\beta y_2^4$$

„transformirt wird."

Jeder Wurzel der cubischen Gleichung (32) entspricht eine andere Transformation der gegebenen Function.

3.

Mit der Transformation der homogenen Functionen vierten Grades von den beiden Variabeln x_1, x_2 steht die Auflösung der allgemeinen biquadratischen Gleichungen in der engsten Verbindung. Setzt man nämlich $\frac{x_1}{x_2} = X$ und $\frac{y_1}{y_2} = Y$, so geht die allgemeine biquadratische Gleichung

40. $$\frac{u}{x_2^4} = a_{40} X^4 + 4\, a_{31} X^3 + 6\, a_{22} X^2 + 4\, a_{13} X + a_{04} = 0$$

durch die Substitution

41. $$X = \frac{\alpha Y + \beta}{\alpha' Y + \beta'}$$

in die nach Y^2 quadratische Gleichung

42. $$A Y^4 + 6 C Y^2 + B = 0$$

über. Es seien nun $Y^2 = \lambda^2$ und $Y^2 = \mu^2$ die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, also $Y = \pm\lambda$ und $Y = \pm\mu$ die vier Wurzeln der Gleichung (42). Setzt man diese Werthe von Y in (41) und bezeichnet die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40) durch X_1, X_2, X_3, X_4, so erhält man für die Werthe der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40):

43. $$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\alpha\lambda + \beta}{\alpha'\lambda + \beta'}, & X_2 = \dfrac{\alpha\lambda - \beta}{\alpha'\lambda - \beta'}, \\ X_3 = \dfrac{\alpha\mu + \beta}{\alpha'\mu + \beta'}, & X_4 = \dfrac{\alpha\mu - \beta}{\alpha'\mu - \beta'}. \end{cases}$$

Wenn man der Kürze wegen $\frac{\alpha}{\alpha'} = a$ und $\frac{\beta}{\beta'} = b$ setzt, so erhält man durch Elimination von λ und μ aus den Gleichungen (43) folgende

Relationen zwischen den Wurzeln X der biquadratischen Gleichung (40) und den Wurzeln $\frac{x_1}{x_2} = a$, $\frac{x_1}{x_2} = b$ der quadratischen Gleichung (33):

$$44.\qquad \begin{cases} X_1 X_2 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2)(a + b) + ab = 0, \\ X_3 X_4 - \frac{1}{2}(X_3 + X_4)(a + b) + ab = 0. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (43) der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40) haben eine ungewöhnliche Form. Es ist bekannt, dass sich jeder Wurzel einer algebraisch auflösbaren Gleichung eine Form von der Art geben lässt, dass die algebraischen Ausdrücke, aus welchen sie zusammengesetzt ist, sich als rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung darstellen lassen. Es lassen sich aber auf keine Weise die Grössen α, β, wenn man α', β' etwa $= 1$ setzt, und eben so wenig die Grössen λ, μ, rational durch die Wurzeln X ausdrücken. Diese Form der Wurzeln wird man erhalten, wenn man gleichmässig alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung (32) in die Rechnung einführt.

Ich werde durch $\frac{d_1}{\delta_1}$, $\frac{d_2}{\delta_2}$, $\frac{d_3}{\delta_3}$ die drei Wurzeln der cubischen Gleichung (32) bezeichnen, und die diesen entsprechenden Wurzeln $\frac{x_1}{x_2}$ der quadratischen Gleichung (33) durch a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3. Die Gleichungen (44) geben dann:

$$45.\qquad \begin{cases} X_1 X_2 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2)(a_1 + b_1) + a_1 b_1 = 0, \\ X_3 X_4 - \frac{1}{2}(X_3 + X_4)(a_1 + b_1) + a_1 b_1 = 0. \end{cases}$$

Durch Vertauschung der Wurzeln X_2 und X_3 erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$46.\qquad \begin{cases} X_1 X_3 - \frac{1}{2}(X_1 + X_3)(a_2 + b_2) + a_2 b_2 = 0, \\ X_2 X_4 - \frac{1}{2}(X_2 + X_4)(a_2 + b_2) + a_2 b_2 = 0, \end{cases}$$

und durch Vertauschung der Wurzeln X_2 und X_4 in (45):

$$47.\qquad \begin{cases} X_1 X_4 - \frac{1}{2}(X_1 + X_4)(a_3 + b_3) + a_3 b_3 = 0, \\ X_2 X_3 - \frac{1}{2}(X_2 + X_3)(a_3 + b_3) + a_3 b_3 = 0. \end{cases}$$

Aus je zweien dieser drei Systeme von Gleichungen geht eine Gleichung des folgenden Systems hervor:

$$48.\qquad \begin{cases} a_2 b_2 - \frac{1}{2}(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) + a_3 b_3 = 0, \\ a_3 b_3 - \frac{1}{2}(a_3 + b_3)(a_1 + b_1) + a_1 b_1 = 0, \\ a_1 b_1 - \frac{1}{2}(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) + a_2 b_2 = 0. \end{cases}$$

Wenn man die drei Gleichungen, welche sich aus der quadratischen Gleichung (33) finden, indem man nach einander statt $\frac{d}{\delta}$ die Wurzeln der cubischen Gleichung (32) setzt, mit einander multiplicirt, so erhält man eine Gleichung sechsten Grades, deren Coëfficienten symmetrische Functionen der Wurzeln der cubischen Gleichung (32) enthalten. Drückt man diese durch die Coëfficienten der cubischen Gleichung aus, so werden die Coëfficienten in der Gleichung sechsten Grades zu rationalen Functionen der Grössen $a_{\varkappa\lambda}$. Diese Gleichung, zwischen deren Wurzeln a, b die Relationen (48) stattfinden, lässt sich nun umgekehrt mit Hülfe der cubischen Gleichung (32) in drei quadratische Gleichungen zerlegen, und ist also algebraisch auflösbar in Rücksicht auf die Grössen $a_{\varkappa\lambda}$. In dem folgenden Paragraphen werde ich die eben gemachte Bemerkung dahin erweitern, dass ich beweisen werde, wie jede Gleichung sechsten Grades aufgelöst werden kann, wenn zwischen den Wurzeln derselben die Relationen (48) stattfinden.

Addirt man die beiden Gleichungen (45) und setzt für die Summe $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ ihren Werth $-\frac{4a_{31}}{a_{40}}$, so erhält man

$$X_1 X_2 + X_3 X_4 + 2 \cdot \frac{a_{31}(a_1 + b_1) + a_{40} a_1 b_1}{a_{40}} = 0.$$

Es haben aber $a_1 + b_1$ und $a_1 b_1$ folgende, aus der ersten von den Gleichungen (33) entnommene Werthe:

$$a_1 + b_1 = -2 \cdot \frac{\frac{d_1}{\delta_1} a_{31} + b_{31}}{\frac{d_1}{\delta_1} a_{40} + b_{40}}$$

$$a_1 b_1 = \frac{\frac{d_1}{\delta_1} a_{22} + b_{22} - \frac{1}{12} \cdot \frac{2\varrho}{r^2}}{\frac{d_1}{\delta_1} a_{40} + b_{40}}.$$

Setzt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, so kann man derselben, mit Berücksichtigung der Gleichungen (36, 23 und 22), folgende Gestalt geben:

$$4(X_1 X_2 + X_3 X_4) = -\frac{\frac{d_1^2}{\delta_1^2} a_{40} + \frac{d_1}{\delta_1}(b_{40} - 6.12.a_{22}a_{40}) - 6.12.b_{40}a_{22}}{9a_{40}\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40} + b_{40}\right)},$$

oder die noch einfachere:

$$49. \qquad 4(X_1 X_2 + X_3 X_4) = -\frac{1}{9.a_{40}}\left\{\frac{d_1}{\delta_1} - 6.12.a_{22}\right\}.$$

Diese Gleichung beweist, dass sich die Wurzeln der cubischen Gleichung (32) rational durch die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40) ausdrücken lassen.

Addirt man zu der Gleichung (49) die beiden Gleichungen

$$\Sigma X_\varkappa^2 = \frac{4a_{22}}{a_{40}} - \frac{1}{9}\cdot\frac{b_{40}}{a_{40}^2},$$

$$-2\Sigma X_\varkappa X_\lambda = -12\cdot\frac{a_{22}}{a_{40}},$$

so erhält man:

$$(X_1 + X_2 - X_3 - X_4)^2 = -\frac{1}{9.a_{40}^2}\left\{\frac{d_1}{\delta_1}a_{40} + b_{40}\right\};$$

woraus durch Wurzel-Ausziehung

$$X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = \frac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40} + b_{40}\right)\right)}$$

hervorgeht. Man hat nun folgende vier Gleichungen:

$$50. \quad \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = -\frac{4.a_{31}}{a_{40}}, \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = \frac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40} + b_{40}\right)\right)}, \\ X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = \frac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_2}{\delta_2}a_{40} + b_{40}\right)\right)}, \\ X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = \frac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_3}{\delta_3}a_{40} + b_{40}\right)\right)}, \end{cases}$$

von denen die beiden letzten durch Vertauschung der Wurzeln aus der ihnen vorhergehenden gefunden werden.

Von den Vorzeichen der Quadratwurzeln in den Gleichungen (50) bestimmen immer zwei das dritte. Denn multiplicirt man die drei letzten Gleichungen (50) mit einander, so wird der Theil links der resultirenden Gleichung eine symmetrische Function der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40) sein. Drückt man diese durch die Coëfficienten der biquadratischen Gleichung aus, so kann man der genannten Gleichung die einfache Gestalt

51. $$12\,(a_{31}\,b_{40} - a_{40}\,b_{31}) =$$
$$\sqrt{\left(-\left(\frac{d_1}{\delta_1}\,a_{40} + b_{40}\right)\right)}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_2}{\delta_2}\,a_{40} + b_{40}\right)\right)}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_3}{\delta_3}\,a_{40} + b_{40}\right)\right)}$$

geben. Hat man nun Sorge getragen, den drei Quadratwurzeln solche Vorzeichen zu geben, dass der Gleichung (51) genügt wird, so erhält man die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40) durch Addition und Subtraction der Gleichungen (50).

Ich will noch darauf aufmerksam machen, dass die cubische Gleichung (32), auf welche in dem Vorhergehenden die Auflösung der biquadratischen Gleichung (40) zurückgeführt worden ist, gerade die Form hat, dass sich die Cardani'sche Regel zum Ausdruck ihrer Wurzeln ohne Weiteres anwenden lässt. Setzt man

$$a_{40} = 1, \quad a_{31} = 0, \quad 6\,a_{22} = p, \quad 4\,a_{13} = q, \quad a_{04} = r,$$

wodurch die biquadratische Gleichung (40) in

$$X^4 + p\,X^2 + q\,X + r = 0$$

übergeht, in welcher Form man die biquadratischen Gleichungen zu behandeln pflegt, so erhält man aus der cubischen Gleichung (32) die sogenannte reducirte Gleichung

$$z^3 + 2\,p\,z^2 + (p^2 - 4\,r)\,z - q^2 = 0$$

durch die Substitution

$$-\left(\frac{d}{\delta}\,a_{40} + b_{40}\right) = 36\,z.$$

4.

Man kann sagen, dass eine Gleichung $n$ten Grades n, durch die Gleichung bestimmte Punkte einer geraden Linie darstelle, wenn man die n Wurzeln der Gleichung als die Abscissen auf der geraden Linie von einem beliebig gewählten Anfangspunkte der geraden Linie betrachtet und unter den n Punkten die Endpunkte dieser Abscissen versteht. Dieses vorausgesetzt, wird die biquadratische Gleichung (40) vier Punkte in der geraden Linie darstellen, welche ich, wie die Wurzeln der Gleichungen, mit den Buchstaben X_1, X_2, X_3, X_4 bezeichnen werde. Ebenso stellt die Gleichung (33), wenn man in derselben den Grössen d und δ die Werthe d_1 und δ_1 giebt, zwei Punkte a_1 und b_1 auf derselben geraden Linie vor. Die erste Gleichung (45) ist, wie bekannt, die Bedingung, welche die Punktenpaare X_1, X_2 und a_1, b_1 zu erfüllen haben, wenn sie *harmonisch* sein sollen. Demnach werden die Gleichungen (45) dasjenige Punktenpaar a_1, b_1 bestimmen, welches sowohl mit dem Punktenpaare X_1, X_2 harmonisch ist, als mit dem Punktenpaare X_3, X_4. Auf gleiche Weise bestimmen die Gleichungen (46) dasjenige Punktenpaar a_2, b_2, welches harmonisch ist zu den Punktenpaaren X_1, X_3 und X_2, X_4. Endlich bestimmen die Gleichungen (47) das zu den Punktenpaaren X_1, X_4 und X_2, X_3 harmonische Punktenpaar a_3, b_3. Die so bestimmten Punktenpaare sind unter einander harmonisch; wie es die Gleichungen (48) beweisen. Man hat also folgenden Lehrsatz:

Wenn vier Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, so giebt es drei Punktenpaare, deren jedes harmonisch ist zu einem Paare, wie zu dem andern Paare der vier gegebenen Punkte. Diese drei Punktenpaare sind unter einander selbst harmonisch.

Die Abscissen irgend eines von diesen drei Punktenpaaren a, b sind die Coëfficienten α, β in der Substitution (41), wenn man $\alpha' = \beta' = 1$ setzt.

Ich werde nun noch kurz angeben, wie sich die Punkte a und b construiren lassen. Zu diesem Ende lege ich durch die von der biquadratischen Gleichung (40) gegebenen vier Punkte der Abscissenaxe vier gerade Linien, welche ein Viereck bilden werden. Durch die Ecken dieses Vierecks lege ich die beiden Kegelschnitte, welche zugleich die

Abscissenaxe berühren. Die Berührungspunkte werden dann das gesuchte Punktenpaar a, b sein. Erwägt man aber, dass die vier geraden Linien, welche durch die von der biquadratischen Gleichung gegebenen Punkte gelegt werden, drei verschiedene Vierecke bilden, so wird man auf die angedeutete Weise auch drei Punktenpaare a, b erhalten. Diese drei Punktenpaare werden durch eine Gleichung sechsten Grades bestimmt, welche, wie wir oben bemerkt haben, algebraisch lösbar ist.

Ich werde nun auch unabhängig von der vorhergehenden Untersuchung beweisen: *dass jede gegebene Gleichung sechsten Grades algebraisch auflösbar ist, wenn zwischen den Wurzeln* $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ *die Gleichungen* (48) *stattfinden.*

In der That: setzt man

$$\begin{array}{lll} a_1 + b_1 = -a', & a_2 + b_2 = -a'', & a_3 + b_3 = -a''', \\ a_1 b_1 \;\; = +b', & a_2 b_2 \;\; = +b'', & a_3 b_3 \;\; = +b''', \end{array}$$

so stellen sich die Gleichungen (48) wie folgt dar:

$$\text{a)} \qquad \begin{cases} b'' - \frac{1}{2} a'' a''' + b''' = 0, \\ b''' - \frac{1}{2} a''' a' + b' = 0, \\ b' - \frac{1}{2} a' a'' + b'' = 0; \end{cases}$$

mit deren Hülfe wird nun die gegebene Gleichung sechsten Grades in folgende drei Gleichungen zerfallen:

$$\text{b)} \qquad \begin{cases} x^2 + a' x + b' = 0, \\ x^2 + a'' x + b'' = 0, \\ x^2 + a''' x + b''' = 0, \end{cases}$$

deren Product die gegebene Gleichung

$$\text{c)} \qquad x^6 + c_5 x^5 + c_4 x^4 + c_3 x^3 + \cdots + c_0 = 0$$

selbst ist. Denn setzt man die Coëfficienten der Variabeln in dem aus den Gleichungen (b) gebildeten Product den Coëfficienten der Variabeln in (c) einander gleich, so erhält man:

$$c_5 = a' + a'' + a''',$$
$$c_4 = a''a''' + a'''a' + a'a'' + b' + b'' + b''',$$
$$c_3 = a'a''a''' + a'(b'' + b''') + a''(b''' + b') + a'''(b' + b''),$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen (a):

$$c_5 = a' + a'' + a''',$$
$$c_4 = \tfrac{5}{4}(a''a''' + a'''a' + a'a''),$$
$$c_3 = \tfrac{5}{2}a'a''a'''.$$

Die Coëfficienten a in den Gleichungen (b) sind demnach die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$y^3 - c_5 y^2 + \tfrac{4}{5}c_4 y - \tfrac{2}{5}c_3 = 0.$$

Wenn diese Wurzeln gefunden sind, so ergeben sich die Coëfficienten b in den Gleichungen (b) aus den Gleichungen (a).

Königsberg, im Januar 1849.

16.

Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen sechsten Grades, zwischen deren Wurzeln $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ die Bedingungsgleichung $(x_1 - y_2)(x_2 - y_3)(x_3 - y_1) + (y_1 - x_2)(y_2 - x_3)(y_3 - x_1) = 0$ stattfindet.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 41, Seite 264—268.]

Viele Probleme der Geometrie führen in letzter Instanz auf Gleichungen, welche algebraisch auflösbar sind. Zwei Beispiele dieser Art, eine Gleichung vom neunten und eine vom sechsten Grade, habe ich in Crelle's Journal Bd. 34 S. 193 und Bd. 41 S. 243 [1]) behandelt. Das Problem der Kreisschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung, welches analytisch darauf beruht, einen Factor λ so zu bestimmen, dass die aus einer gegebenen homogenen Function zweiten Grades von den drei Variabeln x, y, z und dem Ausdrucke $\lambda(x^2 + y^2 + z^2)$ zusammengesetzte Summe in zwei lineäre Factoren zerfällt, führt ebenfalls, wenn man das Verhältniss der Coëfficienten in einer der lineären Factoren als die gesuchte Unbekannte betrachtet, auf eine Gleichung sechsten Grades, welche algebraisch auflösbar ist. Wenn man auf den innern Grund der Auflösbarkeit der genannten Gleichung zurückgeht, so wird man ihn darin finden, dass zwischen den Wurzeln $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ der Gleichung die Bedingungsgleichung

$$1. \qquad (x_1 - y_2)(x_2 - y_3)(x_3 - y_1) + (y_1 - x_2)(y_2 - x_3)(y_3 - x_1) = 0$$

---

1) [Seite 137 und 223 dieser Ausgabe.]

stattfindet. Ich werde in dem hier Folgenden beweisen, dass jede gegebene Gleichung sechsten Grades algebraisch auflösbar ist, wenn zwischen ihren Wurzeln die angegebene Bedingungsgleichung stattfindet.

Wenn man der Kürze wegen:

$$x_1 + y_1 = a_1, \quad x_2 + y_2 = a_2, \quad x_3 + y_3 = a_3,$$
$$x_1 y_1 = b_1, \quad x_2 y_2 = b_2, \quad x_3 y_3 = b_3$$

setzt, so lässt sich die Gleichung (1) auch so darstellen:

2. $$a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0.$$

Der Theil links dieser Gleichung ist die aus den Grössen

$$\begin{matrix} 1, & a_1, & b_1, \\ 1, & a_2, & b_2, \\ 1, & a_3, & b_3 \end{matrix}$$

gebildete *Determinante.* Es lassen sich daher zwei Grössen A und B so bestimmen, dass sie folgenden drei Gleichungen genügen:

3. $$\begin{cases} B + A a_1 + b_1 = 0, \\ B + A a_2 + b_2 = 0, \\ B + A a_3 + b_3 = 0; \end{cases}$$

aus welchen durch Elimination von A und B wiederum die Gleichung (2) hervorgeht. Die Auflösung der beiden letzten Gleichungen giebt

$$-A = \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3}, \quad +B = \frac{b_2 a_3 - b_3 a_2}{a_2 - a_3};$$

welche Werthe von A und B nach (3) ungeändert bleiben, wenn man die Indices 1, 2, 3 beliebig mit einander vertauscht. Aus diesen Werthen bilde ich folgenden, in z quadratischen Ausdruck:

4. $$Z = z^2 + 2Az + B;$$

welcher durch die genannte Aenderung eben so wenig seinen Werth ändert.

Ich werde nun zeigen, wie diese in z quadratische Function sich durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung rational ausdrücken lässt.

Wenn man den Ausdruck Z, welcher eine rationale Function der Wurzeln x_2, y_2, x_3, y_3 ist, durch

$$f(x_2, y_2, x_3, y_3)$$

bezeichnet und

5. $$Z_1 = f(x_2, y_2, x_3, y_3); \quad Z_2 = f(x_3, y_3, x_1, y_1); \quad Z_3 = f(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

setzt, so sind die Ausdrücke Z_1, Z_2, Z_3 zwar von einander verschieden, aber vermöge der Gleichung (1) ihrem Werthe nach gleich Z. Ich setze nun in dem Ausdrucke Z_1 für x_2, y_2, x_3, y_3 die fünfzehn Combinationen der sechs Wurzeln der gegebenen Gleichung zur vierten Classe und permutire überdies noch die vier Wurzeln in jeder Combination auf jede mögliche Art. Dadurch entstehen 15.24 Ausdrücke. Unter diesen Ausdrücken werden mehrere gleiche vorkommen. Denn es sei einer derselben:

6. $$C_\varkappa = f(x_1, y_1, x_2, x_3).$$

Da dieser Ausdruck so beschaffen ist, dass er sich nicht ändert, wenn man x_1 mit y_1 oder x_2 mit x_3 vertauscht, oder wenn man x_1 mit x_2 und zu gleicher Zeit y_1 mit x_3 vertauscht, so wird er unter den 15.24 Ausdrücken achtmal vorkommen. Dasselbe gilt von jedem der drei Ausdrücke Z. Die Anzahl der verschiedenen Ausdrücke

$$Z_1, Z_2, Z_3, C_1, C_2, \ldots C_n$$

beträgt demnach $\frac{15.24}{8}$; woraus folgt, dass $n = 42$ ist.

Durch jede beliebige Permutation der sechs Wurzeln der gegebenen Gleichung in der angegebenen Reihe der 45 Ausdrücke gehen nun die einen in die andern über, so dass eine neue Reihenfolge eben derselben 45 Ausdrücke hervorgeht. Es ist daher folgende homogene ganze Function der Variabeln α und β von der 45. Ordnung:

7. $$F(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta Z_1)(\alpha - \beta Z_2)(\alpha - \beta Z_3)(\alpha - \beta C_1)(\alpha - \beta C_2) \ldots (\alpha - \beta C_n)$$

eine symmetrische Function der sechs Wurzeln der gegebenen Gleichung und kann daher durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung rational ausgedrückt werden. Ist dies geschehen, so hat die nunmehr in den Coëfficienten der gegebenen Gleichung rationale Gleichung

8. $$F(\alpha, \beta) = 0,$$

wenn man $\frac{\alpha}{\beta}$ als die Unbekannte betrachtet, 45 Wurzeln, von denen die drei Wurzeln Z_1, Z_2, Z_3 gleich Z, die übrigen aber sämmtlich verschieden sind.

Wenn man erwägt, dass jede der folgenden Gleichungen vom 43. Grade

$$\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,\qquad \frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2}=0$$

erfüllt wird, wenn man $\alpha = Z$ und $\beta = 1$ setzt, so giebt das Sylvester'sche Eliminationsverfahren ein Mittel, diesen Werth von $\alpha = Z$ aus zwei von den angegebenen Gleichungen, z. B. aus den beiden ersten, zu ermitteln. Dieses besteht darin, dass man unter der Voraussetzung $\beta = 1$ die Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}=0, & \dfrac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,\\
\alpha\cdot\dfrac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}=0, & \alpha\cdot\dfrac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,\\
\alpha^2\cdot\dfrac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}=0, & \alpha^2\cdot\dfrac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\alpha^{42}\cdot\dfrac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}=0, & \alpha^{42}\cdot\dfrac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0
\end{array}$$

bildet, in diesen Gleichungen die Glieder nach Potenzen von α ordnet und, indem man eine beliebige Gleichung ausschliesst, aus den übrigen die 85 verschiedenen Potenzen von α, so wie die Unbekannten aus lineären Gleichungen, berechnet. Auf diese Weise stellt sich der Werth von $\alpha = Z$ als ein rationaler Bruch dar, dessen Zähler und Nenner ganze Functionen von z sind; und zwar wird der Grad des Zählers den des Nenners um zwei Einheiten übersteigen. Dividirt man den Nenner in den Zähler, so erhält man eine ganze Function zweiten Grades, in Beziehung auf z, und einen ächten Bruch. Da aber nach (4) der gesuchte Werth von Z eine ganze Function zweiten Grades ist, so ist jene ganze Function von z der gesuchte Werth von Z, und der ächte Bruch muss mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung (1) verschwinden. Die Coëfficienten von z^1 und z^0 des auf diese Weise gefundenen Werths von Z sind rationale Functionen der Coëfficienten der gegebenen Gleichung und respective gleich $2A$ und B in dem Ausdrucke (4).

Nachdem ich den in z quadratischen Ausdruck $Z = z^2 + 2Az + B$ durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung rational ausgedrückt habe, setze ich denselben $= 0$; was die quadratische Gleichung

9. $$z^2 + 2Az + B = 0$$

giebt. Die Wurzeln z_1, z_2 dieser Gleichung bestimme ich durch Auflösung der Gleichung als irrationale Functionen der Coëfficienten der gegebenen Gleichung.

Ich setze nun:

10. $$\begin{cases} \dfrac{x_1 - z_1}{x_1 - z_2} = \lambda_{,}, & \dfrac{y_1 - z_1}{y_1 - z_2} = \lambda', \\ \dfrac{x_2 - z_1}{x_2 - z_2} = \lambda_{,,}, & \dfrac{y_2 - z_1}{y_2 - z_2} = \lambda'', \\ \dfrac{x_3 - z_1}{x_3 - z_2} = \lambda_{,,,}, & \dfrac{y_3 - z_1}{y_3 - z_2} = \lambda''', \end{cases}$$

und bilde die in Rücksicht auf die Wurzeln der gegebenen Gleichung symmetrische Function

11. $$L = (\lambda - \lambda_{,})(\lambda - \lambda_{,,})(\lambda - \lambda_{,,,})(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')(\lambda - \lambda''')$$

vom sechsten Grade in λ, welche ich durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung und die Wurzeln z_1, z_2 rational ausdrücke. In der Entwicklung dieses Ausdrucks nach Potenzen von λ lasse ich die mit den ungeraden Potenzen von λ multiplicirten Glieder, als verschwindend durch die Gleichung (1), aus. Denn es ist, mit Rücksicht auf die Gleichungen (3):

$$\lambda_{,} + \lambda' = 0, \quad \lambda_{,,} + \lambda'' = 0, \quad \lambda_{,,,} + \lambda''' = 0.$$

Dadurch ergiebt sich L unter der Form:

12. $$L = \lambda^6 + M\lambda^4 + N\lambda^2 + P,$$

in welcher M, N, P rationale Functionen der Coëfficienten der gegebenen Gleichung und der Wurzeln z_1, z_2 sind.

Um nun die sechs Werthe $\lambda_{,}, \lambda', \ldots \lambda_{,,,}, \lambda'''$ zu finden, löse ich die in λ^2 cubische Gleichung:

13. $$\lambda^6 + M\lambda^4 + N\lambda^2 + P = 0$$

auf und ziehe aus den Wurzeln derselben die sechs Quadratwurzeln. Setzt man diese für die Grössen λ in (10), so ist nur noch die Auflösung jener lineären Gleichungen (10) nöthig, um die Wurzeln der

gegebenen Gleichung als algebraische Ausdrücke der Coëfficienten der gegebenen Gleichung darzustellen.

Ich führe hier noch zwei Lehrsätze an, welche sich auf ähnliche Art beweisen lassen.

1. „Jede Gleichung *achten Grades* ist algebraisch auflösbar, wenn „zwischen je dreien der Wurzelpaare x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4 „die Bedingungsgleichung

$$(x_\varkappa - y_\lambda)(x_\lambda - y_\mu)(x_\mu - y_\varkappa) + (y_\varkappa - x_\lambda)(y_\lambda - x_\mu)(y_\mu - x_\varkappa) = 0$$

„stattfindet."

2. „Jede Gleichung $2n$*ten Grades* ist algebraisch auf eine Gleichung „$n$ten Grades reducirbar, wenn je drei der Wurzelpaare x_1, y_1, x_2, y_2, „... x_n, y_n der Gleichung der angegebenen Bedingungsgleichung „genügen."

Die Bedingungsgleichung drückt geometrisch aus, dass die durch die drei Wurzelpaare dargestellten Punkte einer geraden Linie sich *in Involution* befinden.

Königsberg, im Februar 1849.

17.

Eine Bemerkung zum Pascal'schen Theorem.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 41, Seite 269—271.]

In seinem grossen Werke: „Systematische Entwickelung etc. 1832" stellt Steiner (S. 311) folgende Theoreme zusammen:

1. „Irgend sechs Punkte eines beliebigen Kegelschnitts bestimmen 60 „eingeschriebene einfache Sechsecke."
2. „In jedem der letzteren liegen die drei Punkte, in welchen die „gegenüberliegenden Seiten sich schneiden, in einer Geraden G; so „dass also 60 solcher Geraden G stattfinden."
3. „Von diesen 60 Geraden gehen drei und drei durch irgend einen „Punkt P; so dass 20 solcher Punkte P entstehen."
4. „Und von diesen 20 Punkten P liegen 15 mal 4 in einer Geraden g; „so dass jeder in drei solchen Geraden liegt."

Steiner fügt hierzu noch die Frage:

„Welche Beziehung haben diese 15 Geraden g weiter zu einander?"

Von diesen Sätzen ist derjenige No. 4, wie Plücker in der Note zum Pascal'schen Theorem im 34. Bande des Crelle'schen Journals ausdrücklich bemerkt, aus seiner Abhandlung vom Jahre 1829 (in Crelle's Journal Bd. 5 S. 268) in das Steiner'sche Werk übergegangen. Es ist daher anzunehmen, dass Steiner eine andere Erledigung seiner Frage verlangt, als die erwähnte frühere Abhandlung von Plücker gewährt.

Weder die Note von Plücker, noch die andern in Crelle's Journal enthaltenen Schriften, welche das Pascal'sche Theorem wieder in Erinnerung bringen, berühren die interessante Steiner'sche Frage. Ich nehme Gelegenheit, dieselbe durch Anführung einiger aus meinen Universitätsvorträgen entnommenen Sätze zu beantworten.

5. „Die 15 Geraden g entsprechen den 15 Systemen von drei Geraden, „welche sich durch die sechs Punkte des Kegelschnitts legen lassen, „in folgender Art:

„Wenn $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ die Gleichungen von drei Geraden „bedeuten, welche durch die sechs Punkte des Kegelschnitts hin- „durchgehen, dessen Gleichung sich bekanntlich auf die Form

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv = 0$$

„zurückführen lässt, so ist:

$$AFu + BGv + CHw = 0$$

„die Gleichung der Geraden g, welche dem Systeme von drei „Geraden $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ zugehört."

Die drei Geraden g, welche auf diese Weise den drei geraden Seiten eines der 60 Sechsecke, den drei ungeraden Seiten desselben Sechsecks und den drei Diagonalen entsprechen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks verbinden, schneiden sich in einem und demselben Punkte P.

Ebenso schneiden sich die drei Geraden g, welche dem ersten Paare der gegenüberliegenden Seiten des betrachteten Sechsecks und der ersten Diagonale (welche das letzte Eckenpaar des Sechsecks verbindet), dem zweiten Paare gegenüberliegender Seiten und der zweiten Diagonale, dem dritten Paare gegenüberliegender Seiten und der dritten Diagonale entsprechen, in einem und demselben Punkte p, welcher in Rücksicht auf den Kegelschnitt der harmonische Pol zu dem vorhin gedachten Punkte P ist.

6. „Wenn die Ecken von drei Dreiecken auf drei Geraden g liegen, „welche sich in einem und demselben Punkte P schneiden, so „schneiden sich die entsprechenden Seiten je zweier von diesen

„Dreiecken in drei Punkten, welche auf einer Geraden γ liegen, „und die drei Geraden γ schneiden sich wieder in einem und dem-„selben Punkte p."

In der That: wenn man durch $a=0$, $b=0$, $c=0$ die Gleichungen der Seiten des ersten Dreiecks, durch $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$ und $a''=0$, $b''=0$, $c''=0$ die Gleichungen der Seiten des zweiten und dritten Dreiecks, endlich durch $g=0$, $g'=0$, $g''=0$ die Gleichungen der drei Geraden g bezeichnet, auf welchen die Ecken der drei Dreiecke liegen und welche sich in dem Punkte P schneiden, so lassen sich die 12 willkürlichen Constanten, welche die genannten Gleichungen als Factoren enthalten, unter den aufgestellten Bedingungen so bestimmen, dass folgendem Systeme von Gleichungen identisch genügt wird:

$$\begin{aligned} b-c &= b'-c' = b''-c'' = g, \\ c-a &= c'-a' = c''-a'' = g', \\ a-b &= a'-b' = a''-b'' = g''; \end{aligned}$$

und umgekehrt, wenn diesem Systeme identischer Gleichungen Genüge geschieht, so stellen obige Gleichungen die Seiten von drei Dreiecken dar, deren Ecken auf den drei Geraden g liegen, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Bezeichnet man nun die Ausdrücke $a'-a''$, $a''-a$, $a-a'$ respective durch γ, γ', γ'', so folgt aus dem aufgestellten Systeme identischer Gleichungen sogleich folgendes System:

$$\begin{aligned} a'-a'' &= b'-b'' = c'-c'' = \gamma, \\ a''-a &= b''-b = c''-c = \gamma', \\ a-a' &= b-b' = c-c' = \gamma'', \end{aligned}$$

dessen geometrische Deutung den angeführten Satz giebt.

Ich führe diesen Satz, dessen erster Theil bekannt ist, hier an, weil er ein Bild von der Lage der 20 Punkte P und der 15 Geraden g zu einander giebt. Die Punkte P nämlich werden durch die neun Ecken der drei Dreiecke, durch die neun Schnittpunkte der entsprechenden Seiten je zweier von diesen Dreiecken, und durch die Punkte P und p repräsentirt; ferner die 15 Geraden g durch die neun Seiten der drei

Dreiecke, durch die drei Geraden g, auf welchen ihre Ecken liegen, und durch die drei Geraden γ.

Die durch die 20 Punkte P und die 15 Geraden g gebildete Figur ist demnach symmetrisch: in der Art, dass man, wie man von dem Punkte P ausgehend zu dem Punkte p gelangt, ebenso in derselben Figur von dem Punkte p ausgehend zu dem Punkte P gelangen wird. Dasselbe gilt von allen 20 Punkten P. Auf diese Weise paaren sich die 20 Punkte P, und diese Punktenpaare stehen wieder zu dem Kegelschnitt in der Beziehung, welche der folgende Satz angiebt:

7. „Die 20 Punkte P bilden 10 harmonische Polenpaare des Kegelschnitts."

Den aus diesem Satze durch das Princip der Reciprocität abgeleiteten Satz habe ich am Ende meiner Schrift „Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloïd" bewiesen (s. Crelle's Journal Bd. 24).[1])

Königsberg, im September 1849.

1) [Diese Ausgabe, Seite 60 und 61.]

18.

Auszug dreier Schreiben von O. Hesse an C. G. J. Jacobi und eines Schreibens von C. G. J. Jacobi an O. Hesse.

Hesse an Jacobi.[1]

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 40, Seite 316—318 und Seite 260.]

Königsberg, den 27. November 1849.

Ihr Brief ist mir von unschätzbarem Werthe, weil ich daraus Ihre alte Freundschaft entnehme, und er mir zugleich das bringt, wonach ich mich lange gesehnt habe. Sie schreiben von meiner Meisterschaft in gewissen mathematischen Dingen und beweisen gleich darauf, wie viel mir daran fehlt. Das lasse ich mir schon gerne gefallen, da dieser Beweis von unberechenbarem Nutzen für meine Bemühungen zu werden verspricht. Ich bedauere nichts mehr, als dass 80 Meilen zwischen uns liegen, was mit einem halben Jahre gleichbedeutend ist. Im Sommer haben Sie den Beweis gemacht, der für mich vielleicht eine Lebensfrage ist, und im Winter erst kann ich ihn erfahren.

Reductionen der Art kommen in der Geometrie oft vor. *So lässt sich z. B. der Grad der Gleichung der Schmiegungs-Ebene einer Curve doppelter Krümmung, entstanden aus dem Schnitt zweier algebraischen Ober-*

1) [Diese drei Schreiben beziehen sich auf die im J. f. d. r. u. a. M., Bd. 40, S. 237—260 (Werke, her. v. Weierstrass, III, No. 21) publicirte Abhandlung von C. G. J. Jacobi: „Beweis des Satzes, dass eine Curve $n$ten Grades im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat".]

flächen, immer um zwei Einheiten in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspunktes mit Hülfe der Gleichungen der beiden Oberflächen reduciren. Die reducirten Gleichungen, zu weitläufig hier hinzuschreiben, werde ich alsbald an das Journal schicken.

Ich erlaube mir noch in Rücksicht auf die Wendepunkte eine Bemerkung hinzuzufügen, die ich eben jetzt gemacht habe, und die mir interessant scheint. Wenn u eine homogene Function von x, y, z, und wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

so ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} : \cdots : \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} : \cdots = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} : \cdots : \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} : \cdots,$$

wo v die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten von u zusammengesetzte Determinante ist. Hieraus erklärt sich auch, warum in einen Doppelpunkt immer sechs Wendepunkte zusammenfallen.

Mit dem innigen Wunsche Ihres Wohlergehens

Ihr treu ergebener Schüler

Otto Hesse.

Königsberg, den 7. December 1849.

— — — Sie haben durch Ihren Beweis von den Doppeltangenten zugleich dargethan, dass auch der Grad jedes Gliedes der Reihe

$$f(x + bh, y - ah) = \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \cdots,$$

wo $b = \frac{\partial f}{\partial y}$, $a = \frac{\partial f}{\partial x}$, mit Hülfe der Gleichung $f(x, y) = 0$, sich um zwei Einheiten erniedrigen lässt. Wie sich aber durch diese Erniedrigung die Coëfficienten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ gestalten, lässt sich aus Ihren Andeutungen nicht schliessen (Sie haben das ja auch gar nicht gewollt), und doch wäre gerade die wirkliche Darstellung der reducirten α in einer einfachen Form für mich von der höchsten Wichtigkeit.

Schliesslich erwähne ich noch einer Eliminationsmethode zur Anwendung auf Curven dritter und vierter Ordnung. Ich habe mir nämlich die Aufgabe gestellt, die Gleichungen dieser Curven durch Liniencoordinaten auszudrücken, wenn sie in Punktcoordinaten gegeben sind, d. h. die Variabeln aus den vier Gleichungen zu eliminiren:

$$1. \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \alpha_2, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \alpha_3,$$

$$2. \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

wenn $u = 0$ die Gleichung der Curve ist. Zu diesem Zwecke bilde ich für die Curven dritten Grades die Determinante v aus den Grössen

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} & \alpha_1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} & \alpha_2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0, \end{matrix}$$

und eliminire die Variabeln x_1, x_2, x_3, λ aus den linearen Gleichungen

$$2. \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

$$3. \qquad \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda \alpha_1 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} + \lambda \alpha_2 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3} + \lambda \alpha_3 = 0.$$

Dieses Verfahren für die Curven dritter Ordnung ist ein anderes als das, welches ich bereits bekannt gemacht habe und was auch Cayley bekannt gewesen sein soll.

In dem Falle, wenn $u = 0$ eine Curve vierter Ordnung ist, bilde ich aus der Gleichung (2) sechs andere Gleichungen durch Multiplication mit x_1^2, $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, x_2^2, $x_2 x_3$, x_3^2, und eliminire aus diesen sechs Gleichungen, den drei Gleichungen (1) und den drei Gleichungen (3), wie aus linearen Gleichungen, die elf Unbekannten x_1^3, $x_1^2 x_2$, .. und λ.

Otto Hesse.

Königsberg, den 30. December 1849.

Für Ihre Mittheilung des Beweises von den Doppeltangenten muss ich Ihnen auch insofern dankbar sein, als ich mich dadurch aufgefordert fühlte, einen letzten Versuch zu machen, die Curve zu bestimmen, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung hindurchgeht, befreit von allen überflüssigen Termen. Dass eine solche existirt, wusste ich vorher, denn ich kann sieben Kegelschnitte angeben, welche durch sämmtliche Berührungspunkte hindurchgehen, nicht auf die Weise, wie der unrichtige Plücker'sche Satz über die Kegelschnitte, welche die Curve in den Berührungspunkten schneiden sollen, vermuthen liesse, sondern auf eine ganz andere Art, die ich wegen ihrer Weitläufigkeit hier nicht angeben kann. Der Versuch gelang und folgendes ist das Resultat: $u = 0$ sei die Gleichung der Curve vierter Ordnung, $\varDelta$ die Determinante der Function u, zusammengesetzt aus ihren zweiten Differentialquotienten u_{11}, u_{22}, ... Es seien ferner $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, $\varDelta_{11}$, $\varDelta_{22}$, ... die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von $\varDelta$. *Setzt man nun*

$$\begin{aligned} v_{11} &= u_{22} u_{33} - u_{23}^2 & \qquad v_{23} &= u_{13} u_{12} - u_{11} u_{23} \\ v_{22} &= u_{33} u_{11} - u_{31}^2 & v_{31} &= u_{21} u_{23} - u_{22} u_{31} \\ v_{33} &= u_{11} u_{22} - u_{12}^2 & v_{12} &= u_{32} u_{31} - u_{33} u_{12}, \end{aligned}$$

so ist die gesuchte Gleichung vom vierzehnten Grade folgende:

$$\begin{aligned} &\{\varDelta_1^2 v_{11} + \varDelta_2^2 v_{22} + \varDelta_3^2 v_{33} + 2\varDelta_2 \varDelta_3 v_{23} + 2\varDelta_3 \varDelta_1 v_{31} + 2\varDelta_1 \varDelta_2 v_{12}\} \\ - 3\varDelta &\{\varDelta_{11} v_{11} + \varDelta_{22} v_{22} + \varDelta_{33} v_{33} + 2\varDelta_{23} v_{23} + 2\varDelta_{31} v_{31} + 2\varDelta_{12} v_{12}\} = 0. \end{aligned}$$

Die anliegenden Abhandlungen haben Sie wohl die Güte an Herrn G. R. Crelle zu befördern. Zum neuen Jahre den aufrichtigsten Glückwunsch

Ihres ergebenen Schülers

Otto Hesse.

Jacobi an Hesse.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 40, Seite 318.]

Von dem zweiten Satze Ihres gütigen Schreibens vom 27. November habe ich einen Beweis gesucht. Man hat die n identischen Gleichungen:

$$x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_i} + \cdots + x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i} = (m-1) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

wenn u vom $m$ten Grade ist. Durch ihre Auflösung erhalte man:

$$v x_i = (m-1) \left\{ U_{1,i} \frac{\partial u}{\partial x_1} + U_{2,i} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + U_{n,i} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\},$$

wo $U_{i,k} = U_{k,i}$. Differentiirt man diese Gleichung nach x_k, so wird

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} x_i = (m-1) \left\{ \frac{\partial U_{1,i}}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial U_{2,i}}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial U_{n,i}}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\},$$

wo x_k von x_i verschieden. Differentiirt man nochmals nach x_l, so erhält man

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} x_i = (m-1) \left\{ \frac{\partial^2 U_{1,i}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 U_{2,i}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial^2 U_{n,i}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\}$$
$$-(m-1) \left\{ U_{1,i} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_k \partial x_l} + U_{2,i} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_k \partial x_l} + \cdots + U_{n,i} \frac{\partial^3 u}{\partial x_n \partial x_k \partial x_l} \right\}.$$

Wenn $l = i$, kommt rechts noch $(m-2) \frac{\partial v}{\partial x_k}$ hinzu.

Es sei jetzt

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

so wird

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0, \quad U_{i,k} = N x_i x_k,$$

wo N für sämmtliche Combinationen von i und k dasselbe bleibt. Es folgt daher aus der zuletzt gefundenen identischen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} = -(m-1)(m-2) N \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l},$$

was Ihren Satz giebt.

C. G. J. Jacobi.

19.

Ueber die Wendepunkte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungs-Ebenen der Curven von doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 41, Seite 272—284.]

Die Gleichung der Tangente einer beliebig gegebenen ebenen Curve, sowie die Gleichung der Tangenten-Ebene einer beliebig gegebenen Oberfläche, lassen sich bekanntlich mit Hülfe der Gleichung der Curve oder Oberfläche auf einen in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspunkts um 1 niedrigeren Grad zurückführen, in dem Falle, wenn die Curve oder Oberfläche algebraisch ist. Ebenso kann man die Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten eines Punkts, welche stattfinden muss, wenn der Punkt ein Wendepunkt einer gegebenen ebenen Curve sein soll, auf einen um zwei Einheiten niedrigeren Grad zurückführen, in dem Falle einer algebraischen Curve (s. Crelle's Journal Bd. 28, S. 104, Lehrsatz 9)[1]).

Ich werde im Folgenden diese Transformation auf einem Wege ausführen, auf welchem man auch die mit ihr verwandte Transformation der Gleichung der Schmiegungs-Ebene einer durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen erzeugten Curve doppelter Krümmung auf einen in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspunkts um zwei

---

1) [No. 9 dieser Ausgabe, S. 131.]

Einheiten niedrigeren Grad erreichen kann. Die Transformation der Gleichung der Schmiegungs-Ebene wird den Gegenstand des zweiten Paragraphen bilden.

Durch die erste Transformation bestimmt man die Wendepunkte einer ebenen Curve, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Berührungspunkte der Schmiegungs-Ebenen, welche sich von einem gegebenen Punkte ausserhalb der Ebene, in welcher die Curve liegt, an die Curve legen lassen. Denn die Ebenen, welche durch den gegebenen Punkt und die Wendetangenten der Curve gelegt werden, sind eben Schmiegungs-Ebenen der Curve, weil sie durch drei auf einander folgende unendlich nahe Punkte der Curve hindurchgehen. Durch die zweite Transformation werden die Berührungspunkte der Schmiegungs-Ebenen bestimmt, welche durch einen gegebenen Punkt an eine Curve doppelter Krümmung gelegt werden können. Die letztere Bestimmung ist also die allgemeinere.

Ich werde im Folgenden besonders von zwei Sätzen von den Determinanten öfter Gebrauch machen, deren Beweise man in Crelle's Journal (Bd. 22, S. 310—312) findet. Setzt man nämlich der Kürze wegen:

$$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n, \qquad B = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \dots b_n^n, \qquad C = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \dots c_n^n,$$
$$\Gamma = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \dots c_{n-1}^{n-1},$$

so ist unter der Voraussetzung, dass

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa b_0^\lambda + a_1^\varkappa b_1^\lambda + \dots + a_n^\varkappa b_n^\lambda,$$

wo $\varkappa$ und λ die Zahlen 0, 1, 2, ... n bedeuten:

I. $$C = A \, . \, B,$$

II. $$\Gamma = \frac{\partial A}{\partial a_0^n} \cdot \frac{\partial B}{\partial b_0^n} + \frac{\partial A}{\partial a_1^n} \cdot \frac{\partial B}{\partial b_1^n} + \dots + \frac{\partial A}{\partial a_n^n} \cdot \frac{\partial B}{\partial b_n^n}.$$

1.

Es seien x_1, x_2, x_3 gegebene lineäre Functionen der rechtwinkligen Coordinaten eines beliebig gegebenen Punkts p in der Ebene. Ich werde jene drei Functionen, durch deren Verhältnisse die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts p bestimmt sind und deren Werthe wiederum durch die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts bestimmt werden, die Coor-

dinaten des erwähnten Punkts nennen. Es sei ferner u eine beliebig gegebene homogene ganze Function $n$ten Grades von den Coordinaten x_1, x_2, x_3. Aus den partiellen Differentialquotienten u_1, u_2, u_3 dieser Function, nach den drei Coordinaten genommen, und den sechs beliebig gewählten constanten Grössen $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$ setze ich die Determinante

$$1. \qquad B = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

zusammen und bestimme die Coordinaten x_1, x_2, x_3 als Functionen der unabhängigen Variabeln t durch die simultanen Differentialgleichungen

$$2. \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_2}, \qquad \frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_3}.$$

Durch Integration erhält man folgende beide Gleichungen mit den willkürlichen Constanten a und b:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a, \qquad u = b.$$

Das dritte Integral führt die dritte willkürliche Constante durch das $+$ Zeichen mit der unabhängigen Variabeln t verbunden ein. Da nun durch die Differentialgleichungen (2) die Coordinaten noch nicht vollständig als Functionen von t bestimmt sind, so will ich $b = 0$ setzen und die beiden andern willkürlichen Constanten gleich beliebig gegebenen Grössen annehmen. Durch diese Bestimmungen wird der Punkt p in eine durch die Gleichung

$$3. \qquad u = 0$$

gegebene Curve $n$ter Ordnung verlegt, und man erhält die Coordinaten aller Punkte dieser Curve, wenn man der unabhängigen Variabeln t alle nur möglichen Werthe giebt. Die Coordinaten dreier unendlich nahe aufeinander folgender Punkte der Curve sind nun:

$$\begin{array}{lll} x_1, & x_2, & x_3, \\ x_1 + dx_1, & x_2 + dx_2, & x_3 + dx_3, \\ x_1 + 2\,dx_1 + d^2x_1, & x_2 + 2\,dx_2 + d^2x_2, & x_3 + 2\,dx_3 + d^2x_3. \end{array}$$

Setzt man die Determinante R, gebildet aus diesen Grössen, oder, was dasselbe ist,

$$4. \qquad R = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ dx_1, & dx_2, & dx_3 \\ d^2x_1, & d^2x_2, & d^2x_3 \end{vmatrix}$$

gleich 0, so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$5. \qquad R = 0,$$

welche die Coordinaten des Punkts p der Curve $u = 0$ zu erfüllen haben, wenn die ihm unendlich nahe gelegenen nächstfolgenden beiden Punkte der Curve mit ihm in einer und derselben geraden Linie liegen sollen, d. h. wenn der Punkt p ein Wendepunkt der Curve ist.

Die Determinante R werde ich nun durch die Coordinaten des Punkts p ausdrücken. Zu diesem Zwecke dienen die folgenden Gleichungen, welche aus den Gleichungen $u = 0$ und $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a$ durch Differentiation hervorgehen:

$$6. \quad \begin{cases} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, & a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a, \\ u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 = 0, & a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 = 0, \\ u_1 d^2x_1 + u_2 d^2x_2 + u_3 d^2x_3 = -U, & a_1 d^2x_1 + a_2 d^2x_2 + a_3 d^2x_3 = 0, \end{cases}$$

wo U die Bedeutung

$$7. \quad U = u_{11} dx_1^2 + u_{22} dx_2^2 + u_{33} dx_3^2 + 2u_{23} dx_2 dx_3 + 2u_{31} dx_3 dx_1 + 2u_{12} dx_1 dx_2$$

hat und $u_{11}, u_{22}, \ldots$ die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u bezeichnen.

Multiplicirt man die Gleichungen (2) respective mit $b_1 dt$, $b_2 dt$, $b_3 dt$ und addirt, so erhält man:

$$b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3 = B dt.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit R und bemerkt, dass nach Satz (I) $B.R = -Ua(b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3)$ ist, so geht dieselbe in

$$8. \qquad R = -U a\, dt$$

über. Nun ist aber nach (7)

$$\frac{U}{dt^2} = \left\{u_{11}\frac{dx_1}{dt} + u_{12}\frac{dx_2}{dt} + u_{13}\frac{dx_3}{dt}\right\}\frac{dx_1}{dt}$$
$$+ \left\{u_{21}\frac{dx_1}{dt} + u_{22}\frac{dx_2}{dt} + u_{23}\frac{dx_3}{dt}\right\}\frac{dx_2}{dt}$$
$$+ \left\{u_{31}\frac{dx_1}{dt} + u_{32}\frac{dx_2}{dt} + u_{33}\frac{dx_3}{dt}\right\}\frac{dx_3}{dt}.$$

Setzt man in diese Gleichung für $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}$ die Werthe aus (2) und bezeichnet durch G_1, G_2, G_3 die Determinanten

$$9. \quad G_1 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ u_{11}, & u_{12}, & u_{13} \end{vmatrix}, \quad G_2 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23} \end{vmatrix}, \quad G_3 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33} \end{vmatrix},$$

so lässt sich jene Gleichung wie folgt darstellen:

$$10. \qquad \frac{U}{dt^2} = G_1\frac{\partial B}{\partial b_1} + G_2\frac{\partial B}{\partial b_2} + G_3\frac{\partial B}{\partial b_3}.$$

Dieser Ausdruck von $\frac{U}{dt^2}$ ist in Rücksicht auf die Coordinaten des Punkts p vom Grade $3n-4$. Ich werde demselben eine solche Form geben, dass man sieht, wie er mit Hülfe der Gleichung der Curve $u = 0$ auf den Grad $3(n-2)$ zurückgeführt werden kann.

Um die drei Determinanten G_1, G_2, G_3 zu transformiren, stelle ich folgende Gleichungen auf:

$$11. \qquad \begin{cases} (n-1)\,u_1 = u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3, \\ (n-1)\,u_2 = u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3, \\ (n-1)\,u_3 = u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3; \end{cases}$$

$$12. \qquad \begin{cases} \Delta x_1 = (n-1)\{U_{11}u_1 + U_{12}u_2 + U_{13}u_3\}, \\ \Delta x_2 = (n-1)\{U_{21}u_1 + U_{22}u_2 + U_{23}u_3\}, \\ \Delta x_3 = (n-1)\{U_{31}u_1 + U_{32}u_2 + U_{33}u_3\}. \end{cases}$$

Die drei ersten dieser Gleichungen drücken die bekannte Eigenschaft der homogenen Functionen u_1, u_2, u_3 aus. Die drei letzten stellen die Auflösungen der drei ersten Gleichungen dar, wenn man die in ihnen explicite vorkommenden Grössen x_1, x_2, x_3 als die Unbekannten ansieht. Demnach ist die Determinante

13. $$\Delta = \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33} \end{vmatrix}$$

homogen und vom Grade $3(n-2)$ in Rücksicht auf die Coordinaten x_1, x_2, x_3; und die Coëfficienten $U_{\varkappa\lambda}$ in dem Systeme der Gleichungen (12) sind ebenfalls homogene Functionen vom Grade $2(n-2)$.

Zu dem genannten Zwecke führe ich ferner die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ein, welche durch das folgende System von Gleichungen definirt werden:

14. $$\begin{cases} (n-1)\,a_1 = u_{11}\,\alpha_1 + u_{12}\,\alpha_2 + u_{13}\,\alpha_3, \\ (n-1)\,a_2 = u_{21}\,\alpha_1 + u_{22}\,\alpha_2 + u_{23}\,\alpha_3, \\ (n-1)\,a_3 = u_{31}\,\alpha_1 + u_{32}\,\alpha_2 + u_{33}\,\alpha_3, \end{cases}$$

aus welchen sich wiederum durch Auflösung

15. $$\begin{cases} \Delta\,\alpha_1 = (n-1)\,\{U_{11}\,a_1 + U_{12}\,a_2 + U_{13}\,a_3\}, \\ \Delta\,\alpha_2 = (n-1)\,\{U_{21}\,a_1 + U_{22}\,a_2 + U_{23}\,a_3\}, \\ \Delta\,\alpha_3 = (n-1)\,\{U_{31}\,a_1 + U_{32}\,a_2 + U_{33}\,a_3\} \end{cases}$$

ergiebt. Setzt man nun in die Determinante G_1 für u_1, u_2, u_3 die Werthe aus (11) und für a_1, a_2, a_3 die Werthe aus (14), so geht dieselbe in die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n-1}(u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3), & \frac{1}{n-1}(u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3), & \frac{1}{n-1}(u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3) \\ \frac{1}{n-1}(u_{11}\alpha_1 + u_{12}\alpha_2 + u_{13}\alpha_3), & \frac{1}{n-1}(u_{21}\alpha_1 + u_{22}\alpha_2 + u_{23}\alpha_3), & \frac{1}{n-1}(u_{31}\alpha_1 + u_{32}\alpha_2 + u_{33}\alpha_3) \\ u_{11}, & u_{12}, & u_{13} \end{vmatrix}$$

über. Diese Determinante ist aber nach Satz (I) gleich dem Product

$$\frac{1}{(n-1)^2}\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ 1, & 0, & 0 \end{vmatrix};$$

und wenn man die folgende Determinante durch C bezeichnet:

16. $$C = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix},$$

so wird das genannte Product gleich

$$17. \qquad \frac{1}{(n-1)^2}\,\Delta\,\frac{\partial C}{\partial c_1} = G_1.$$

Auf diese Weise stellen sich die transformirten Determinanten G_1, G_2, G_3 wie folgt dar:

$$18. \qquad G_1 = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\,\frac{\partial C}{\partial c_1}, \qquad G_2 = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\,\frac{\partial C}{\partial c_2}, \qquad G_3 = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\,\frac{\partial C}{\partial c_3}.$$

Setzt man diese Werthe der Determinanten in (10), so erhält man

$$19. \qquad \frac{U}{dt^2} = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\left\{\frac{\partial B}{\partial b_1}\,\frac{\partial C}{\partial c_1} + \frac{\partial B}{\partial b_2}\,\frac{\partial C}{\partial c_2} + \frac{\partial B}{\partial b_3}\,\frac{\partial C}{\partial c_3}\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich nun mit Anwendung des Satzes (II):

$$\frac{U}{dt^2} = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\begin{vmatrix}(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3), & (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3) \\ (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3), & (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)\end{vmatrix}.$$

Es ist aber, wie aus den aufgestellten Gleichungen zu sehen:

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= n u, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= a, \\ u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 &= a, \\ a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 &= \frac{(n-1)D}{\Delta}, \end{aligned}$$

wenn man der Kürze wegen

$$20. \qquad D = U_{11} a_1^2 + U_{22} a_2^2 + U_{33} a_3^2 + 2\,U_{23} a_2 a_3 + 2\,U_{31} a_3 a_1 + 2\,U_{12} a_1 a_2$$

setzt. Mithin wird:

$$21. \qquad \frac{U}{dt^2} = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\begin{vmatrix} n u, & a \\ a, & \frac{(n-1)D}{\Delta}\end{vmatrix} = \frac{n}{n-1}\,D u - \frac{a^2 \Delta}{(n-1)^2}.$$

Setzt man diesen Werth von U in (8), so erhält man:

$$22. \qquad R = a\left(\frac{a^2 \Delta}{(n-1)^2} - \frac{n}{n-1}\,D u\right) dt^3.$$

Da aber $u = 0$ ist, so reducirt sich die Gleichung $R = 0$, welche in Rücksicht auf die Coordinaten vom Grade $3n - 4$ ist, auf die Gleichung

$$23. \qquad \Delta = 0$$

vom $3(n-2)$ten Grade.

Dieses ist die gesuchte Bedingungsgleichung, welche die Coordinaten eines Punkts der Curve $u = 0$ erfüllen müssen, wenn der Punkt ein Wendepunkt der Curve sein soll.

2.

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 gegebene lineäre Functionen der rechtwinkligen Coordinaten eines beliebig gegebenen Punkts p im Raume. Es seien ferner y_1, y_2, y_3, y_4 dieselben lineären Functionen der rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen anderen Punkts q. Diese gegebenen lineären Functionen der Coordinaten werde ich die Coordinaten der Punkte p und q nennen. Durch u und v bezeichne ich zwei beliebige homogene ganze Functionen der Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Punkts p, respective von den Graden n und m, und setze aus deren partiellen Differentialquotienten u_1, u_2, u_3, u_4 und v_1, v_2, v_3, v_4, nach den Coordinaten des Punkts p genommen, und den 8 beliebig gewählten constanten Grössen $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ folgende Determinante B zusammen:

$$1. \qquad B = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \end{vmatrix}.$$

Die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Punkts p bestimme ich als Functionen der unabhängigen Variabeln t durch die Differentialgleichungen

$$2. \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_2}, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_3}, \quad \frac{dx_4}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_4}.$$

In den drei Integralgleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = a,$$
$$u = b, \qquad v = c$$

dieses Systems von Differentialgleichungen setze ich die willkürliche Constante a gleich einer beliebig gegebenen Grösse, b und c gleich Null. Die vierte Integralgleichung führt die willkürliche Constante, der ich einen beliebigen, aber festen Werth geben will, mit der unabhängigen Variabeln t durch das $+$ Zeichen verbunden ein. Durch diese Bestimmungen rückt der beliebige Punkt p in die Curve doppelter Krümmung, in welcher sich die durch die Gleichungen

$$3. \qquad u = 0, \qquad v = 0$$

gegebenen Oberflächen $n$ter und $m$ter Ordnung schneiden, und man erhält die Coordinaten aller Punkte dieser Curve, wenn man der unabhängigen Variabeln t alle nur möglichen Werthe giebt.

Die Coordinaten des beliebigen Punkts q und dreier unendlich nahe auf einander folgender Punkte der genannten Curve doppelter Krümmung sind nun:

$$\begin{array}{llll} y_1, & y_2, & y_3, & y_4, \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ x_1 + dx_1, & x_2 + dx_2, & x_3 + dx_3, & x_4 + dx_4, \\ x_1 + 2\,dx_1 + d^2x_1, & x_2 + 2\,dx_2 + d^2x_2, & x_3 + 2\,dx_3 + d^2x_3, & x_4 + 2\,dx_4 + d^2x_4. \end{array}$$

Setzt man die Determinante R, gebildet aus diesen Grössen, oder, was dasselbe ist, die Determinante

$$4. \qquad R = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ dx_1, & dx_2, & dx_3, & dx_4 \\ d^2x_1, & d^2x_2, & d^2x_3, & d^2x_4 \end{vmatrix}$$

gleich 0, so erhält man, wenn man den Punkt q mit seinen Coordinaten als variabel betrachtet, die Gleichung

$$5. \qquad R = 0$$

der Schmiegungs-Ebene in dem Punkte p der Curve doppelter Krümmung.

Um R zu transformiren, dienen folgende Gleichungen, welche sich aus den Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_4 x_4 = a$ ergeben:

$$6. \quad \begin{cases} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0, \\ u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 + u_4 dx_4 = 0, \\ u_1 d^2x_1 + u_2 d^2x_2 + u_3 d^2x_3 + u_4 d^2x_4 = -U; \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0, \\ v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 + v_4 dx_4 = 0, \\ v_1 d^2x_1 + v_2 d^2x_2 + v_3 d^2x_3 + v_4 d^2x_4 = -V; \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = a, \\ a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_4 dx_4 = 0, \\ a_1 d^2x_1 + a_2 d^2x_2 + a_3 d^2x_3 + a_4 d^2x_4 = 0; \end{cases}$$

wo U und V die Bedeutung

$$7. \quad \begin{cases} U = u_{11}dx_1^2 + u_{22}dx_2^2 + u_{33}dx_3^2 + u_{44}dx_4^2 + 2u_{12}dx_1dx_2 + 2u_{13}dx_1dx_3 \\ \qquad + 2u_{14}dx_1dx_4 + 2u_{23}dx_2dx_3 + 2u_{24}dx_2dx_4 + 2u_{34}dx_3dx_4, \\ V = v_{11}dx_1^2 + v_{22}dx_2^2 + v_{33}dx_3^2 + v_{44}dx_4^2 + 2v_{12}dx_1dx_2 + 2v_{13}dx_1dx_3 \\ \qquad + 2v_{14}dx_1dx_4 + 2v_{23}dx_2dx_3 + 2v_{24}dx_2dx_4 + 2v_{34}dx_3dx_4 \end{cases}$$

haben und u_{11}, u_{22} ... und v_{11}, v_{22} ... die zweiten partiellen Differentialquotienten der Functionen u und v sind, nach den Coordinaten des Punkts p genommen.

Multiplicirt man die Gleichungen (2) respective mit b_1dt, b_2dt, b_3dt, b_4dt und addirt, so erhält man:

$$b_1dx_1 + b_2dx_2 + b_3dx_3 + b_4dx_4 = Bdt.$$

Es ist aber nach Satz (I)

$$B.R = (b_1dx_1 + b_2dx_2 \ldots)\{(Uv_1 - Vu_1)y_1 + (Uv_2 - Vu_2)y_2 \\ + (Uv_3 - Vu_3)y_3 + (Uv_4 - Vu_4)y_4\}a.$$

Multiplicirt man daher diese Gleichung mit der vorhergehenden, so erhält man, mit Uebergehung der gleichen Factoren auf beiden Seiten,

$$8. \quad R = \{(Uv_1 - Vu_1)y_1 + (Uv_2 - Vu_2)y_2 + (Uv_3 - Vu_3)y_3 + (Uv_4 - Vu_4)y_4\}a\,dt.$$

Diese Form von R zeigt, dass $R = 0$ die Gleichung einer Ebene ist, welche durch die Schnittlinie der in dem Punkte p an die beiden Oberflächen $u = 0$, $v = 0$ gelegten Tangenten-Ebenen hindurchgeht. Denn man erhält alle möglichen Ebenen, welche durch die genannte Schnittlinie, d. i. die Tangente der Curve doppelter Krümmung, hin-

durchgehen, wenn man in der Gleichung $R=0$ den Grössen U und V beliebige Werthe giebt. Unter diesen Ebenen befindet sich auch die Schmiegungs-Ebene der Curve doppelter Krümmung und diese entspricht eben den in (7) angegebenen Werthen von U und V. Es bleibt daher noch übrig, diese Werthe von U und V durch die Coordinaten des Punkts p auszudrücken. Zu diesem Zwecke setze ich in dem Ausdrucke von $\frac{U}{dt^2}$, der sich auch so darstellen lässt:

$$\begin{aligned}\frac{U}{dt^2} = &\left(u_{11}\frac{dx_1}{dt}+u_{12}\frac{dx_2}{dt}+u_{13}\frac{dx_3}{dt}+u_{14}\frac{dx_4}{dt}\right)\frac{dx_1}{dt}\\ &+\left(u_{21}\frac{dx_1}{dt}+u_{22}\frac{dx_2}{dt}+u_{23}\frac{dx_3}{dt}+u_{24}\frac{dx_4}{dt}\right)\frac{dx_2}{dt}\\ &+\left(u_{31}\frac{dx_1}{dt}+u_{32}\frac{dx_2}{dt}+u_{33}\frac{dx_3}{dt}+u_{34}\frac{dx_4}{dt}\right)\frac{dx_3}{dt}\\ &+\left(u_{41}\frac{dx_1}{dt}+u_{42}\frac{dx_2}{dt}+u_{43}\frac{dx_3}{dt}+u_{44}\frac{dx_4}{dt}\right)\frac{dx_4}{dt},\end{aligned}$$

die Werthe von $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots$ aus (2). Hiedurch geht derselbe, wenn man durch G_1, G_2, G_3, G_4 die Determinanten

$$9. \quad \begin{aligned} G_1 &= \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14} \end{vmatrix}, \quad & G_2 &= \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24} \end{vmatrix}, \\ G_3 &= \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34} \end{vmatrix}, \quad & G_4 &= \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

bezeichnet, in

$$10. \quad \frac{U}{dt^2} = G_1\frac{\partial B}{\partial b_1}+G_2\frac{\partial B}{\partial b_2}+G_3\frac{\partial B}{\partial b_3}+G_4\frac{\partial B}{\partial b_4}$$

über.

Dieser Ausdruck von $\frac{U}{dt^2}$ ist vom Grade $3n+2m-6$ in Rücksicht auf die Coordinaten des Punkts p. Ich werde demselben jetzt eine solche Form geben, dass man sehen kann, wie er sich mit Hülfe der

Gleichungen $u = 0$ und $v = 0$ auf den Grad $3n + 2m - 8$ reducirt. Dies wird erreicht werden durch Benutzung der folgenden Systeme von Gleichungen:

$$
11. \quad \begin{cases} (n-1)\, u_1 = u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 + u_{14} x_4, \\ (n-1)\, u_2 = u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + u_{23} x_3 + u_{24} x_4, \\ (n-1)\, u_3 = u_{31} x_1 + u_{32} x_2 + u_{33} x_3 + u_{34} x_4, \\ (n-1)\, u_4 = u_{41} x_1 + u_{42} x_2 + u_{43} x_3 + u_{44} x_4; \end{cases}
$$

$$
12. \quad \begin{cases} \Delta x_1 = (n-1) \{U_{11} u_1 + U_{12} u_2 + U_{13} u_3 + U_{14} u_4\}, \\ \Delta x_2 = (n-1) \{U_{21} u_1 + U_{22} u_2 + U_{23} u_3 + U_{24} u_4\}, \\ \Delta x_3 = (n-1) \{U_{31} u_1 + U_{32} u_2 + U_{33} u_3 + U_{34} u_4\}, \\ \Delta x_4 = (n-1) \{U_{41} u_1 + U_{42} u_2 + U_{43} u_3 + U_{44} u_4\}. \end{cases}
$$

Von diesen Gleichungen drückt das erste System die bekannte Eigenschaft der homogenen Functionen $u_1, u_2, \ldots$ aus; das letzte ist die Auflösung des ersten nach den in ihm explicite vorkommenden Unbekannten, und Δ ist, wie bekannt, die Determinante

$$
13. \quad \Delta = \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34} \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44} \end{vmatrix}.
$$

Ich führe ferner vier neue Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ ein, welche durch die folgenden Gleichungen definirt werden:

$$
14. \quad \begin{cases} (n-1)\, v_1 = u_{11} \beta_1 + u_{12} \beta_2 + u_{13} \beta_3 + u_{14} \beta_4, \\ (n-1)\, v_2 = u_{21} \beta_1 + u_{22} \beta_2 + u_{23} \beta_3 + u_{24} \beta_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}
$$

und löse diese Gleichungen nach den Unbekannten $\beta_1, \beta_2, \ldots$ auf. Dies giebt

$$
15. \quad \begin{cases} \Delta \beta_1 = (n-1) \{U_{11} v_1 + U_{12} v_2 + U_{13} v_3 + U_{14} v_4\}, \\ \Delta \beta_2 = (n-1) \{U_{21} v_1 + U_{22} v_2 + U_{23} v_3 + U_{24} v_4\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}
$$

Endlich bestimme ich vier Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von der Art, dass sie den Gleichungen

$$16.\quad \begin{cases} (n-1)\,a_1 = u_{11}\,\alpha_1 + u_{12}\,\alpha_2 + u_{13}\,\alpha_3 + u_{14}\,\alpha_4, \\ (n-1)\,a_2 = u_{21}\,\alpha_1 + u_{22}\,\alpha_2 + u_{23}\,\alpha_3 + u_{24}\,\alpha_4, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

genügen, und löse diese Gleichungen nach den Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ auf. Dies giebt

$$17.\quad \begin{cases} \varDelta\,\alpha_1 = (n-1)\{U_{11}\,a_1 + U_{12}\,a_2 + U_{13}\,a_3 + U_{14}\,a_4\}, \\ \varDelta\,\alpha_2 = (n-1)\{U_{21}\,a_1 + U_{22}\,a_2 + U_{23}\,a_3 + U_{24}\,a_4\}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die aufgestellten Gleichungen dienen nun zur Transformation der Determinanten $G_1, G_2, \dots$ Denn man wird finden, dass die erste dieser Determinanten, wenn man darin für $u_1, u_2, \dots$ die Werthe aus (11), für $v_1, v_2, \dots$ die Werthe aus (14) und für $a_1, a_2, \dots$ die Werthe aus (16) setzt, nach Satz (I) in das Product

$$\frac{\varDelta}{(n-1)^3}\cdot\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

zerfällt, so dass, wenn man durch C die folgende Determinante bezeichnet:

$$18.\quad C = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \end{vmatrix},$$

$$\frac{\varDelta}{(n-1)^3}\,\frac{\partial C}{\partial c_1} = G_1$$

ist. Auf diese Weise stellen sich die transformirten Determinanten wie folgt dar:

$$19.\quad \begin{cases} G_1 = \dfrac{\varDelta}{(n-1)^3}\,\dfrac{\partial C}{\partial c_1}, \quad G_2 = \dfrac{\varDelta}{(n-1)^3}\,\dfrac{\partial C}{\partial c_2}, \\ G_3 = \dfrac{\varDelta}{(n-1)^3}\,\dfrac{\partial C}{\partial c_3}, \quad G_4 = \dfrac{\varDelta}{(n-1)^3}\,\dfrac{\partial C}{\partial c_4}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe von G_1, G_2, ... in (10), so ergiebt sich

$$20.\qquad \frac{U}{dt^2} = \frac{\varDelta}{(n-1)^3}\left\{\frac{\partial B}{\partial b_1}\frac{\partial C}{\partial c_1} + \frac{\partial B}{\partial b_2}\frac{\partial C}{\partial c_2} + \frac{\partial B}{\partial b_3}\frac{\partial C}{\partial c_3} + \frac{\partial B}{\partial b_4}\frac{\partial C}{\partial c_4}\right\};$$

woraus mit Anwendung des Satzes (II)

$$21.\quad \frac{U}{dt^2} = \frac{\varDelta}{(n-1)^3}\begin{vmatrix} u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots, & u_1\beta_1 + u_2\beta_2 + \cdots, & u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \cdots \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots, & v_1\beta_1 + v_2\beta_2 + \cdots, & v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + \cdots \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots, & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots, & a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots \end{vmatrix}$$

folgt. Setzt man nun, um abzukürzen,

$$22.\quad \begin{cases} M = U_{11}a_1^2 + U_{22}a_2^2 + \cdots \\ N = (U_{11}v_1 + U_{12}v_2 + \cdots)a_1 + \cdots \\ P = U_{11}v_1^2 + U_{22}v_2^2 + U_{33}v_3^2 + U_{44}v_4^2 + 2\,U_{12}v_1v_2 + 2\,U_{13}v_1v_3 \\ \qquad + 2\,U_{14}v_1v_4 + 2\,U_{23}v_2v_3 + 2\,U_{24}v_2v_4 + 2\,U_{34}v_3v_4, \end{cases}$$

so lässt sich die Gleichung (21) wie folgt darstellen:

$$23.\qquad \frac{U}{dt^2} = \frac{\varDelta}{(n-1)^3}\begin{vmatrix} nu, & mv, & a \\ mv, & \frac{(n-1)}{\varDelta}P, & \frac{(n-1)}{\varDelta}N \\ a, & \frac{(n-1)}{\varDelta}N, & \frac{(n-1)}{\varDelta}M \end{vmatrix}.$$

Da aber $u = 0$ und $v = 0$ ist, so wird:

$$24.\qquad \frac{U}{dt^2} = -\frac{a^2 P}{(n-1)^2},$$

welches der gesuchte Ausdruck von $\frac{U}{dt^2}$ ist; vom Grade $3n + 2m - 8$ in Rücksicht auf die Coordinaten des Punkts p der Curve doppelter Krümmung.

Auf dieselbe Weise wird sich auch der Ausdruck $\frac{V}{dt^2}$ transformiren lassen, was

$$25.\qquad \frac{V}{dt^2} = -\frac{a^2 Q}{(m-1)^2}$$

giebt, wo Q eine homogene Function der Coordinaten des Punkts p vom Grade $3m + 2n - 8$ bedeutet, die man aus dem in (22) ange-

gebenen Ausdrucke von P erhält, wenn man die Functionen u und v mit einander vertauscht.

Setzt man endlich diese Werthe von U und V in den in (8) gegebenen Ausdruck für R, *so nimmt die Gleichung der Schmiegungs-Ebene der Curve doppelter Krümmung, in welcher sich die Oberflächen* $u = 0$ *und* $v = 0$ *schneiden, folgende einfache Gestalt an:*

$$26. \quad \frac{Q}{(m-1)^2}(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4) - \frac{P}{(n-1)^2}(v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4) = 0.$$

Diese Gleichung der Schmiegungs-Ebene ist vom Grade $3(n+m-3)$ in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspunkts p. Nimmt man in ihr die Coordinaten des Punkts q als gegeben an, lässt dagegen die Coordinaten des Punkts p beliebig variiren, so stellt die Gleichung (26) eine Oberfläche von der $3(n+m-3)$ten Ordnung dar, welche die gegebene Curve doppelter Krümmung in solchen Punkten schneidet, deren Schmiegungs-Ebenen durch den gegebenen Punkt q hindurchgehen. Hieraus ergiebt sich folgender Lehrsatz:

> *An eine Curve doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt einer Oberfläche nter und einer Oberfläche mter Ordnung entstanden ist, lassen sich von einem beliebigen Punkte ausserhalb der Curve* $3nm(n+m-3)$ *Schmiegungs-Ebenen legen, und die Berührungspunkte liegen auf einer Oberfläche von der* $3(n+m-3)$*ten Ordnung.*

Demnach lassen sich von einem beliebigen Punkte q an eine Curve doppelter Krümmung, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, zwölf Schmiegungs-Ebenen liegen. Die Centralprojection einer solchen Curve doppelter Krümmung auf eine beliebige Ebene ist bekanntlich eine Curve vierter Ordnung. Ihre Wendepunkte sind die Projectionen der Berührungspunkte der zwölf Schmiegungs-Ebenen, welche sich durch das Centrum der Projection an die Curve doppelter Krümmung legen lassen. Eine Curve vierter Ordnung hat aber im Allgemeinen 24 Wendepunkte. Daraus folgt, dass die Projection der Curve doppelter Krümmung nicht eine allgemeine Curve vierter Ordnung sein kann.

Sie hat in der That zwei Doppelpunkte. Um diese zu finden, lege ich durch die Curve doppelter Krümmung eine Oberfläche zweiter Ordnung welche zugleich durch das Centrum der Projection hindurchgeht. Von den beiden geraden Linien, welche sich auf dieser Oberfläche durch das Centrum der Projection legen lassen, schneidet jede die Curve doppelter Krümmung in zwei Punkten, und die Schnittpunkte dieser beiden geraden Linien mit der Projectionsebene werden die gesuchten Doppelpunkte sein. Da nun, wie Plücker richtig bemerkt hat, immer sechs Wendepunkte einer ebenen Curve in einen Doppelpunkt fallen, so verschwinden von den 24 Wendepunkten der projicirten Curve vierter Ordnung zwölf, und es bleiben nur die oben erwähnten zwölf Wendepunkte übrig.

Königsberg, im November 1849.

20.

Ueber die ganzen homogenen Functionen von der dritten und vierten Ordnung zwischen drei Variabeln.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 41, Seite 285—292.]

Im 36. Bande des Crelle'schen Journals S. 172[1]) habe ich eine Eliminationsmethode auseinander gesetzt, um eine in Punktcoordinaten gegebene Gleichung einer Curve dritter Ordnung durch Liniencoordinaten auszudrücken. Diese Methode hat, wie ich sehe, Cayley im Märzhefte des Cambridger Mathematischen Journals vom Jahre 1846 bekannt gemacht und zugleich, nicht ohne Mühe und Kunst, das Resultat der Elimination in seine einfachsten Bestandtheile aufgelöst. Die Methode besteht in der Zurückführung des Problems auf die Elimination von sieben Unbekannten aus sieben lineären homogenen Gleichungen. Einer Ausdehnung auf die Curven vierter Ordnung scheint dieselbe nicht fähig zu sein. Ich werde daher im Folgenden ein anderes, nicht weniger symmetrisches Eliminationsverfahren entwickeln, welches sich mit gleicher Leichtigkeit auf Curven dritter und vierter Ordnung anwenden lässt, und überdies noch den Vortheil hat, dass man bei Curven dritter Ordnung das Endresultat durch Elimination von nur vier Unbekannten aus vier lineären homogenen Gleichungen erhält. Dieses Eliminationsverfahren steht in dem erwähnten Falle zu dem Cayley'schen in demselben Verhältniss, wie das Jacobi'sche Eliminationsverfahren für zwei Gleichungen

---

1) [Seite 187 dieser Ausgabe.]

mit einer Unbekannten zu dem Sylvester'schen, indem auch hier von der zum Theil schon vollführten Elimination ausgegangen wird.

Ich schicke zwei allgemeine Sätze voran, von denen ich im Folgenden Gebrauch machen werde.

1.

Wenn n homogene ganze Functionen gleichen Grades von n Variabeln für ein System von Werthen der Variabeln verschwinden, so verschwinden für dieses System von Werthen nicht allein die Determinante der n Functionen, sondern auch ihre nach den Variabeln genommenen ersten partiellen Differentialquotienten.

Wenn $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ gegebene homogene ganze Functionen vom $p$ten Grade von den Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ bedeuten, so ist bekanntlich:

$$1. \quad \begin{cases} x_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots + x_n \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} = p u_1, \\ x_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + x_n \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} = p u_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1 \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} + \cdots + x_n \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} = p u_n. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Determinante der n Functionen mit Δ, multiplicirt die Gleichungen (1) der Reihe nach mit

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)} = U_1, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)} = U_2, \ldots, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)} = U_n$$

und addirt, so erhält man:

$$2. \quad x_1 \Delta = p\{u_1 U_1 + u_2 U_2 + \cdots + u_n U_n\}.$$

Diese Gleichung beweist, dass die Functionaldeterminante Δ verschwindet, wenn die Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ verschwinden.

Differentiirt man die Gleichung (2) nach x_1, so erhält man:

$$x_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + \Delta = p\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} U_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} U_2 + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_1} U_n\right\}$$
$$+ p\left\{u_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \cdots + u_n \frac{\partial U_n}{\partial x_1}\right\}.$$

Da aber

$$\Delta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} U_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} U_2 + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_1} U_n$$

ist, so wird

3. $$x_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} - (p-1)\Delta = p\left\{u_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \cdots + u_n \frac{\partial U_n}{\partial x_1}\right\}.$$

Diese Gleichung beweist, dass mit $u_1, u_2, \ldots u_n$ und Δ auch $\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}$ verschwindet etc.

Wenn $n-1$ homogene ganze Functionen $p$ten Grades zugleich mit einer homogenen ganzen Function $q$ten Grades von n Variabeln für ein System von Werthen dieser Variabeln verschwinden, so verschwindet auch die Determinante dieser Functionen, und die ersten partiellen Differentialquotienten der Determinante verhalten sich wie die ersten partiellen Differentialquotienten der Function $q$ten Grades.

Wenn $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ homogene ganze Functionen $p$ten Grades und u_n eine homogene ganze Function $q$ten Grades der n Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind, so hat man:

4. $$\begin{cases} x_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = p u_1, \\ x_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = p u_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = q u_n. \end{cases}$$

Es sei, wie vorhin, Δ die Determinante der n Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$. Multiplicirt man nun die Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)} = U_1, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)} = U_2, \cdots, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)} = U_n$$

und addirt, so erhält man

5. $$x_1 \Delta = p\{u_1 U_1 + u_2 U_2 + \cdots + u_n U_n\} + (q-p) u_n U_n;$$

woraus sich zeigt, dass Δ verschwindet, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ verschwinden.

Differentiirt man diese Gleichung nach den Variabeln, so wird:

$$
6. \quad \begin{cases}
x_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} - (p-1)\Delta = p\left\{u_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \cdots + u_n \frac{\partial U_n}{\partial x_1}\right\} \\
\qquad\qquad + (q-p)\left\{u_n \frac{\partial U_n}{\partial x_1} + U_n \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right\}, \\
x_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = p\left\{u_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \cdots + u_n \frac{\partial U_n}{\partial x_2}\right\} \\
\qquad\qquad + (q-p)\left\{u_n \frac{\partial U_n}{\partial x_2} + U_n \frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right\}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_n} = p\left\{u_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_n} + u_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_n} + \cdots + u_n \frac{\partial U_n}{\partial x_n}\right\} \\
\qquad\qquad + (q-p)\left\{u_n \frac{\partial U_n}{\partial x_n} + U_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right\}.
\end{cases}
$$

Setzt man in diese Gleichungen für die Variabeln dasjenige System von Werthen, für welche die n Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ verschwinden, und bezeichnet der Kürze wegen den Ausdruck $\frac{p-q}{x_1} \cdot U_n$ durch λ, so gehen dieselben in folgende über:

$$
7. \quad \begin{cases}
\frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0, \\
\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0, \\
\cdots\cdots \\
\frac{\partial \Delta}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0.
\end{cases}
$$

Es verhalten sich also die partiellen Differentialquotienten der Determinante wie die entsprechenden partiellen Differentialquotienten der Function vom q ten Grade.

2.

Wenn man durch v eine homogene ganze Function dritten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 und durch v_1, v_2, v_3 die partiellen Differentialquotienten dieser Function bezeichnet, so verlangt die Aufgabe *„die in Punktcoordinaten gegebene Gleichung $v = 0$ einer Curve dritter Ordnung*

durch Liniencoordinaten auszudrücken", die Elimination der Variabeln x_1, x_2, x_3, t aus folgenden vier homogenen Gleichungen:

$$8. \quad \begin{cases} v_1 + \alpha_1 \frac{t^2}{2} = 0, \\ v_2 + \alpha_2 \frac{t^2}{2} = 0, \\ v_3 + \alpha_3 \frac{t^2}{2} = 0, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Man hat also drei homogene ganze Functionen $v_1 + \alpha_1 \frac{t^2}{2}$, $v_2 + \alpha_2 \frac{t^2}{2}$, $v_3 + \alpha_3 \frac{t^2}{2}$ der Variabeln x_1, x_2, x_3, t vom zweiten Grade, und eine, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, ersten Grades, welche für ein System von Werthen der Variabeln verschwinden. Bezeichnet man daher die Determinante dieser Functionen mit θ, so ist nach dem in No. 1 bewiesenen zweiten Satze:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \lambda \alpha_1 = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \lambda \alpha_2 = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \lambda \alpha_3 = 0.$$

Um die Determinante jener vier Functionen zu bilden, bezeichne ich die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function v durch v_{11}, v_{12}, . . . und bilde die Determinante $\varDelta$ aus folgenden Componenten:

$$\begin{matrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & \alpha_1, \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & \alpha_2, \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & \alpha_3, \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0. \end{matrix}$$

Diese letztere Determinante ist vom zweiten Grade und homogen, sowohl in Rücksicht auf die Variabeln, als in Rücksicht auf die Grössen α_1, α_2, α_3, und man erhält:

$$\theta = \varDelta t.$$

Setzt man diesen Werth von θ in die angegebenen drei Gleichungen, setzt man ferner $\frac{\lambda}{t} = \mu$ und fügt die letzte Gleichung (8) hinzu, so hat man aus dem System von Gleichungen (8) folgendes System von Gleichungen abgeleitet:

$$9. \quad \begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + \mu \alpha_1 = 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} + \mu \alpha_2 = 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} + \mu \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind aber lineäre homogene Gleichungen in Rücksicht auf die Variabeln x_1, x_2, x_3, μ. Das Resultat der Elimination dieser Variabeln wird die gesuchte homogene Gleichung vom sechsten Grade in Rücksicht auf die Liniencoordinaten α_1, α_2, α_3 sein.

3.

Wenn v eine gegebene homogene Function vierten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 ist und v_1, v_2, v_3 die partiellen Differentialquotienten dieser Function bedeuten, so verlangt die Aufgabe „*die in Punktcoordinaten gegebene Gleichung* $v = 0$ *einer Curve vierter Ordnung durch Liniencoordinaten auszudrücken*“, die Elimination der Variabeln x_1, x_2, x_3, t aus folgenden vier Gleichungen:

$$10. \quad \begin{cases} v_1 + \alpha_1 \frac{t^3}{3} = 0, \\ v_2 + \alpha_2 \frac{t^3}{3} = 0, \\ v_3 + \alpha_3 \frac{t^3}{3} = 0, \end{cases}$$

$$a = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

Um diese Elimination auf die aus lineären Gleichungen zurückzuführen, bemerke ich, dass man drei homogene Functionen $v_1 + \alpha_1 \frac{t^3}{3}$, $v_2 + \alpha_2 \frac{t^3}{3}$, $v_3 + \alpha_3 \frac{t^3}{3}$ der Variabeln x_1, x_2, x_3, t dritten Grades hat, und eine, nämlich a, ersten Grades, welche für ein System von Werthen dieser Variabeln verschwinden. Bezeichnet man daher die Determinante dieser Functionen durch θ, so hat man nach dem in No. 1 bewiesenen zweiten Satze:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \lambda \alpha_1 = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \lambda \alpha_2 = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \lambda \alpha_3 = 0.$$

Die Determinante $\varDelta$ der Grössen

$$\begin{matrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & \alpha_1, \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & \alpha_2, \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & \alpha_3, \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0 \end{matrix}$$

unterscheidet sich von der Determinante θ nur durch den Factor t^2, so dass

$$\theta = \varDelta t^2$$

ist. Setzt man daher diesen Werth von θ in die drei vorhergehenden Gleichungen, so gehen dieselben, wenn $\frac{\lambda}{t^2} = \mu$ ist, in

$$11. \qquad \begin{cases} \frac{\partial \varDelta}{\partial x_1} + \mu \alpha_1 = 0, \\ \frac{\partial \varDelta}{\partial x_2} + \mu \alpha_2 = 0, \\ \frac{\partial \varDelta}{\partial x_3} + \mu \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

über. Mit diesen Gleichungen bestehen auch noch folgende, aus $a = 0$ abgeleitete Gleichungen:

$$12. \qquad \begin{cases} a x_1^2 = 0, & a x_2^2 = 0, & a x_3^2 = 0, \\ a x_2 x_3 = 0, & a x_3 x_1 = 0, & a x_1 x_2 = 0. \end{cases}$$

Entwickelt man nun die Gleichungen (10), (11) und (12), so wird man finden, dass diese zwölf zugleich bestehenden Gleichungen lineär, und in Rücksicht auf die zwölf Grössen x_1^3, x_2^3, x_3^3, $x_1^2 x_2$, $x_1^2 x_3$, $x_2^2 x_1$, $x_2^2 x_3$, $x_3^2 x_1$, $x_3^2 x_2$, $x_1 x_2 x_3$, t^3, μ homogen sind. Das Resultat der Elimination aus diesen lineären Gleichungen wird also die gesuchte Gleichung in den Liniencoordinaten α_1, α_2, α_3 sein; welche, wie leicht zu sehen, homogen und vom zwölften Grade ist.

4.

Die Aufgabe *„die Bedingungsgleichung zu finden, welche erfüllt werden muss, wenn eine Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt haben soll“*, führt auf die Elimination dreier Variabeln aus drei homogenen Gleichungen dritten Grades. Auch diese Elimination lässt sich auf die Elimination aus lineären Gleichungen wie folgt zurückführen.

Wenn

13. $$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0$$

drei homogene Gleichungen dritten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 sind, so hat man drei homogene Functionen v_1, v_2, v_3 dritten Grades, die für ein System von Werthen der Variabeln verschwinden. Es verschwinden daher, nach dem ersten Satze in No. 1, nicht allein die Determinante w, gebildet aus den Grössen

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \end{array}$$

sondern auch die partiellen Differentialquotienten dieser Determinante. Aus den obigen drei Gleichungen ergeben sich also folgende homogene Gleichungen fünften Grades:

14. $$\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0.$$

Wenn man zu diesen drei Gleichungen noch die achtzehn Gleichungen fünften Grades hinzufügt, welche aus den drei Gleichungen (13) durch Multiplication mit den Producten x_1^2, x_2^2, x_3^2, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$ entstehen, so hat man 21 homogene Gleichungen fünften Grades. Entwickelt man diese und betrachtet die 21 verschiedenen Producte der Variabeln von der fünften Dimension, aus welchen die verschiedenen Glieder dieser Gleichungen bestehen, als die Unbekannten, so hat man 21 lineäre homogene Gleichungen. Das Resultat der Elimination dieser Unbekannten wird zugleich das Resultat der Elimination der Variabeln aus den Gleichungen (13) sein: eine homogene Gleichung vom 27. Grade in Rücksicht auf die Coëfficienten in den Gleichungen (13).

Anmerkung. Wenn die Curve nur von der dritten Ordnung ist, in welchem Falle die Gleichungen (13 und 14) von der zweiten Ordnung sind, genügen diese Gleichungen, um aus ihnen die Producte x_1^2, x_2^2, x_3^2, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$ als aus lineären Gleichungen zu eliminiren; woraus denn eine homogene Gleichung vom zwölften Grade in Rücksicht auf die Coëfficienten in den Gleichungen (13) sich ergiebt.

5.

Die Gleichung der Curve 14. Ordnung zu finden, welche eine gegebene Curve $v = 0$ 4. Ordnung in den Berührungspunkten der Doppeltangenten schneidet, ist eine Aufgabe, deren Lösung ich in der Abhandlung „Ueber Curven 3. Ordnung etc." (Crelle's Journal Bd. 36 S. 163)[1]) dadurch angebahnt habe, dass ich die Gleichung einer solchen Curve vom 16. Grade, nämlich die Gleichung

$$15. \qquad 3\, Q_2\, Q_4 - Q_3\, Q_3 = 0,$$

aufstellte, welche noch mit Hülfe der Gleichung der Curve $v = 0$ um zwei Einheiten zu erniedrigen blieb.

Ich behalte die dort gebrauchte Bezeichnung hier bei, nämlich $n = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $x_3 = 1$, und bezeichne der Kürze wegen die partiellen Differentialquotienten von w, gleich wie die von v, durch Indices. Dann ergeben sich aus den Formeln (XX) für die Grössen Q folgende Werthe:

$$\begin{aligned} 9\, Q_2 &= w, \\ 9\, Q_3 &= w_1 v_2 - w_2 v_1, \\ 9\, Q_4 &= \{w_{11} v_2^2 - 2\, w_{12} v_1 v_2 + w_{22} v_1^2\} - \tfrac{2}{3}\{w_1 V_{13} + w_2 V_{23} + w_3 V_{33}\} + 2\, w\, V_{33}. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Gleichung $v = 0$ und mit Berücksichtigung der bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen kann man dem Ausdrucke $(9\, Q_3)^2$ folgende Gestalt geben:

$$\begin{aligned} (9\, Q_3)^2 = &- 4\, w^2 V_{33} + \tfrac{4}{3}\{w_1 V_{13} + w_2 V_{23} + w_3 V_{33}\}\, w \\ &- \tfrac{1}{9}\{w_1^2 V_{11} + w_2^2 V_{22} + w_3^2 V_{33} + 2\, w_2 w_3 V_{23} + 2\, w_3 w_1 V_{31} + 2\, w_1 w_2 V_{12}\}. \end{aligned}$$

Ebenso wird:

$$\begin{aligned} \{w_{11} v_2^2 - 2\, w_{12} v_1 v_2 + w_{22} v_1^2\} = &\tfrac{10}{9}\{- 3\, w\, V_{33} + (w_1 V_{13} + w_2 V_{23} + w_3 V_{33})\} \\ &- \tfrac{1}{9}\{w_{11} V_{11} + w_{22} V_{22} + w_{33} V_{33} + 2\, w_{23} V_{23} + 2\, w_{31} V_{31} + 2\, w_{12} V_{12}\}. \end{aligned}$$

Mithin ist

$$\begin{aligned} 9\, Q_4 = &- \tfrac{4}{3}\, w\, V_{33} + \tfrac{4}{9}(w_1 V_{13} + w_2 V_{23} + w_3 V_{33}) \\ &- \tfrac{1}{9}\{w_{11} V_{11} + w_{22} V_{22} + w_{33} V_{33} + 2\, w_{23} V_{23} + 2\, w_{31} V_{31} + 2\, w_{12} V_{12}\}. \end{aligned}$$

---

1) [Seite 177 dieser Ausgabe.]

Setzt man diese Werthe der Grössen Q in die Gleichung (15), so erhält man, indem sich die Glieder von der 16. und 15. Ordnung aufheben, die gesuchte Gleichung vom 14. Grade; nämlich:

$$16. \quad \left.\begin{array}{l} \{w_1^2 V_{11} + w_2^2 V_{22} + w_3^2 V_{33} + 2\,w_2 w_3 V_{23} + 2\,w_3 w_1 V_{31} + 2\,w_1 w_2 V_{12}\} \\ -\,3\,w\,\{w_{11} V_{11} + w_{22} V_{22} + w_{33} V_{33} + 2\,w_{23} V_{23} + 2\,w_{31} V_{31} + 2\,w_{12} V_{12}\} \end{array}\right\} = 0.$$

Dieses ist also die Gleichung der Curve, welche die gegebene Curve $v = 0$ 4. Ordnung in den 56 Berührungspunkten der Doppeltangenten schneidet. In ihr bedeuten die Grössen w die partiellen Differentialquotienten der Determinante, welche aus den partiellen Differentialquotienten

$$\begin{array}{ccc} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33} \end{array}$$

der Function v gebildet ist, und die Grössen V haben folgende Werthe:

$$\begin{array}{ll} V_{11} = v_{22} v_{33} - v_{23}^2, & V_{23} = v_{12} v_{13} - v_{11} v_{23}, \\ V_{22} = v_{33} v_{11} - v_{31}^2, & V_{31} = v_{23} v_{21} - v_{22} v_{31}, \\ V_{33} = v_{11} v_{22} - v_{12}^2, & V_{12} = v_{31} v_{32} - v_{33} v_{12}. \end{array}$$

Königsberg, im Januar 1850.

21.

Ueber die Bedingung, unter welcher eine homogene ganze Function von n unabhängigen Variabeln durch lineäre Substitutionen von n andern unabhängigen Variabeln auf eine homogene Function sich zurückführen lässt, die eine Variable weniger enthält. [1]

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 42, Seite 117—124.]

Es sei u eine beliebige homogene ganze Function $m$ter Ordnung von den n Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$, und $u_1, u_2, \dots u_n$ seien die ersten, $u_{11}, u_{12}, \dots u_{22}, \dots u_{nn}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function nach den Variabeln genommen.

Durch die lineären Substitutionen:

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + \cdots + a_n^\varkappa y_n,$$

wo für $\varkappa$ die Zahlen $1, 2, \dots n$ zu setzen sind, geht die Function u in eine homogene Function $m$ter Ordnung von den neuen Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$ über, deren erste und zweite partielle Differentialquotienten, nach den neuen Variabeln genommen, durch $u^1, u^2, \dots u^n$ und $u^{11}, u^{12}, \dots u^{22}, \dots u^{nn}$ ausgedrückt werden sollen.

Bezeichnet man hierauf die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten

$$\begin{matrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots \\ u_{21}, & u_{22}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

1) [Vgl. zu dieser Abhandlung die Note zu No. 21 und No. 30 am Schlusse des Bandes.]

gebildete Determinante, welche *Determinante der Function u in Rücksicht auf die Variabeln* $x_1, x_2, \ldots$ heissen soll, durch $\triangle$; ferner die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten

$$\begin{array}{l} u^{11},\ u^{12},\ \ldots \\ u^{21},\ u^{22},\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

gebildete Determinante, welche *Determinante der Function u in Rücksicht auf die Variabeln* $y_1, y_2, \ldots$ heissen soll, durch ∇; endlich die aus den n^2 Coëfficienten $a_\lambda^\varkappa$ der Substitutionen gebildete Determinante durch r, so ist

$$\triangle = r^2 \triangle.$$

In der That: differentiirt man die Function u nach der Variabeln $y_\varkappa$, indem man die Variabeln x als Functionen der y betrachtet, wie sie durch die Substitutionen gegeben sind, so erhält man

$$u^\varkappa = u_1 a_\varkappa^1 + u_2 a_\varkappa^2 + \cdots + u_n a_\varkappa^n,$$

und, wenn man nochmals nach x_λ differentiirt:

$$\frac{\partial u^\varkappa}{\partial x_\lambda} = u_{1\lambda} a_\varkappa^1 + u_{2\lambda} a_\varkappa^2 + \cdots + u_{n\lambda} a_\varkappa^n.$$

Derselbe Ausdruck findet sich aber auch, wenn man u_λ nach $y_\varkappa$ differentiirt. Man kann daher $\frac{\partial u^\varkappa}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial y_\varkappa} = u_\lambda^\varkappa$ setzen, und diese Gleichung geht, mit Rücksicht auf die Bezeichnung, in

$$u_\lambda^\varkappa = u_{1\lambda} a_\varkappa^1 + u_{2\lambda} a_\varkappa^2 + \cdots + u_{n\lambda} a_\varkappa^n$$

über.

Es sei nun D die aus den n^2 Grössen $u_\lambda^\varkappa$ gebildete Determinante. Dann ist nach dem Hauptsatze der Determinantentheorie:

$$D = r \triangle.$$

Differentiirt man die obige Gleichung, durch welche $u^\varkappa$ ausgedrückt wird, nach y_λ, so erhält man:

$$u^{\varkappa\lambda} = u_1^\lambda a_\varkappa^1 + u_2^\lambda a_\varkappa^2 + \cdots + u_n^\lambda a_\varkappa^n,$$

und die aus den n^2 Grössen $u^{\varkappa\lambda}$ gebildete Determinante $\triangle$ wird:

$$\triangle = r D = r^2 \triangle.$$

Diese Gleichung, welche ich schon im 28. Bde. S. 89 des Crelle'schen Journals [1]) bewiesen habe, scheint wegen der häufigen Anwendungen, die davon gemacht werden können, wichtig genug, um sie auch, wie folgt, als Lehrsatz auszusprechen.

Lehrsatz 1.

Wenn die n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ lineäre Functionen der n unabhängigen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ von der Form:

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + \cdots + a_n^\varkappa y_n$$

sind, so ist die Determinante einer gegebenen homogenen ganzen Function der ersten Variabeln gleich der Determinante derselben Function in Rücksicht auf die andern Variabeln, dividirt durch das Quadrat der Determinante, gebildet aus den n^2 Coëfficienten, mit welchen die Variabeln $y_1, y_2, \ldots$ in den Functionen $x_1, x_2 \ldots$ multiplicirt sind.

Aus diesem Lehrsatze ergiebt sich folgender

Lehrsatz 2.

Wenn eine homogene ganze Function der n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die Substitutionen:

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + \cdots + a_n^\varkappa y_n$$

in eine Function der Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ übergeht, in welcher eine dieser Variabeln fehlt, so ist die Determinante dieser Function in Rücksicht auf die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ identisch gleich 0.

Denn hat die Function u die Eigenschaft, dass sie durch die angegebenen Substitutionen in eine Function der Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ übergeht, in welcher die letzte Variable y_n fehlt, so wird $\triangle$ identisch gleich 0, weil die Componenten $u^{1n} = u^{2n} = \cdots = u^{nn} = 0$ sind. Mithin wird auch $\triangle$ identisch gleich 0, da r nicht verschwinden kann, indem die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ von einander unabhängig sind.

---

1) [Seite 114 dieser Ausgabe.]

Schwieriger ist der Beweis des umgekehrten

Lehrsatzes 3.

Wenn die Determinante einer homogenen ganzen Function der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ identisch verschwindet, so lässt sich die Function durch lineäre Substitutionen von der Form

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + \cdots + a_n^\varkappa y_n$$

auf eine Function der Variabeln $y_1, y_2, \dots$ zurückführen, in welcher eine dieser Variabeln fehlt.

Da die homogene ganze Function u, der Voraussetzung nach, von der Ordnung m ist, so ist:

$$\begin{array}{l} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + \cdots + u_{1n} x_n = (m-1) u_1 \\ u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + \cdots + u_{2n} x_n = (m-1) u_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n1} x_1 + u_{n2} x_2 + \cdots + u_{nn} x_n = (m-1) u_n . \end{array}$$

Diese Gleichungen nach $x_1, x_2, \dots x_n$ geben, insofern die Variabeln links in den Gleichungen explicite vorkommen, aufgelöst, Gleichungen von der Form

$$\begin{array}{l} \dfrac{\triangle x_1}{m-1} = U_{11} u_1 + U_{12} u_2 + \cdots + U_{1n} u_n \\ \dfrac{\triangle x_2}{m-1} = U_{21} u_1 + U_{22} u_2 + \cdots + U_{2n} u_u \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\triangle x_n}{m-1} = U_{n1} u_1 + U_{n2} u_2 + \cdots + U_{nn} u_n , \end{array}$$

in welchen $\triangle$ die Determinante der Function u bedeutet, die eine homogene ganze Function von der Ordnung $n(m-2)$ ist, und wo die Grössen $U_{\varkappa\lambda} = U_{\lambda\varkappa}$ homogene ganze Functionen von der $(n-1)(m-2)$ten Ordnung sind, welche, wie bekannt, auch durch Differentiation der Determinante nach den Componenten, in der Art abgeleitet werden können, dass:

$$U_{\varkappa\varkappa} = \frac{\partial \triangle}{\partial u_{\varkappa\varkappa}}, \quad 2\, U_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial \triangle}{\partial u_{\varkappa\lambda}}$$

ist.

Setzt man die Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_n$ aus dem ersten Systeme von Gleichungen in das zweite, so erhält man, durch Gleichstellung der Coëfficienten gleicher Variabeln auf beiden Seiten, ein System von n^2 Gleichungen, welche sämmtlich in folgenden beiden

$$\triangle = U_{1\varkappa} u_{1\varkappa} + U_{2\varkappa} u_{2\varkappa} + \cdots + U_{n\varkappa} u_{n\varkappa}$$
$$0 = U_{1\varkappa} u_{1\lambda} + U_{2\varkappa} u_{2\lambda} + \cdots + U_{n\varkappa} u_{n\lambda}$$

inbegriffen sind, in welchen $\varkappa$ und λ die Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeuten. Ich bemerke noch, dass diese Gleichungen, gleich wie die beiden vorhergehenden Systeme, *identische* Gleichungen sind, welche für alle Werthe der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ erfüllt werden.

Man nehme nun an, dass die Function u die in dem letzten Lehrsatze bezeichnete Eigenschaft habe, und dass die Determinante $\triangle$ dieser Function identisch verschwinde. Alsdann folgt aus den beiden letzten Gleichungen die identische Gleichung

$$0 = U_{1\varkappa} u_{1\lambda} + U_{2\varkappa} u_{2\lambda} + \cdots U_{n\varkappa} u_{n\lambda},$$

in welcher $\varkappa$ und λ die Zahlen $1, 2, \ldots n$, auch $\varkappa = \lambda$ sind. Aus dieser Gleichung geht ein ganzes System von n Gleichungen hervor, wenn man für λ nach einander $1, 2, \ldots n$ setzt. Betrachtet man in diesen n Gleichungen die Grössen $U_{1\varkappa}, U_{2\varkappa}, \ldots U_{n\varkappa}$ als die Unbekannten, so ist eine von den Gleichungen, wegen $\triangle = 0$, eine Folge der übrigen $n-1$ Gleichungen; welche dann dazu dienen können, die Verhältnisse der Unbekannten zu finden. Setzt man in diesem Systeme von n Gleichungen λ statt $\varkappa$, so erhält man ein zweites System von n Gleichungen, von welchem dasselbe gilt, wenn man in diesem Systeme $U_{1\lambda}, U_{2\lambda}, \ldots U_{n\lambda}$ als die Unbekannten betrachtet. Da sich aber beide Systeme nur in der Bezeichnung der Unbekannten unterscheiden, so müssen die ersten Unbekannten den letzteren proportional sein. Mithin wird, wenn man durch π einen noch zu bestimmenden Factor bezeichnet:

$$U_{1\varkappa} = \pi U_{1\lambda}, \quad U_{2\varkappa} = \pi U_{2\lambda}, \quad \ldots \quad U_{n\varkappa} = \pi U_{n\lambda}.$$

Dieser Factor π wird im Allgemeinen eine gebrochene Function der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ sein können; wir werden indess nachweisen, dass derselbe eine *Constante* sein muss.

In der That: dividirt man die $\varkappa$te, zuletzt aufgestellte Gleichung durch die λte Gleichung, so erhält man:

$$U_{\varkappa\varkappa} U_{\lambda\lambda} = U^2_{\varkappa\lambda};$$

welche Gleichung beweist, dass $U_{\varkappa\varkappa}$, $U_{\lambda\lambda}$, $U_{\varkappa\lambda}$ einen gemeinschaftlichen Factor M vom $(n-1)(m-2)$ten Grade haben müssen. Diesen gemeinschaftlichen Factor haben demnach auch alle die Grössen U_{11}, U_{12}, ... U_{22}, ... U_{nn}. Bezeichnet man daher durch a_{11}, a_{12}, ... a_{22}, ... a_{nn} die constanten Factoren, mit welchen der Factor M zu multipliciren ist, um jene Grössen zu finden, so ergiebt sich

$$U_{11} = a_{11} M, \quad U_{12} = a_{12} M, \quad \ldots \quad U_{22} = a_{22} M, \quad \ldots \quad U_{nn} = a_{nn} M,$$

und die vorhergehende Gleichung geht, wenn man diese Werthe setzt, mit Weglassung der Factoren M, in

$$a_{\varkappa\varkappa} a_{\lambda\lambda} = a^2_{\varkappa\lambda}$$

über. Führt man nun, der Bequemlichkeit wegen, statt der n Constanten $a_{1\varkappa}$ die neuen Constanten a_1, a_2, ... a_n ein, indem man

$$a_{11} = a_1 a_1, \quad a_{12} = a_1 a_2, \quad a_{13} = a_1 a_3, \quad \ldots \quad a_{1n} = a_1 a_n$$

setzt, so folgt aus der letzten Gleichung, wenn man $\lambda = 1$ setzt:

$$a_{\varkappa\varkappa} = a^2_{\varkappa};$$

und da $U_{11} : U_{21} : U_{\varkappa 1} = U_{1\lambda} : U_{2\lambda} : U_{\varkappa\lambda}$ ist, so ist auch $a_{11} : a_{21} : a_{\varkappa 1} = a_{1\lambda} : a_{2\lambda} : a_{\varkappa\lambda}$; woraus

$$a_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa} a_{\lambda}$$

folgt. Diese Bemerkungen fasse ich zusammen im folgenden

Lehrsatz 4.

Wenn die Determinante einer homogenen ganzen Function u der unabhängigen Variabeln x_1, x_2, ... x_n, $m$ten Grades, identisch verschwindet, so haben die partiellen Differentialquotienten U_{11}, $2\,U_{12}$, $2\,U_{13}$, ... U_{22}, ... U_{nn} der Determinante (nach den Componenten genommen) einen, allen gemeinschaftlichen Factor M vom $(n-1)(m-2)$ten Grade, und die genannten partiellen Differentialquotienten stellen sich unter der Form

$$U_{\varkappa\varkappa} = a_{\varkappa} a_{\varkappa} M, \qquad 2\,U_{\varkappa\lambda} = 2\,a_{\varkappa} a_{\lambda} M$$

dar.

Setzt man diese Werthe der partiellen Differentialquotienten der Determinante in die identische Gleichung

$$\frac{\triangle x_1}{m-1} = U_{11}u_1 + U_{12}u_2 + \cdots + U_{1n}u_n$$

und erwägt, dass $\triangle$ identisch verschwindet, so erhält man, nach der Division mit a_1, die identische Gleichung

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = 0,$$

welche folgenden Lehrsatz giebt:

Lehrsatz 5.

Wenn die Determinante einer homogenen ganzen Function von n Variabeln identisch verschwindet, so giebt es immer n Constanten, mit welchen die ersten partiellen Differentialquotienten der Function zu multipliciren sind, damit die Summe dieser Producte identisch verschwinde.

Wie diese n Constanten bestimmt werden können, ist aus dem Lehrsatz 4 zu entnehmen.

Ich behaupte nun, dass durch die Substitutionen:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + \lambda a_1 \\ x_2 &= z_2 + \lambda a_2 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n &= z_n + \lambda a_n, \end{aligned}$$

wo $z_1, z_2, \ldots z_n$ beliebige lineäre Functionen der $n-1$ neuen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ von der Form $z_\varkappa = b_1^\varkappa y_1 + b_2^\varkappa y_2 + \cdots + b_{n-1}^\varkappa y_{n-1}$ sind, und λ die $n$te Variable ist, aus der Function u die letzte Variable ganz verschwindet. In der That: macht man in der Function u die angegebenen Substitutionen, so erhält man durch die Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von λ:

$$u = w + \lambda D w + \frac{\lambda^2}{1.2} D^2 w + \cdots + \frac{\lambda^m}{1.2 \ldots m} D^m w.$$

In dieser Entwickelung bedeuten w und Dw die Ausdrücke, in welche u und $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$ übergehen, wenn man in denselben $z_1, z_2, \ldots z_n$ statt $x_1, x_2, \ldots x_n$ setzt. Ferner ist:

$$D^2 w = \frac{\partial D w}{\partial z_1} a_1 + \frac{\partial D w}{\partial z_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial D w}{\partial z_n} a_n,$$
$$D^3 w = \frac{\partial D^2 w}{\partial z_1} a_1 + \frac{\partial D^2 w}{\partial z_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial D^2 w}{\partial z_n} a_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D^m w = \frac{\partial D^{m-1} w}{\partial z_1} a_1 + \frac{\partial D^{m-1} w}{\partial z_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial D^{m-1} w}{\partial z_n} a_n.$$

Da aber der Ausdruck $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$ identisch verschwindet, so verschwindet auch Dw identisch. Verschwindet aber Dw identisch, so verschwinden auch die partiellen Differentialquotienten dieser Function, nach $z_1, z_2, \ldots$ genommen, identisch: mithin auch $D^2 w$. Verschwindet ferner $D^2 w$ identisch, so verschwinden aus demselben Grunde auch $D^3 w$, $D^4 w$, ... $D^m w$. Es fallen also aus der Entwickelung von u nach Potenzen der $n$ten Variabeln λ diese gänzlich weg, und es wird durch die angegebenen Substitutionen $u = w$ zu einer homogenen Function der $n-1$ Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$.

Hierdurch ist nicht allein der Lehrsatz 3 bewiesen, sondern auch der Weg angedeutet, auf welchem man zu den lineären Substitutionen gelangt, durch die eine gegebene homogene ganze Function auf eine andere zurückgeführt werden kann, welche eine Variable weniger enthält; unter der Voraussetzung, dass dies bei der gegebenen Function möglich ist.

Für die Fälle $n = 3$ oder $n = 4$ ergeben sich folgende bemerkenswerthe *geometrische* Sätze:

Lehrsatz 6.

Wenn $u = 0$ die homogene Gleichung einer ebenen *Curve* $m$ter Ordnung zwischen drei Linearcoordinaten bedeutet, so ist die Bedingung, dass diese Curve m von einem und demselben Punkte ausgehende gerade Linien vorstelle, das identische Verschwinden der Determinante $\triangle$ der Function u.

Lehrsatz 7.

Wenn $u = 0$ die homogene Gleichung einer *Oberfläche* $m$ter Ordnung zwischen vier Linearcoordinaten bedeutet, so ist die Bedingung, dass diese Oberfläche ein Kegel sei, das identische Verschwinden der Determinante $\triangle$ der Function u.

Königsberg, im März 1851.

22.

Ueber die geometrische Bedeutung der lineären Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten einer Gleichung zweiten Grades.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 45, Seite 82—90.]

[Eine Bearbeitung in französischer Sprache erschien in den Nouvelles Annales de mathématiques Band 14 (1855), Seite 122—129 unter dem Titel: Interprétation géométrique d'une rélation linéaire entre les coefficients de l'équation du second degré. D'après M. Otto Hesse, professeur à l'Université de Koenigsberg.]

1.

Wenn $u = 0$ eine lineäre Gleichung ist, mit einer Variabeln, für welche das geometrische Bild bekanntlich ein Punkt auf einer gegebenen geraden Linie ist, so wird dieser Punkt zu einem ganz bestimmten Punkt, wenn zwischen den noch unbestimmt angenommenen Coëfficienten der Gleichung $u = 0$ eine lineäre homogene Bedingungsgleichung stattfindet. Enthält die lineäre Gleichung $u = 0$ zwei Variabeln, so weiss man, dass alle durch sie dargestellten geraden Linien durch einen und denselben Punkt gehen, wenn zwischen den Coëfficienten in der Gleichung $u = 0$ eine lineäre homogene Bedingungsgleichung stattfindet. Ebenso gehen alle Ebenen durch einen und denselben Punkt, wenn die Coëfficienten in der Gleichung der Ebene einer homogenen Bedingungsgleichung genügen.

Wenn $u = 0$ die Gleichung einer Curve oder Oberfläche zweiten Grades bedeutet, und man setzt in derselben für die variabeln Coordinaten die Coordinaten eines bestimmten Punktes, so erhält man eine lineäre Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der Gleichung $u = 0$,

welche ausdrückt, dass alle Curven oder Oberflächen $u = 0$, welche der genannten Bedingungsgleichung genügen, durch einen und denselben Punkt hindurchgehen. Diese Bedingungsgleichung ist aber nicht allgemein, weil die Coëfficienten in ihr nicht von einander unabhängig sind. Ich werde in Folgendem die geometrische Bedeutung einer allgemeinen linearen Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten einer Gleichung zweiten Grades entwickeln.

Eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten:

$$u = x^2 + mx + n = 0,$$

deren Wurzeln a, b sein sollen, stellt auf einer gegebenen geraden Linie zwei Punkte a, b mit den Abscissen a, b dar. Soll dieses Punktenpaar mit einem andern, auf gleiche Weise bezeichneten Punktenpaare α, β derselben geraden Linie *harmonisch* sein, so muss der Gleichung

$$ab - \tfrac{1}{2}(a + b)(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 0$$

genügt werden; oder, wenn man für $a + b$ und ab ihre Werthe setzt, der Gleichung

$$n + m \cdot \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 0.$$

Diese Gleichung ist nun eine allgemeine *lineäre* zwischen den Coëfficienten der Gleichung $u = 0$, wenn man α und β unbestimmt lässt. Daraus ergiebt sich folgender Satz:

> *Alle Gleichungen zweiten Grades mit einer Variabeln, deren Coëfficienten einer gegebenen lineären Bedingungsgleichung genügen, sind die analytischen Ausdrücke von Punktenpaaren auf einer und derselben geraden Linie, welche mit einem gegebenen Punktenpaare harmonisch sind.*

Jede drei solcher Punktenpaare bilden also eine Involution von 6 Punkten.

2.

Um die geometrische Bedeutung einer lineären Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der Gleichung einer Curve oder Oberfläche zweiter Ordnung zu ermitteln, werde ich mich eines analytischen Satzes bedienen, dessen Beweis ich voranschicke.

Es sei v eine beliebige homogene Function zweiten Grades der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, und dann seien $v_1, v_2, \ldots$ die ersten, und v_{11}, $v_{12}, \ldots$ die zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function, nach den Variabeln genommen. Unter dieser Voraussetzung ist bekanntlich

$$v_k = v_{1k}x_1 + v_{2k}x_2 + \cdots + v_{nk}x_n;$$

woraus ein ganzes System von n Gleichungen hervorgeht, wenn man für k die Zahlen 1, 2, ... n setzt. Durch Auflösung dieses Systems lineärer Gleichungen nach den Variabeln erhält man Gleichungen von der Form

$$\Delta . x_k = V_{1k}v_1 + V_{2k}v_2 + \cdots + V_{nk}v_n,$$

in denen bekanntlich $V_{k\lambda} = V_{\lambda k}$ ist, weil $v_{k\lambda} = v_{\lambda k}$ ist, und Δ die *Determinante* bedeutet, gebildet aus den n^2 zweiten partiellen Differentialquotienten von v. Zwischen den Coëfficienten in den beiden angegebenen Systemen hat man die Relationen

$$0 = v_{1k}V_{1\lambda} + v_{2k}V_{2\lambda} + \cdots + v_{nk}V_{n\lambda},$$
$$\Delta = v_{1k}V_{1k} + v_{2k}V_{2k} + \cdots + v_{nk}V_{nk},$$

welche sich wie folgt wiedergeben lassen:

Der Ausdruck $v_k x_\lambda$ verschwindet, wenn man in seiner Entwickelung $V_{11}, V_{12}, \ldots V_{22}, \ldots$ statt der Producte $x_1x_1, x_1x_2, \ldots x_2x_2, \ldots$ *setzt; und der Ausdruck $v_k x_k$ nimmt den Werth Δ an.*

Wenn nun w eine andere homogene Function zweiter Ordnung von denselben Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist und $w_1, w_2, \ldots w_n$ die ersten partiellen Differentialquotienten dieser Function sind, so ergiebt sich aus der eben gemachten Bemerkung folgender Satz:

Der Ausdruck $v_k w_\lambda - v_\lambda w_k$ verschwindet, wenn man in der Entwickelung desselben $V_{11}, V_{12}, \ldots V_{22}, \ldots$ statt der Producte x_1x_1, $x_1x_2, \ldots x_2x_2, \ldots$ setzt.

3.

Wenn $n = 3$ und $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ die Coordinaten eines variabeln Punktes bedeuten, so sind

$$v = 0, \quad w = 0$$

die Gleichungen von irgend zwei Kegelschnitten, und

$$v + \lambda w = 0$$

ist die Gleichung jedes beliebigen Kegelschnitts, der durch die 4 Schnittpunkte der beiden ersteren hindurchgeht. Da nun durch 4 Punkte drei verschiedene Linienpaare gelegt werden können, so werden sich drei Werthe von λ angeben lassen, für welche der Ausdruck $v + \lambda w$ in zwei lineäre Factoren zerfällt. In der Voraussetzung, dass x_1, x_2, x_3 die Werthe der Variabeln bedeuten, für welche jeder der beiden Factoren verschwindet, oder, mit anderen Worten, wenn $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ die Coordinaten des Schnittpunktes des den beiden Factoren entsprechenden Linienpaares sind, hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 + \lambda w_1 &= 0, \\ v_2 + \lambda w_2 &= 0, \\ v_3 + \lambda w_3 &= 0; \end{aligned}$$

aus welchen sich durch Elimination der Variabeln eine Gleichung dritten Grades in λ ergiebt, deren Wurzeln λ', λ'', λ''' die oben bezeichneten Werthe von λ in dem Ausdrucke $v + \lambda w$ sind, für welche derselbe in lineäre Factoren zerfällt. Bezeichnet man die Coordinaten des Schnittpunktes 1 des ersten dem Werthe λ' entsprechenden Linienpaares durch $\frac{x'_1}{x'_3}$, $\frac{x'_2}{x'_3}$, die Coordinaten des Schnittpunktes 2 des zweiten dem Werthe λ'' entsprechenden Linienpaares durch $\frac{x''_1}{x''_3}$, $\frac{x''_2}{x''_3}$ etc.; ferner durch v'_k, w'_k die Ausdrücke, in welche v_k, w_k übergehen, wenn man x'_1, x'_2, x'_3 statt x_1, x_2, x_3 setzt etc., so hat man folgende drei Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} v'_1 + \lambda' w'_1 &= 0, & v''_1 + \lambda'' w''_1 &= 0, & v'''_1 + \lambda''' w'''_1 &= 0, \\ v'_2 + \lambda' w'_2 &= 0, & v''_2 + \lambda'' w''_2 &= 0, & v'''_2 + \lambda''' w'''_2 &= 0, \\ v'_3 + \lambda' w'_3 &= 0, & v''_3 + \lambda'' w''_3 &= 0, & v'''_3 + \lambda''' w'''_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich leicht folgende beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} x''_1 v'''_1 + x''_2 v'''_2 + x''_3 v'''_3 &= 0, & x''_1 w'''_1 + x''_2 w'''_2 + x''_3 w'''_3 &= 0, \\ x'''_1 v'_1 + x'''_2 v'_2 + x'''_3 v'_3 &= 0, & x'''_1 w'_1 + x'''_2 w'_2 + x'''_3 w'_3 &= 0, \\ x'_1 v''_1 + x'_2 v''_2 + x'_3 v''_3 &= 0, & x'_1 w''_1 + x'_2 w''_2 + x'_3 w''_3 &= 0. \end{aligned}$$

Denn multiplicirt man das dritte System mit x_1'', x_2'', x_3'' und addirt die Producte, so erhält man

$$x_1''v_1''' + x_2''v_2''' + x_3''v_3''' + \lambda'''(x_1''w_1''' + x_2''w_2''' + x_3''w_3''') = 0.$$

Ebenso erhält man aus dem zweiten Systeme, wenn man mit x_1''', x_2''', x_3''' multiplicirt und addirt:

$$x_1'''v_1'' + x_2'''v_2'' + x_3'''v_3'' + \lambda''(x_1'''w_1'' + x_2'''w_2'' + x_3'''w_3'') = 0.$$

Zieht man die eine von diesen Gleichungen von der anderen ab und bemerkt, dass identisch $x_1''v_1''' + x_2''v_2''' + x_3''v_3''' = x_1'''v_1'' + x_2'''v_2'' + x_3'''v_3''$ und ebenso $x_1''w_1''' + x_2''w_2''' + x_3''w_3''' = x_1'''w_1'' + x_2'''w_2'' + x_3'''w_3''$ ist, so erhält man die ersten Gleichungen aus den beiden zuletzt angegebenen Systemen. Diese beiden Gleichungen drücken aus, dass die Punkte 2 und 3 *harmonische Pole* des Kegelschnitts $v = 0$ und des Kegelschnitts $w = 0$ sind. Die beiden Systeme Gleichungen sagen demnach aus, dass je zwei von den drei Punkten 1, 2, 3 *harmonische Pole* sind, sowohl in Rücksicht auf den Kegelschnitt $v = 0$, wie in Rücksicht auf den Kegelschnitt $w = 0$.

Wenn je zwei von drei Punkten *harmonische Pole* eines gegebenen Kegelschnitts sind, so nennt man die drei Punkte *ein System harmonischer Pole* des gegebenen Kegelschnitts. Die obige Untersuchung lehrt also, dass sich, wenn zwei Kegelschnitte gegeben sind, immer drei Punkte finden lassen, welche ein System harmonischer Pole bilden, sowohl für den einen wie für den andern Kegelschnitt. Und man erhält diese drei Punkte als die Schnittpunkte der drei Linienpaare, welche durch die 4 Schnittpunkte der beiden gegebenen Kegelschnitte hindurchgehen.

Wenn man den Kegelschnitt $v = 0$ als gegeben betrachtet, und lässt den Kegelschnitt $w = 0$ variiren, so erhält man auf die angegebene Art alle möglichen Systeme harmonischer Pole des gegebenen Kegelschnitts.

4.

In dem ersten Systeme von Gleichungen, von welchen wir ausgingen, bedeutet λ eine Wurzel der cubischen Gleichung, und $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ waren lineäre Functionen der Coordinaten eines der drei Punkte 1, 2, 3.

Eliminirt man nun λ aus je zwei von diesen drei Gleichungen, so erhält man folgende Gleichungen dreier Kegelschnitte:

$$v_2 w_3 - v_3 w_2 = 0, \qquad v_3 w_1 - v_1 w_3 = 0, \qquad v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0,$$

welche durch die drei Punkte 1, 2, 3 hindurchgehen. Es stellt also die Gleichung

$$u = b_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + b_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + b_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) = 0,$$

mit den willkürlichen Constanten b_1, b_2, b_3, jeden beliebigen Kegelschnitt dar, welcher durch die Punkte 1, 2, 3 hindurchgeht. Dieselbe Gleichung wird aber alle möglichen Kegelschnitte darstellen, welche durch irgend ein System harmonischer Pole des Kegelschnitts $v = 0$ hindurchgehen, wenn man nicht allein b_1, b_2, b_3, sondern auch die Coëfficienten in der Function w variiren lässt. Der Ausdruck u hat nun nach dem in No. 2 bewiesenen Satze die Eigenschaft, zu verschwinden, wenn man in ihm V_{11}, V_{12}, ... statt $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, ... setzt. Wenn also

$$u = a_{11} x_1 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{33} x_3 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts ist, der durch irgend ein System harmonischer Pole des Kegelschnitts $v = 0$ hindurchgeht, so findet immer die Bedingungsgleichung

$$a_{11} V_{11} + a_{22} V_{22} + a_{33} V_{33} + 2 a_{23} V_{23} + 2 a_{31} V_{31} + 2 a_{12} V_{12} = 0$$

statt. Sie ist eine allgemeine lineäre Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten in der Gleichung eines Kegelschnitts $u = 0$. Es lässt sich also sagen:

> *Wenn zwischen den Coëfficienten der Gleichung eines Kegelschnitts eine lineäre Bedingungsgleichung stattfindet, so geht der Kegelschnitt immer durch ein System harmonischer Pole eines andern durch die Bedingungsgleichung bestimmten Kegelschnitts hindurch.*

Es bleibt noch übrig, anzugeben, wie durch die lineäre Bedingungsgleichung die Gleichung $v = 0$ des Kegelschnitts zu bestimmen sei, der ein System harmonischer Pole hat, durch welche der Kegelschnitt $u = 0$ hindurchgeht. Man sieht leicht, wenn man in der Bedingungsgleichung $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, $x_2 x_2$, ... statt a_{11}, a_{12}, a_{22}, ... setzt, dass diese Gleichung in

die Gleichung eines Kegelschnitts übergeht, dessen reciproke Polare (in Rücksicht auf $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$), $v = 0$ zur Gleichung hat.

Als eine unmittelbare Folge aus dem Satze, dass sich durch zwei Systeme harmonischer Pole eines gegebenen Kegelschnitts wieder ein Kegelschnitt hindurchlegen lässt (s. Crelle's Journal Bd. 20, S. 292)[1]), ergiebt sich folgender Satz:

Wenn ein Kegelschnitt durch ein System harmonischer Pole eines gegebenen Kegelschnittes hindurchgeht, so hat er auf seiner Peripherie unendlich viele Systeme harmonischer Pole des gegebenen Kegelschnitts.

5.

Wenn $n = 4$ ist und $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ die Coordinaten eines variabeln Punktes bedeuten, so sind

$$v = 0, \qquad w = 0$$

die Gleichungen von irgend zwei Oberflächen zweiter Ordnung, und

$$v + \lambda w = 0$$

ist die Gleichung jeder beliebigen Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve der genannten beiden Oberflächen hindurchgeht. Unter diesen Oberflächen giebt es auch *Kegel*. In der Voraussetzung, dass λ der dem Kegel entsprechende Werth dieser Constante ist und $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ die Coordinaten der Spitze des Kegels bedeuten, hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} v_1 + \lambda w_1 &= 0, \\ v_2 + \lambda w_2 &= 0, \\ v_3 + \lambda w_3 &= 0, \\ v_4 + \lambda w_4 &= 0; \end{aligned}$$

aus welchen sich durch Elimination der Variabeln eine Gleichung vierten Grades in λ ergiebt, deren Wurzeln eben den Kegeln entsprechen. Man findet auf diese Weise 4 Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Schnitt-

1) [Seite 31 dieser Ausgabe].

curve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen; und die Spitzen von je zweien dieser Kegel sind *harmonische Pole* sowohl für die eine Oberfläche, wie für die andere. Der Beweis dieser Behauptung lässt sich leicht auf dem in No. 3 angegebenen Wege geben.

Man nennt ein *System harmonischer Pole* einer Oberfläche zweiter Ordnung 4 Punkte, von denen je zwei *harmonische Pole* der Oberfläche sind. Demnach bilden die Spitzen 1, 2, 3, 4 der 4 Kegel ein System harmonischer Pole, sowohl in Rücksicht auf die eine Oberfläche, wie in Rücksicht auf die andere; was schon Poncelet bewiesen hat.

Wenn man die Oberfläche $v = 0$ als gegeben betrachtet, und man lässt die Oberfläche $w = 0$ variiren, so erhält man, indem man immer die Spitzen der 4 Kegel bestimmt, alle möglichen Systeme harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche.

6.

Wenn man aus je zwei der zuletzt angegebenen Gleichungen λ eliminirt, so erhält man 6 Gleichungen von Oberflächen zweiter Ordnung, von denen jede durch die Spitzen 1, 2, 3, 4 der 4 Kegel hindurchgeht. Die aus diesen Gleichungen zusammengesetzte Gleichung

$$u = b_{12}(v_1 w_2 - v_2 w_1) + b_{13}(v_1 w_3 - v_3 w_1) + b_{14}(v_1 w_4 - v_4 w_1) + b_{23}(v_2 w_3 - v_3 w_2) + b_{24}(v_2 w_4 - v_4 w_2) + b_{34}(v_3 w_4 - v_4 w_3) = 0,$$

mit den willkürlichen Constanten b, stellt also jede beliebige Oberfläche zweiter Ordnung dar, welche durch die genannten 4 Punkte hindurchgeht. Diese Gleichung $u = 0$ wird aber alle möglichen Oberflächen zweiter Ordnung umfassen, welche durch irgend ein System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche $v = 0$ hindurhgehen, wenn man sowohl die Constanten b, als die Coëfficienten in der Function w variiren lässt. Der Ausdruck u verschwindet nun nach No. 2, wenn man in ihm V_{11}, V_{12}, ... statt $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, ... setzt. Wenn also

$$u = a_{11} x_1 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{33} x_3 x_3 + a_{44} x_4 x_4 + 2\, a_{12} x_1 x_2 + 2\, a_{13} x_1 x_3 + 2\, a_{14} x_1 x_4 + 2\, a_{23} x_2 x_3 + 2\, a_{24} x_2 x_4 + 2\, a_{34} x_3 x_4 = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung ist, welche durch irgend ein System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche $v = 0$ hindurchgeht, so findet immer die Gleichung

$$a_{11}V_{11} + a_{22}V_{22} + a_{33}V_{33} + a_{44}V_{44} + 2a_{12}V_{12} + 2a_{13}V_{13} + 2a_{14}V_{14} + 2a_{23}V_{23} + 2a_{24}V_{24} + 2a_{34}V_{34} = 0$$

statt. Da dieses eine allgemeine lineäre Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung $u = 0$ ist, so lässt sich Folgendes sagen:

Wenn zwischen den Coëfficienten der Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung eine lineäre Bedingungsgleichung stattfindet, so geht die Oberfläche durch ein System harmonischer Pole einer andern, durch die Bedingungsgleichung bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung hindurch.

Um die Gleichung der zweiten Oberfläche zu bestimmen, welche ein System harmonischer Pole darbietet, durch welche die Oberfläche $u = 0$ hindurchgeht, setze ich in der Bedingungsgleichung statt $a_{11}, a_{12}, \ldots$ die Producte $x_1 x_1, x_1 x_2, \ldots$, wodurch dieselbe in die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung übergeht, deren reciproke Polare (in Rücksicht auf $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$) die Gleichung der gesuchten Oberfläche ist.

Mit Hülfe des Satzes: dass sich zwei Systeme harmonischer Pole einer und derselben Oberfläche zweiter Ordnung als die Schnittpunkte von drei Oberflächen zweiter Ordnung betrachten lassen (s. Crelle's Journal Bd. 20, S. 296)[1]), wird leicht Folgendes bewiesen:

Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung durch ein System harmonischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung hindurchgeht, so liegen auf ihr unendlich viele Systeme harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche.

Ich will noch bemerken, dass jeder beliebige Punkt der Oberfläche, welche die angegebene Eigenschaft hat, sich als ein Punkt aus einem Systeme harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche betrachten lässt, welche auf der ersteren Oberfläche liegen.

Königsberg, im Januar 1852.

1) [Seite 36 dieser Ausgabe.]

23.

Ueber die Eigenschaften der lineären Substitutionen, durch welche eine homogene ganze Function zweiten Grades, welche nur die Quadrate von vier Variabeln enthält, in eine Function von derselben Form transformirt wird.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 45, Seite 93—101.]

Wir wollen annehmen, die Coëfficienten a in den lineären Substitutionen

$$1.\qquad \begin{cases} y_1 = a_1' x_1 + a_1'' x_2 + a_1^{(3)} x_3 + a_1^{(4)} x_4, \\ y_2 = a_2' x_1 + a_2'' x_2 + a_2^{(3)} x_3 + a_2^{(4)} x_4, \\ y_3 = a_3' x_1 + a_3'' x_2 + a_3^{(3)} x_3 + a_3^{(4)} x_4, \\ y_4 = a_4' x_1 + a_4'' x_2 + a_4^{(3)} x_3 + a_4^{(4)} x_4 \end{cases}$$

seien so bestimmt, dass

$$2.\qquad b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$$

ist.

Differentiirt man dieser Annahme gemäss die letzte Gleichung nach einander nach den unabhängigen Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4, indem man die Grössen y als Functionen von den Variabeln x betrachtet, wie sie durch die Substitutionen gegeben sind, so erhält man:

$$3.\qquad \begin{cases} a_1 x_1 = a_1' b_1 y_1 + a_2' b_2 y_2 + a_3' b_3 y_3 + a_4' b_4 y_4, \\ a_2 x_2 = a_1'' b_1 y_1 + a_2'' b_2 y_2 + a_3'' b_3 y_3 + a_4'' b_4 y_4, \\ a_3 x_3 = a_1^{(3)} b_1 y_1 + a_2^{(3)} b_2 y_2 + a_3^{(3)} b_3 y_3 + a_4^{(3)} b_4 y_4, \\ a_4 x_4 = a_1^{(4)} b_1 y_1 + a_2^{(4)} b_2 y_2 + a_3^{(4)} b_3 y_3 + a_4^{(4)} b_4 y_4. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind als die Auflösungen der Gleichungen (1) nach den Variabeln x zu betrachten und können als solche die Stelle der Gleichungen (1) vertreten. Wenn man nun $a_1 x_1 = Y_1$, $a_2 x_2 = Y_2$, $a_3 x_3 = Y_3$, $a_4 x_4 = Y_4$; $b_1 y_1 = X_1$, $b_2 y_2 = X_2$, $b_3 y_3 = X_3$, $b_4 y_4 = X_4$ setzt, so gehen diese Gleichungen in die Substitutionen

$$4.\quad \begin{cases} Y_1 = a'_1\, X_1 + a'_2\, X_2 + a'_3\, X_3 + a'_4\, X_4, \\ Y_2 = a''_1\, X_1 + a''_2\, X_2 + a''_3\, X_3 + a''_4\, X_4, \\ Y_3 = a^{(3)}_1 X_1 + a^{(3)}_2 X_2 + a^{(3)}_3 X_3 + a^{(3)}_4 X_4, \\ Y_4 = a^{(4)}_1 X_1 + a^{(4)}_2 X_2 + a^{(4)}_3 X_3 + a^{(4)}_4 X_4 \end{cases}$$

über, in welchen die horizontalen Reihen der Coëfficienten den entsprechenden verticalen Reihen der Coëfficienten in (1) gleich sind. Die Gleichung (2) geht über in:

$$5.\quad \frac{1}{a_1} Y_1^2 + \frac{1}{a_2} Y_2^2 + \frac{1}{a_3} Y_3^2 + \frac{1}{a_4} Y_4^2 = \frac{1}{b_1} X_1^2 + \frac{1}{b_2} X_2^2 + \frac{1}{b_3} X_3^2 + \frac{1}{b_4} X_4^2.$$

Hierdurch ist, wenn man die Zahlen 1, 2, 3, 4 durch $\varkappa$ bezeichnet, folgender Lehrsatz bewiesen:

Lehrsatz 1.

Wenn die Substitutionen

$$y_\varkappa = a'_\varkappa x_1 + a''_\varkappa x_2 + a^{(3)}_\varkappa x_3 + a^{(4)}_\varkappa x_4$$

den Ausdruck $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2$ *in* $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$ *verwandeln, so transformiren die Substitutionen*

$$Y_\varkappa = a^\varkappa_1 X_1 + a^\varkappa_2 X_2 + a^\varkappa_3 X_3 + a^\varkappa_4 X_4$$

den Ausdruck

$$\frac{1}{a_1} Y_1^2 + \frac{1}{a_2} Y_2^2 + \frac{1}{a_3} Y_3^2 + \frac{1}{a_4} Y_4^2 \textit{ in } \frac{1}{b_1} X_1^2 + \frac{1}{b_2} X_2^2 + \frac{1}{b_3} X_3^2 + \frac{1}{b_4} X_4^2.$$

Ich führe diesen auf der Hand liegenden Satz, der auch für eine beliebige Zahl von Variabeln gilt, an, um nun aus ihm neue Sätze abzuleiten, welche *nur* bei vier Variabeln stattfinden.

Da die horizontalen Reihen der Coëfficienten in den Gleichungen (4) den entsprechenden verticalen Reihen in den Gleichungen (1) gleich sind, so wird auch bei den Auflösungen der beiden Systeme von Gleichungen

das Nämliche stattfinden. Es ergeben sich daher folgende Auflösungen der Gleichungen (4):

$$6. \quad \begin{cases} \frac{1}{b_1} X_1 = a_1' \frac{1}{a_1} Y_1 + a_1'' \frac{1}{a_2} Y_2 + a_1^{(3)} \frac{1}{a_3} Y_3 + a_1^{(4)} \frac{1}{a_4} Y_4, \\ \frac{1}{b_2} X_2 = a_2' \frac{1}{a_1} Y_1 + a_2'' \frac{1}{a_2} Y_2 + a_2^{(3)} \frac{1}{a_3} Y_3 + a_2^{(4)} \frac{1}{a_4} Y_4, \\ \frac{1}{b_3} X_3 = a_3' \frac{1}{a_1} Y_1 + a_3'' \frac{1}{a_2} Y_2 + a_3^{(3)} \frac{1}{a_3} Y_3 + a_3^{(4)} \frac{1}{a_4} Y_4, \\ \frac{1}{b_4} X_4 = a_4' \frac{1}{a_1} Y_1 + a_4'' \frac{1}{a_2} Y_2 + a_4^{(3)} \frac{1}{a_3} Y_3 + a_4^{(4)} \frac{1}{a_4} Y_4; \end{cases}$$

welche Gleichungen man auch aus (5) durch Differentiation, ebenso wie die Gleichungen (3) aus (2), ableiten kann. Setzt man die Werthe von $y_1, y_2, \ldots$ aus (1) in (3), so ergeben sich, durch Gleichstellung der Coëfficienten gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichungen, folgende Ausdrücke:

$$7. \quad \begin{cases} a_\varkappa = b_1 a_1^\varkappa a_1^\varkappa + b_2 a_2^\varkappa a_2^\varkappa + b_3 a_3^\varkappa a_3^\varkappa + b_4 a_4^\varkappa a_4^\varkappa, \\ 0 = b_1 a_1^\varkappa a_1^\lambda + b_2 a_2^\varkappa a_2^\lambda + b_3 a_3^\varkappa a_3^\lambda + b_4 a_4^\varkappa a_4^\lambda, \end{cases}$$

und auf gleiche Weise aus (4) und (6)

$$8. \quad \begin{cases} \frac{1}{b_\varkappa} = \frac{1}{a_1} a_\varkappa' a_\varkappa' + \frac{1}{a_2} a_\varkappa'' a_\varkappa'' + \frac{1}{a_3} a_\varkappa^{(3)} a_\varkappa^{(3)} + \frac{1}{a_4} a_\varkappa^{(4)} a_\varkappa^{(4)}, \\ 0 = \frac{1}{a_1} a_\varkappa' a_\lambda' + \frac{1}{a_2} a_\varkappa'' a_\lambda'' + \frac{1}{a_3} a_\varkappa^{(3)} a_\lambda^{(3)} + \frac{1}{a_4} a_\varkappa^{(4)} a_\lambda^{(4)}. \end{cases}$$

Wir wollen nun untersuchen, was die Substitutionen

$$9. \quad y_\varkappa = \frac{1}{a_\varkappa'} x_1 + \frac{1}{a_\varkappa''} x_2 + \frac{1}{a_\varkappa^{(3)}} x_3 + \frac{1}{a_\varkappa^{(4)}} x_4,$$

$$10. \quad Y_\varkappa = \frac{1}{a_1^\varkappa} X_1 + \frac{1}{a_2^\varkappa} X_2 + \frac{1}{a_3^\varkappa} X_3 + \frac{1}{a_4^\varkappa} X_4$$

geben.

Zu diesem Ende werde bemerkt, dass von den Bedingungsgleichungen $0 = b_1 a_1^\varkappa a_1^\lambda + b_2 a_2^\varkappa a_2^\lambda + b_3 a_3^\varkappa a_3^\lambda + b_4 a_4^\varkappa a_4^\lambda$, welche erfüllt werden müssen, wenn in dem durch die Substitutionen (1) zu transformirenden Ausdrucke $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2$ die Producte der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ verschwinden sollen, die eine in die andere übergeht, wenn man $\frac{1}{a_\mu^\varkappa}$ und

$\frac{1}{a_\mu^\lambda}$ statt $a_\mu^\varkappa$ und a_μ^λ und zugleich $b_\varkappa a'_\varkappa a''_\varkappa a^{(3)}_\varkappa a^{(4)}_\varkappa$ statt $b_\varkappa$ setzt. Von den Bedingungsgleichungen $0 = \frac{1}{a_1} a'_\varkappa a'_\lambda + \frac{1}{a_2} a''_\varkappa a''_\lambda + \frac{1}{a_3} a^{(3)}_\varkappa a^{(3)}_\lambda + \frac{1}{a_4} a^{(4)}_\varkappa a^{(4)}_\lambda$, welche erfüllt werden müssen, wenn in dem durch (4) zu transformirenden Ausdrucke $\frac{1}{a_1} Y_1^2 + \frac{1}{a_2} Y_2^2 + \frac{1}{a_3} Y_3^2 + \frac{1}{a_4} Y_4^2$ die Producte der Variabeln X_1, $X_2, \ldots$ wegfallen, geht ferner die eine in die andere über, wenn man $\frac{1}{a^\mu_\varkappa}$ und $\frac{1}{a^\mu_\lambda}$ statt $a^\mu_\varkappa$ und a^μ_λ und zugleich $\frac{1}{a_\varkappa} a_1^\varkappa a_2^\varkappa a_3^\varkappa a^\varkappa$ statt $\frac{1}{a^\varkappa}$ setzt.

Hieraus folgt, wenn man der Kürze wegen

$$11. \qquad a'_\varkappa a''_\varkappa a^{(3)}_\varkappa a^{(4)}_\varkappa = A_\varkappa, \qquad a_1^\varkappa a_2^\varkappa a_3^\varkappa a_4^\varkappa = A^\varkappa$$

setzt, dass durch die Substitutionen (9) und (10) die Ausdrücke

$$12. \qquad b_1 A_1 y_1^2 + b_2 A_2 y_2^2 + b_3 A_3 y_3^2 + b_4 A_4 y_4^2,$$

$$13. \qquad \frac{A'}{a_1} Y_1^2 + \frac{A''}{a_2} Y_2^2 + \frac{A^{(3)}}{a_3} Y_3^2 + \frac{A^{(4)}}{a_4} Y_4^2$$

in solche transformirt werden, die nur die Quadrate der neuen Variabeln enthalten.

Nimmt man an, der Ausdruck (12) gehe durch die Substitutionen (9) in folgenden

$$14. \qquad c_1 A_1 x_1^2 + c_2 A_2 x_2^2 + c_3 A_3 x_3^2 + c_4 A_4 x_4^2$$

über, so muss nach dem aufgestellten Lehrsatze 1 der Ausdruck

$$15. \qquad \frac{1}{c_1 A_1} Y_1^2 + \frac{1}{c_2 A_2} Y_2^2 + \frac{1}{c_3 A_3} Y_3^2 + \frac{1}{c_4 A_4} Y_4^2$$

durch die Substitutionen (10) in

$$16. \qquad \frac{1}{b_1 A_1} X_1^2 + \frac{1}{b_2 A_2} X_2^2 + \frac{1}{b_3 A_3} X_3^2 + \frac{1}{b_4 A_4} X_4^2$$

übergehen.

Wir haben nun zwei verschiedene Functionen der Variabeln Y_1, $Y_2, \ldots$, welche nur die Quadrate der Variabeln enthalten, nämlich (13) und (15), welche beide durch die Substitutionen (10) in solche Functionen der Variabeln X_1, $X_2, \ldots$ übergehen, die nur die Quadrate dieser letzteren Variabeln enthalten. Die Zahl der Bedingungsgleichungen, welche zu erfüllen sind, wenn dieses zutreffen soll, ist für jede dieser Functionen *sechs*.

Nimmt man nun die Coëfficienten in den Substitutionen als gegeben an, betrachtet dagegen die 4 Coëfficienten in den Functionen (13) und (15) in den erwähnten Bedingungsgleichungen als die gesuchten Grössen, so hat man dieselben linearen Gleichungen zur Bestimmung der Werthe der 4 Coëfficienten für die eine, wie für die andere Function. Hieraus ist ersichtlich, dass die entsprechenden Coëfficienten in den beiden Functionen nur durch einen Factor M von einander verschieden sein können. Es ist daher

$$c_1 A_1 = M \cdot \frac{a_1}{A'}, \quad c_2 A_2 = M \cdot \frac{a_2}{A''}, \quad c_3 A_3 = M \cdot \frac{a_3}{A^{(3)}}, \quad c_4 A_4 = M \cdot \frac{a_4}{A^{(4)}}.$$

Setzt man diese Werthe von $c_1 A_1$, $c_2 A_2$, ... in (14), so erhält man den Ausdruck

$$17. \qquad M\left(\frac{a_1}{A'} x_1^2 + \frac{a_2}{A''} x_2^2 + \frac{a_3}{A^{(3)}} x_3^2 + \frac{a_4}{A^{(4)}} x_4^2\right),$$

in welchen der Ausdruck (12) durch die Substitutionen (9) übergeht.

Der Ausdruck (13) geht demnach, mit Rücksicht auf den oben angegebenen Lehrsatz, durch die Substitutionen (10) in

$$18. \qquad M\left(\frac{1}{b_1 A_1} X_1^2 + \frac{1}{b_2 A_2} X_2^2 + \frac{1}{b_3 A_3} X_3^2 + \frac{1}{b_4 A_4} X_4^2\right)$$

über. Diese Bemerkungen vereinigen sich in dem folgenden Lehrsatze:

Lehrsatz 2.

Wenn die Substitutionen

$$y_\varkappa = a'_\varkappa x_1 + a''_\varkappa x_2 + a^{(3)}_\varkappa x_3 + a^{(4)}_\varkappa x_4$$

den Ausdruck $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2$ *in* $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$ *verwandeln, so transformiren die Substitutionen*

$$y_\varkappa = \frac{1}{a'_\varkappa} x_1 + \frac{1}{a''_\varkappa} x_2 + \frac{1}{a^{(3)}_\varkappa} x_3 + \frac{1}{a^{(4)}_\varkappa} x_4$$

den Ausdruck $b_1 A_1 y_1^2 + b_2 A_2 y_2^2 + b_3 A_3 y_3^2 + b_4 A_4 y_4^2$

in $$M\left(\frac{a_1}{A'} x_1^2 + \frac{a_2}{A''} x_2^2 + \frac{a_3}{A^{(3)}} x_3^2 + \frac{a_4}{A^{(4)}} x_4^2\right),$$

und die Substitutionen

$$Y_\varkappa = \frac{1}{a_1^\varkappa} X_1 + \frac{1}{a_2^\varkappa} X_2 + \frac{1}{a_3^\varkappa} X_3 + \frac{1}{a_4^\varkappa} X_4$$

transformiren den Ausdruck

$$\frac{A'}{a_1} Y_1^2 + \frac{A''}{a_2} Y_2^2 + \frac{A^{(3)}}{a_3} Y_3^2 + \frac{A^{(4)}}{a_4} Y_4^2$$

in

$$M\left(\frac{1}{b_1 A_1} X_1^2 + \frac{1}{b_2 A_2} X_2^2 + \frac{1}{b_3 A_3} X_3^2 + \frac{1}{b_4 A_4} X_4^2\right).$$

Ich füge noch hinzu, dass die Werthe der Grössen A in (11) gegeben sind, und dass der Factor M durch die Gleichung

19. $$M\frac{a_\varkappa}{A^\varkappa} = \frac{b_1 A_1}{a_1^\varkappa a_1^\varkappa} + \frac{b_2 A_2}{a_2^\varkappa a_2^\varkappa} + \frac{b_3 A_3}{a_3^\varkappa a_3^\varkappa} + \frac{b_4 A_4}{a_4^\varkappa a_4^\varkappa}$$

bestimmt wird, welche man durch Vergleichung von (12) und (17) erhält. Andere merkwürdige Relationen, die sich aus dem angeführten Lehrsatze ohne Schwierigkeit ableiten lassen, übergehe ich, weil sie Formeln geben würden, die in der folgenden Untersuchung keine Anwendung finden.

Es sei

20. $$F = b_{12} y_1 y_2 + b_{13} y_1 y_3 + b_{14} y_1 y_4 + b_{23} y_2 y_3 + b_{24} y_2 y_4 + b_{34} y_3 y_4$$

eine homogene Function zweiten Grades, in welcher die Quadrate der Variabeln fehlen, und welche die Eigenschaft habe, dass sie durch die Substitutionen (1), vermöge welcher die identische Gleichung (2) stattfindet, in eine Function der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ von derselben Form übergeht, nämlich in

21. $$F = a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 + a_{24} x_2 x_4 + a_{34} x_3 x_4.$$

In dieser Voraussetzung hat man

22. $$\begin{cases} 0 = b_{12}\, a_1^\varkappa a_2^\varkappa + b_{13}\, a_1^\varkappa a_3^\varkappa + b_{14}\, a_1^\varkappa a_4^\varkappa + b_{23}\, a_2^\varkappa a_3^\varkappa + b_{24}\, a_2^\varkappa a_4^\varkappa + b_{34}\, a_3^\varkappa a_4^\varkappa, \\ a_{\varkappa\lambda} = b_{12}(a_1^\varkappa a_2^\lambda + a_1^\lambda a_2^\varkappa) \;+ b_{13}(a_1^\varkappa a_3^\lambda + a_1^\lambda a_3^\varkappa) \;+ b_{14}(a_1^\varkappa a_4^\lambda + a_1^\lambda a_4^\varkappa) \\ \quad + b_{23}(a_2^\varkappa a_3^\lambda + a_2^\lambda a_3^\varkappa) \;+ b_{24}(a_2^\varkappa a_4^\lambda + a_2^\lambda a_4^\varkappa) \;+ b_{34}(a_3^\varkappa a_4^\lambda + a_3^\lambda a_4^\varkappa) \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 0 = \frac{a_{12}}{a_1 a_2}\, a'_\varkappa a''_\varkappa + \frac{a_{13}}{a_1 a_3}\, a'_\varkappa a^{(3)}_\varkappa + \frac{a_{14}}{a_1 a_4}\, a'_\varkappa a^{(4)}_\varkappa + \frac{a_{23}}{a_2 a_3}\, a''_\varkappa a^{(3)}_\varkappa + \frac{a_{24}}{a_2 a_4}\, a''_\varkappa a^{(4)}_\varkappa \\ \qquad + \frac{a_{34}}{a_3 a_4}\, a^{(3)}_\varkappa a^{(4)}_\varkappa, \\ b_{\varkappa\lambda} = \frac{a_{12}}{a_1 a_2}(a'_\varkappa a''_\lambda + a''_\varkappa a'_\lambda) + \frac{a_{13}}{a_1 a_3}(a'_\varkappa a^{(3)}_\lambda + a^{(3)}_\varkappa a'_\lambda) + \frac{a_{14}}{a_1 a_4}(a'_\varkappa a^{(4)}_\lambda + a^{(4)}_\varkappa a'_\lambda) \\ \quad + \frac{a_{23}}{a_2 a_3}(a''_\varkappa a^{(3)}_\lambda + a^{(3)}_\varkappa a''_\lambda) + \frac{a_{24}}{a_2 a_4}(a''_\varkappa a^{(4)}_\lambda + a^{(4)}_\varkappa a''_\lambda) + \frac{a_{34}}{a_3 a_4}(a^{(3)}_\varkappa a^{(4)}_\lambda + a^{(4)}_\varkappa a^{(3)}_\lambda). \end{cases}$$

Dividirt man die Function F durch das Product $y_1 y_2 y_3 y_4$ und setzt hierauf y_1, y_2, y_3, y_4 statt $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}$, so erhält man die neue Function

$$24. \quad \Phi = b_{34} y_1 y_2 + b_{24} y_1 y_3 + b_{23} y_1 y_4 + b_{14} y_2 y_3 + b_{13} y_2 y_4 + b_{12} y_3 y_4.$$

Wir wollen nun untersuchen, in welche Function diese Function übergeht, wenn man in derselben die Substitutionen (9) macht.

Es ist leicht zu sehen, dass in der durch (9) transformirten Function Φ die Quadrate der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ vermöge der Gleichungen (22) wegfallen. Die transformirte Function Φ hat mithin die nämliche Form wie die Function Φ selber, nämlich:

$$25. \quad \Phi = A_{34} x_1 x_2 + A_{24} x_1 x_3 + A_{23} x_1 x_4 + A_{14} x_2 x_3 + A_{13} x_2 x_4 + A_{12} x_3 x_4,$$

und die Coëfficienten A erhalten die Werthe

$$26. \quad \begin{cases} A_{12} = b_{34}\left(\frac{1}{a_1^{(3)} a_2^{(4)}} + \frac{1}{a_1^{(4)} a_2^{(3)}}\right) + b_{24}\left(\frac{1}{a_1^{(3)} a_3^{(4)}} + \frac{1}{a_1^{(4)} a_3^{(3)}}\right) + b_{23}\left(\frac{1}{a_1^{(3)} a_4^{(4)}} + \frac{1}{a_1^{(4)} a_4^{(3)}}\right) \\ \quad + b_{14}\left(\frac{1}{a_2^{(3)} a_3^{(4)}} + \frac{1}{a_2^{(4)} a_3^{(3)}}\right) + b_{13}\left(\frac{1}{a_2^{(3)} a_4^{(4)}} + \frac{1}{a_2^{(4)} a_4^{(3)}}\right) + b_{12}\left(\frac{1}{a_3^{(3)} a_4^{(4)}} + \frac{1}{a_3^{(4)} a_4^{(3)}}\right), \\ A_{13} = b_{34}\left(\frac{1}{a_1'' a_2^{(4)}} + \frac{1}{a_1^{(4)} a_2''}\right) + b_{24}\left(\frac{1}{a_1'' a_3^{(4)}} + \frac{1}{a_1^{(4)} a_3''}\right) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Coëfficienten A lassen sich durch die Coëfficienten a der transformirten Function F sehr einfach ausdrücken. Um dazu zu gelangen, dienen folgende Betrachtungen.

Die in (20) angegebene Function F, welche durch die Substitutionen (1) in die in (21) angegebene Function übergeht, lässt sich als eine Function der Variabeln $y_1, y_2, \ldots$ oder als eine Function der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ betrachten, indem die ersteren Variabeln als Functionen der zweiten durch die Substitutionen (1) gegeben sind, oder die zweiten Variabeln als Functionen der ersteren durch die Gleichungen (3). Differentiirt man die Function F unter der letzteren Annahme nach den unabhängigen Variabeln $y_1, y_2, \ldots$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{b_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot a_1' + \frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot a_1'' + \frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot a_1^{(3)} + \frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial x_4}\cdot a_1^{(4)},$$
$$\frac{1}{b_2}\frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot a_2' + \frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot a_2'' + \frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot a_2^{(3)} + \frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial x_4}\cdot a_2^{(4)},$$
$$\frac{1}{b_3}\frac{\partial F}{\partial y_3} = \frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot a_3' + \frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot a_3'' + \frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot a_3^{(3)} + \frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial x_4}\cdot a_3^{(4)},$$
$$\frac{1}{b_4}\frac{\partial F}{\partial y_4} = \frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot a_4' + \frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot a_4'' + \frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot a_4^{(3)} + \frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial x_4}\cdot a_4^{(4)}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen für die partiellen Differentialquotienten ihre Werthe, und $y_1 = a_1^{(4)}$, $y_2 = a_2^{(4)}$, $y_3 = a_3^{(4)}$, $y_4 = a_4^{(4)}$, zugleich mit den entsprechenden Werthen der Variabeln $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$, so erhält man

$$\frac{1}{b_1}(b_{12}a_2^{(4)} + b_{13}a_3^{(4)} + b_{14}a_4^{(4)}) = \frac{a_{41}a_1'}{a_1} + \frac{a_{42}a_1''}{a_2} + \frac{a_{43}a_1^{(3)}}{a_3},$$
$$\frac{1}{b_2}(b_{21}a_1^{(4)} + b_{23}a_3^{(4)} + b_{24}a_4^{(4)}) = \frac{a_{41}a_2'}{a_1} + \frac{a_{42}a_2''}{a_2} + \frac{a_{43}a_2^{(3)}}{a_3},$$
$$\frac{1}{b_3}(b_{31}a_1^{(4)} + b_{32}a_2^{(4)} + b_{34}a_4^{(4)}) = \frac{a_{41}a_3'}{a_1} + \frac{a_{42}a_3''}{a_2} + \frac{a_{43}a_3^{(3)}}{a_3},$$
$$\frac{1}{b_4}(b_{41}a_1^{(4)} + b_{42}a_2^{(4)} + b_{43}a_3^{(4)}) = \frac{a_{41}a_4'}{a_1} + \frac{a_{42}a_4''}{a_2} + \frac{a_{43}a_4^{(3)}}{a_3}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_1^{(4)}$, $a_2^{(4)}$, $a_3^{(4)}$, $a_4^{(4)}$, so lassen sich die Theile derselben links durch Hülfe der Gleichungen (22) und die Theile rechts mit Hülfe der Gleichungen (23) auf die Weise umformen, dass

$$\frac{1}{b_1}(b_{34}a_3^{(4)}a_4^{(4)} + b_{24}a_2^{(4)}a_4^{(4)} + b_{23}a_2^{(4)}a_3^{(4)}) = a_4\left(\frac{a_{12}a_1'a_1''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_1'a_1^{(3)}}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_1''a_1^{(3)}}{a_2a_3}\right),$$
$$\frac{1}{b_2}(b_{34}a_3^{(4)}a_4^{(4)} + b_{14}a_1^{(4)}a_4^{(4)} + b_{13}a_1^{(4)}a_3^{(4)}) = a_4\left(\frac{a_{12}a_2'a_2''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_2'a_2^{(3)}}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_2''a_2^{(3)}}{a_2a_3}\right),$$
$$\frac{1}{b_3}(b_{24}a_2^{(4)}a_4^{(4)} + b_{14}a_1^{(4)}a_4^{(4)} + b_{12}a_1^{(4)}a_2^{(4)}) = a_4\left(\frac{a_{12}a_3'a_3''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_3'a_3^{(3)}}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_3''a_3^{(3)}}{a_2a_3}\right),$$
$$\frac{1}{b_4}(b_{23}a_2^{(4)}a_3^{(4)} + b_{13}a_1^{(4)}a_3^{(4)} + b_{12}a_1^{(4)}a_2^{(4)}) = a_4\left(\frac{a_{12}a_4'a_4''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_4'a_4^{(3)}}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_4''a_4^{(3)}}{a_2a_3}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{b_1}{a_2^{(4)}a_3^{(4)}a_4^{(4)}} = \frac{b_1a_1^{(4)}}{A^{(4)}},\quad \frac{b_2}{a_1^{(4)}a_3^{(4)}a_4^{(4)}} = \frac{b_2a_2^{(4)}}{A^{(4)}},\quad \frac{b_3}{a_1^{(4)}a_2^{(4)}a_4^{(4)}} = \frac{b_3a_3^{(4)}}{A^{(4)}},\quad \frac{b_4}{a_1^{(4)}a_2^{(4)}a_3^{(4)}} = \frac{b_4a_4^{(4)}}{A^{(4)}},$$

so erhält man

$$b_{34}\frac{1}{a_2^{(4)}}+b_{24}\frac{1}{a_3^{(4)}}+b_{23}\frac{1}{a_4^{(4)}}=\frac{b_1 a_4 a_1^{(4)}}{A^{(4)}}\left(\frac{a_{12}a_1' a_1''}{a_1 a_2}+\frac{a_{13}a_1' a_1^{(3)}}{a_1 a_3}+\frac{a_{23}a_1'' a_1^{(3)}}{a_2 a_3}\right),$$

$$b_{34}\frac{1}{a_1^{(4)}}+b_{14}\frac{1}{a_3^{(4)}}+b_{13}\frac{1}{a_4^{(4)}}=\frac{b_2 a_4 a_2^{(4)}}{A^{(4)}}\left(\frac{a_{12}a_2' a_2''}{a_1 a_2}+\frac{a_{13}a_2' a_2^{(3)}}{a_1 a_3}+\frac{a_{23}a_2'' a_2^{(3)}}{a_2 a_3}\right),$$

$$b_{24}\frac{1}{a_1^{(4)}}+b_{14}\frac{1}{a_2^{(4)}}+b_{12}\frac{1}{a_4^{(4)}}=\frac{b_3 a_4 a_3^{(4)}}{A^{(4)}}\left(\frac{a_{12}a_3' a_3''}{a_1 a_2}+\frac{a_{13}a_3' a_3^{(3)}}{a_1 a_3}+\frac{a_{23}a_3'' a_3^{(3)}}{a_2 a_3}\right),$$

$$b_{23}\frac{1}{a_1^{(4)}}+b_{13}\frac{1}{a_2^{(4)}}+b_{12}\frac{1}{a_3^{(4)}}=\frac{b_4 a_4 a_4^{(4)}}{A^{(4)}}\left(\frac{a_{12}a_4' a_4''}{a_1 a_2}+\frac{a_{13}a_4' a_4^{(3)}}{a_1 a_3}+\frac{a_{23}a_4'' a_4^{(3)}}{a_2 a_3}\right).$$

Multiplicirt man endlich diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{1}{a_1^{(3)}}, \frac{1}{a_2^{(3)}}, \frac{1}{a_3^{(3)}}, \frac{1}{a_4^{(3)}}$ und addirt die Producte, so giebt die Summe der Glieder links gerade den Ausdruck, welcher vorhin mit A_{12} bezeichnet wurde, während rechts die mit a_{13} und a_{23} multiplicirten Glieder wegen der Gleichungen (7) wegfallen, so dass sich

$$A_{12}=\frac{a_{12}\cdot a_4}{a_1 a_2 A^{(4)}}\left\{\frac{b_1 A_1}{a_1^{(3)}a_1^{(3)}}+\frac{b_2 A_2}{a_2^{(3)}a_2^{(3)}}+\frac{b_3 A_3}{a_3^{(3)}a_3^{(3)}}+\frac{b_4 A_4}{a_4^{(3)}a_4^{(3)}}\right\}$$

und nach (19)

$$27.\quad\left\{\begin{array}{l} A_{12}=a_{12}\cdot\frac{a_3 a_3}{A^{(3)}}\cdot\frac{a_4 a_4}{A^{(4)}}\cdot\frac{M}{a_1 a_2 a_3 a_4}\quad\text{und ebenso}\\ A_{13}=a_{13}\cdot\frac{a_2 a_2}{A''}\cdot\frac{a_4 a_4}{A^{(4)}}\cdot\frac{M}{a_1 a_2 a_3 a_4}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

findet. Hierdurch ist folgender Lehrsatz bewiesen.

Lehrsatz 3.

Wenn die Substitutionen $y_\varkappa = a'_\varkappa x_1 + a''_\varkappa x_2 + a^{(3)}_\varkappa x_3 + a^{(4)}_\varkappa x_4$ *den Ausdruck* $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2$ *in* $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$ *und überdies dieselben Substitutionen den Ausdruck*

$$b_{12}y_1 y_2 + b_{13}y_1 y_3 + b_{14}y_1 y_4 + b_{23}y_2 y_3 + b_{24}y_2 y_4 + b_{34}y_3 y_4$$

in

$$a_{12}x_1 x_2 + a_{13}x_1 x_3 + a_{14}x_1 x_4 + a_{23}x_2 x_3 + a_{24}x_2 x_4 + a_{34}x_3 x_4$$

verwandeln, so transformiren die Substitutionen

40*

$$y_\varkappa = \frac{1}{a'_\varkappa} x_1 + \frac{1}{a''_\varkappa} x_2 + \frac{1}{a^{(3)}_\varkappa} x_3 + \frac{1}{a^{(4)}_\varkappa} x_4$$

den Ausdruck

$$b_{34} y_1 y_2 + b_{24} y_1 y_3 + b_{23} y_1 y_4 + b_{14} y_2 y_3 + b_{13} y_2 y_4 + b_{12} y_3 y_4$$

in

$$\frac{M}{a_1 a_2 a_3 a_4} \{a_{34} z_1 z_2 + a_{24} z_1 z_3 + a_{23} z_1 z_4 + a_{14} z_2 z_3 + a_{13} z_2 z_4 + a_{12} z_3 z_4\},$$

wo

$$z_1 = \frac{a_1 a'_1 x_1}{A'}, \qquad z_2 = \frac{a_2 a_2 x_2}{A''}, \qquad z_3 = \frac{a_3 a_3 x_3}{A^{(3)}}, \qquad z_4 = \frac{a_4 a_4 x_4}{A^{(4)}}$$

und $A^\varkappa = a_1^\varkappa a_2^\varkappa a_3^\varkappa a_4^\varkappa$ *ist.*

Die beiden ersten Lehrsätze lassen sich geometrisch wie folgt deuten:

Es seien 8 Punkte im Raume gegeben, in welchen sich drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden. Betrachtet man irgend 4 von diesen Punkten als die Ecken eines Tetraëders und fällt von den 4 andern Punkten Perpendikel auf die Seitenflächen des Tetraëders, so mögen sich dieselben verhalten:

wie $a'_1 : a'_2 : a'_3 : a'_4$ für den ersten Punkt,
wie $a''_1 : a''_2 : a''_3 : a''_4$ für den zweiten Punkt,
wie $a^{(3)}_1 : a^{(3)}_2 : a^{(3)}_3 : a^{(3)}_4$ für den dritten Punkt,
wie $a^{(4)}_1 : a^{(4)}_2 : a^{(4)}_3 : a^{(4)}_4$ für den vierten Punkt.

Bestimmt man dann 4 neue Punkte, deren senkrechte Abstände von den Seitenflächen des Tetraëders sich

wie $a'_1 : a''_1 : a^{(3)}_1 : a^{(4)}_1$ für den ersten Punkt,
wie $a'_2 : a''_2 : a^{(3)}_2 : a^{(4)}_2$ für den zweiten Punkt,
wie $a'_3 : a''_3 : a^{(3)}_3 : a^{(4)}_3$ für den dritten Punkt,
wie $a'_4 : a''_4 : a^{(3)}_4 : a^{(4)}_4$ für den vierten Punkt

verhalten, so schneiden sich in diesen 4 Punkten und in den 4 Ecken des Tetraëders auch drei Oberflächen zweiter Ordnung.

Der zweite Lehrsatz giebt folgenden geometrischen Satz, unter den Voraussetzungen des eben genannten Satzes:

Die 4 Punkte, deren senkrechte Abstände von den Seitenflächen des Tetraëders sich

$$\text{wie } \frac{1}{a_1'} : \frac{1}{a_2'} : \frac{1}{a_3'} : \frac{1}{a_4'} \text{ für den ersten Punkt,}$$

$$\text{wie } \frac{1}{a_1''} : \frac{1}{a_2''} : \frac{1}{a_3''} : \frac{1}{a_4''} \text{ für den zweiten Punkt,}$$

$$\text{wie } \frac{1}{a_1^{(3)}} : \frac{1}{a_2^{(3)}} : \frac{1}{a_3^{(3)}} : \frac{1}{a_4^{(3)}} \text{ für den dritten Punkt,}$$

$$\text{wie } \frac{1}{a_1^{(4)}} : \frac{1}{a_2^{(4)}} : \frac{1}{a_3^{(4)}} : \frac{1}{a_4^{(4)}} \text{ für den vierten Punkt}$$

verhalten, und die vier Ecken des Tetraëders sind die Schnittpunkte von drei Oberflächen zweiter Ordnung.

Auf den dritten Lehrsatz werde ich Gelegenheit haben bei meinen über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung angestellten Untersuchungen zurückzukommen.

Königsberg, im April 1851.

24.

Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 49, Seite 243—264.]

1.

Wenn die Elemente dreier Determinanten:

$$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n, \qquad B = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \ldots b_n^n, \qquad C = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_n^n$$

so mit einander verbunden sind, dass

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa b_0^\lambda + a_1^\varkappa b_1^\lambda + \cdots + a_n^\varkappa b_n^\lambda$$

ist, so ist bekanntlich:

$$1. \qquad AB = C.$$

Ich werde zeigen, wie die partiellen Differentialquotienten der Determinante C, nach ihren Elementen c genommen, durch die partiellen Differentialquotienten der Factoren A und B, nach ihren Elementen genommen, sich ausdrücken lassen.

Zu diesem Zwecke differentiire man die Gleichung (1) nach a_p. Da von den Elementen c nur $c_\varkappa^0, c_\varkappa^1, \ldots c_\varkappa^n$ Functionen dieser Grösse sind, so ergiebt sich:

$$B \cdot \frac{\partial A}{\partial a_p^\varkappa} = \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^0} b_p^0 + \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^1} b_p^1 + \cdots + \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^n} b_p^n.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $\frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda}$ und addire alle Gleichungen, welche sich aus der angegebenen ergeben, indem man statt p nach einander die Zahlen 0, 1, 2, ... n setzt. Dadurch erhält man:

$$B\Sigma\frac{\partial A}{\partial a_p^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda}=\frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^0}\Sigma\frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda}b_p^0+\frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^1}\Sigma\frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda}b_p^1+\cdots+\frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^n}\Sigma\frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda}b^n.$$

Da aber die Summen $\Sigma\frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda}b_p^q$ einzeln verschwinden, mit Ausnahme der Summe, in welcher q den Werth λ hat, welche den Werth B annimmt, so erhält man die Gleichung:

$$2.\qquad \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^\lambda}=\frac{\partial A}{\partial a_0^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_0^\lambda}+\frac{\partial A}{\partial a_1^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_1^\lambda}+\cdots+\frac{\partial A}{\partial a_n^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_n^\lambda}.$$

2.

Um die zweiten partiellen Differentialquotienten von C durch die zweiten partiellen Differentialquotienten der Factoren A und B auszudrücken, differentiire man die Gleichung (2) zuerst nach a_q^μ und dann nach b_q^ν, welches

$$\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda\partial a_q^\mu\partial b_q^\nu}=\frac{\partial^2 A}{\partial a_0^\varkappa\partial a_q^\mu}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b_0^\lambda\partial b_q^\nu}+\frac{\partial^2 A}{\partial a_1^\varkappa\partial a_q^\mu}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b_1^\lambda\partial b_q^\nu}+\cdots+\frac{\partial^2 A}{\partial a_n^\varkappa\partial a_q^\mu}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b_n^\lambda\partial b_q^\nu}$$

giebt. Wenn man in dieser Gleichung statt q nach einander die Zahlen 0, 1, ... n setzt, so entstehen daraus $n+1$ Gleichungen. Addirt man dieselben, so lässt sich die Summe wie folgt bequem darstellen:

$$\Sigma\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda\partial a_q^\mu\partial b_q^\nu}=\Sigma\frac{\partial^2 A}{\partial a_p^\varkappa\partial a_q^\mu}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b_p^\lambda\partial b_q^\nu};$$

wo für p und q die Zahlen 0, 1, ... n zu nehmen sind.

Der linksseitige Theil dieser Gleichung lässt sich als eine Function der Elemente c ausdrücken. In der That: differentiirt man $\frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^\lambda}$ nach a_q^μ, und berücksichtigt, dass von den Elementen c nur $c_\mu^0, c_\mu^1, \ldots c_\mu^n$ Functionen von a_q^μ sind, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda\partial a_q^\mu}=\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda\partial c_\mu^0}b_q^0+\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda\partial c_\mu^1}b_q^1+\cdots+\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda\partial c_\mu^n}b_q^n.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach b_q^ν, von welcher Grösse wieder nur $c_0^\nu, c_1^\nu, \ldots c_n^\nu$ Functionen sind, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu} = \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu} &+ \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^0 \partial c_0^\nu} a_q^0 b_q^0 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^0 \partial c_1^\nu} a_q^1 b_q^0 + \cdots + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^0 \partial c_n^\nu} a_q^n b_q^0\right\} \\ &+ \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^1 \partial c_0^\nu} a_q^0 b_q^1 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^1 \partial c_1^\nu} a_q^1 b_q^1 + \cdots + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^1 \partial c_n^\nu} a_q^n b_q^1\right\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^n \partial c_0^\nu} a_q^0 b_q^n + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^n \partial c_1^\nu} a_q^1 b_q^n + \cdots + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^n \partial c_n^n} a_q^n b_q^n\right\}.\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung für q die Zahlen $0, 1, \ldots n$ und addirt, so erhält man, mit Berücksichtigung der Gleichung

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa b_0^\lambda + a_1^\varkappa b_1^\lambda + \cdots + a_n^\varkappa b_n^\lambda,$$

folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}&\Sigma \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu} \\ &= (n+1)\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu} - \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^0} c_0^0 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^0} c_1^0 + \cdots + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^0} c_n^0\right\} \\ &\qquad - \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^1} c_0^1 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^1} c_1^1 + \cdots + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^1} c_n^1\right\} \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad - \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^n} c_0^n + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^n} c_1^n + \cdots + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^n} c_n^n\right\}.\end{aligned}$$

Man bemerkt, dass sich nicht genau diese Gleichung ergiebt, sondern dass in sämmtlichen dritten Differentialquotienten der Determinante C des rechtseitigen Theiles der Gleichung zwei obere Indices der Elemente c mit einander vertauscht sind, und dass zugleich das positive Vorzeichen jedes dritten Differentialquotienten von C in das negative verändert ist. Dieses ist aber erlaubt, weil eben die Determinante C ihr Vorzeichen wechselt, wenn man in allen ihren Gliedern zwei obere Indices mit einander vertauscht. Berücksichtigt man nun noch, dass der Ausdruck:

$$\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^p} c_0^p + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^p} c_1^p + \cdots + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^p} c_n^p$$

gleich $\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu}$ ist, ausgenommen wenn p gleich λ oder ν ist, in welchen Fällen der Ausdruck verschwindet, so stellt sich die zuletzt angegebene Gleichung wie folgt dar:

$$\Sigma \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu} = 2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu}.$$

Setzt man diesen Werth der Summe in die oben angegebene Gleichung und dividirt durch 2, so erhält man für den gesuchten Ausdruck des zweiten partiellen Differentialquotienten von C:

$$3. \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu} = \frac{1}{1.2} \Sigma \frac{\partial^2 A}{\partial a_p^\varkappa \partial a_q^\mu} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial b_p^\lambda \partial b_q^\nu}.$$

Bestimmt man auf dem angezeigten Wege durch Differentiation dieser Gleichung den dritten Differentialquotienten von C, so ergiebt sich:

$$4. \qquad \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_\varrho^\sigma} = \frac{1}{1.2.3} \Sigma \frac{\partial^3 A}{\partial a_p^\varkappa \partial a_q^\mu \partial a_r^\varrho} \cdot \frac{\partial^3 B}{\partial b_p^\lambda \partial b_q^\nu \partial b_r^\sigma};$$

woraus das Bildungsgesetz für die höheren Differentialquotienten der Determinante C, nach ihren Elementen genommen, erhellt.

3.

Das Product zweier Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & -\alpha_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

lässt sich bekanntlich wieder auf die Form

$$\begin{vmatrix} u_{11}\alpha_2 - u_{12}\alpha_1 & u_{21}\alpha_2 - u_{22}\alpha_1 \\ u_{11}\gamma_2 - u_{12}\gamma_1 & u_{21}\gamma_2 - u_{22}\gamma_1 \end{vmatrix}$$

einer Determinante bringen.

Multiplicirt man diese Determinante noch einmal mit der ersten Determinante $\begin{vmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix}$, so erhält man, vorausgesetzt, dass $u_{12} = u_{21}$ ist, eine Determinante $ac - b^2$, deren Componenten folgende Determinanten sind:

$$a = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad c = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad b = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix},$$

welches die identische Gleichung

$$5. \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix}^2 = ac - b^2$$

giebt. Ich werde im Folgenden zeigen, welche Ausdehnung dieser Gleichung gegeben werden kann.

4.

Es bedeute B die Determinante

$$B = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \beta \end{vmatrix},$$

in welcher jedes Element $u_{\varkappa\lambda}$ dem ihm entsprechenden $u_{\lambda\varkappa}$ gleich ist.

Man betrachte nun folgenden, der Determinante $ac - b^2$ des vorhergehenden Paragraphen analog gebildeten Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\alpha_3\right)\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_3}\gamma_3\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\gamma_3\right)^2,$$

welcher sich als Determinante auch so darstellen lässt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\alpha_3 & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\alpha_2 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_3}\alpha_3 \\ \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\gamma_3 & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_3}\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist der partielle Differentialquotient des Products $MN = C$ zweier Determinanten

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix},$$

nach $c_\varkappa^\lambda = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$ genommen. Sie lässt sich also nach der Gleichung (2) in die Summe von Producten der Differentialquotienten der Factoren wie folgt zerlegen:

$$\frac{\partial M}{\partial m_1}\frac{\partial N}{\partial n_1} + \frac{\partial M}{\partial m_2}\frac{\partial N}{\partial n_2} + \frac{\partial M}{\partial m_3}\frac{\partial N}{\partial n_3}.$$

Um M eine bequeme Form zu geben, bemerke man, dass

$$M \cdot \frac{\partial B}{\partial \beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Bringt man dieses Product *zweier* Determinanten auf die bekannte Weise auf die Form *einer* Determinante und bemerkt dabei, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial B}{\partial \gamma_1} u_{11} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} u_{12} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} u_{13} + \frac{\partial B}{\partial \beta} \alpha_1 = 0, \\
&\frac{\partial B}{\partial \gamma_1} u_{21} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} u_{22} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} u_{23} + \frac{\partial B}{\partial \beta} \alpha_2 = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial B}{\partial \alpha_1} u_{11} + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} u_{12} + \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} u_{13} + \frac{\partial B}{\partial \beta} \gamma_1 = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

so stellt sich das Product $M\frac{\partial B}{\partial \beta}$ wie folgt dar:

$$M \cdot \frac{\partial B}{\partial \beta} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_3 \\ -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_3 \\ u_{11}m_1 + u_{12}m_2 + u_{13}m_3 & u_{21}m_1 + u_{22}m_2 + u_{23}m_3 & u_{31}m_1 + u_{32}m_2 + u_{33}m_3 \end{vmatrix},$$

und mit Weglassung des gleichen Factors $\frac{\partial B}{\partial \beta}$ auf beiden Seiten der Gleichung erhält man:

$$M = \frac{\partial B}{\partial \beta} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ u_{11}m_1 + u_{12}m_2 + u_{13}m_3 & u_{21}m_1 + u_{22}m_2 + u_{23}m_3 & u_{31}m_1 + u_{32}m_2 + u_{33}m_3 \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun:

$$P = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ u_{11} m_1 + u_{12} m_2 + u_{13} m_3 & u_{21} m_1 + u_{22} m_2 + u_{23} m_3 & u_{31} m_1 + u_{32} m_2 + u_{33} m_3 \end{vmatrix},$$

so wird:

$$M = \frac{\partial B}{\partial \beta} \cdot P,$$

und wenn man diesen Werth von M in den obigen Ausdruck substituirt, so geht derselbe in

$$\frac{\partial B}{\partial \beta} \left\{ \frac{\partial P}{\partial m_1} \frac{\partial N}{\partial n_1} + \frac{\partial P}{\partial m_2} \frac{\partial N}{\partial n_2} + \frac{\partial P}{\partial m_3} \frac{\partial N}{\partial n_3} \right\}$$

über. Dieses Product ist also gleich der betrachteten Determinante, oder es ist:

$$6. \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} . U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix}^2,$$

wo U die Bedeutung

$$U = \frac{\partial P}{\partial m_1} \frac{\partial N}{\partial n_1} + \frac{\partial P}{\partial m_2} \frac{\partial N}{\partial n_2} + \frac{\partial P}{\partial m_3} \frac{\partial N}{\partial n_3}$$

hat. Setzt man in diesen Ausdruck von U die angegebenen Werthe von P und N, so findet sich

$$7. \quad U = u_{11} (\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2)^2 + u_{22} (\alpha_3 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_3)^2 + u_{33} (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1)^2$$
$$+ (u_{23} + u_{32}) (\alpha_3 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_3) (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) + (u_{31} + u_{13}) (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) (\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2)$$
$$+ (u_{12} + u_{21}) (\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2) (\alpha_3 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_3).$$

5.

Es bezeichne B die Determinante:

$$B = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \beta \end{vmatrix},$$

in welcher wie oben $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$ angenommen werden soll.

Der der Determinante $ac - b^2$ analog gebildete Ausdruck

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \gamma_4}\alpha_4\right)\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \alpha_4}\gamma_4\right)$$
$$-\left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \gamma_4}\gamma_4\right)^2$$

lässt sich als eine Determinante wie folgt darstellen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \cdots & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\alpha_2 + \cdots \\ \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \cdots & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \cdots \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante lässt sich wieder als der zweite Differentialquotient des Products zweier Determinanten

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_4} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_4} \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix}, \qquad N = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \end{vmatrix},$$

nach den Elementen

$$c_\varkappa^\lambda = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3 + m_4\mu_4,$$
$$c_\mu^\nu = n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + n_3\nu_3 + n_4\nu_4$$

genommen, betrachten. Es lässt sich also diese Determinante nach der Gleichung (3) in folgende Summe von Producten zerlegen:

$$\tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 M}{\partial m_p \partial n_q} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial \mu_p \partial \nu_q}.$$

Um die Determinante M zu transformiren, bilde man das Product:

$$M \cdot \frac{\partial B}{\partial \beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_4} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_4} \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix}.$$

Drückt man dieses Product zweier Determinanten als eine Determinante aus und berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial B}{\partial \gamma_1} u_{11} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} u_{12} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} u_{13} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_4} u_{14} + \frac{\partial B}{\partial \beta} \alpha_1 = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial \gamma_1} u_{21} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} u_{22} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} u_{23} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_4} u_{24} + \frac{\partial B}{\partial \beta} \alpha_2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha_1} u_{11} + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} u_{12} + \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} u_{13} + \frac{\partial B}{\partial \alpha_4} u_{14} + \frac{\partial B}{\partial \beta} \gamma_1 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so erhält man

$$M \cdot \frac{\partial B}{\partial \beta}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_3 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_4 \\ -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_3 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_4 \\ u_{11}m_1 + u_{12}m_2 + \cdots & u_{21}m_1 + u_{22}m_2 + \cdots & u_{31}m_1 + u_{32}m_2 + \cdots & u_{41}m_1 + u_{42}m_2 + \cdots \\ u_{11}n_1 + u_{12}n_2 + \cdots & u_{21}n_1 + u_{22}n_2 + \cdots & u_{31}n_1 + u_{32}n_2 + \cdots & u_{41}n_1 + u_{42}n_2 + \cdots \end{vmatrix}.$$

Setzt man daher der Kürze wegen:

$$P = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ u_{11}m_1 + u_{12}m_2 + \cdots & u_{21}m_1 + u_{22}m_2 + \cdots & u_{31}m_1 + u_{32}m_2 + \cdots & u_{41}m_1 + u_{42}m_2 + \cdots \\ u_{11}n_1 + u_{12}n_2 + \cdots & u_{21}n_1 + u_{22}n_2 + \cdots & u_{31}n_1 + u_{32}n_2 + \cdots & u_{41}n_1 + u_{42}n_2 + \cdots \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich

$$M = P \cdot \frac{\partial B}{\partial \beta}.$$

Die für die betrachtete Determinante gefundene Summe geht nun, wenn man den eben angegebenen Werth von M substituirt, in

$$\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial \beta} \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial m_p \partial n_q} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial \mu_p \partial \nu_q}$$

über. Setzt man endlich diese Summe gleich der betrachteten Determinante, so erhält man die identische Gleichung:

$$8.\quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} . U$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \gamma_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \gamma_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix}^2,$$

in welcher U die Summe

$$U = \tfrac{1}{2}\, \Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial m_p \partial n_q} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial \mu_p \partial \nu_q}$$

bedeutet, und p und q die Zahlen 1, 2, 3, 4 sind. Diese Summe, eine ganze homogene Function zweiten Grades, sowohl in Rücksicht auf die Grössen α als γ und u, lässt sich leicht berechnen. Sie hat aber zu viele Glieder, um sie berechnet hinzuschreiben.

Auf dem angegebenen Wege lässt sich auch, unter der Voraussetzung, dass $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$ sei, die allgemeine Gleichung:

$$9.\quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} . U$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} & \gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix}^2$$

ableiten, wo U eine ganze homogene Function zweiten Grades sowohl in Rücksicht auf die Grössen α als auf β, und vom $(n-2)$ten Grade in Rücksicht auf die Grössen u ist.

6.

Jede *symmetrische* Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix},$$

das heisst jede Determinante, in welcher $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$ ist, lässt sich durch Multiplication mit dem Quadrat einer beliebigen andern Determinante wieder auf eine *symmetrische* Determinante bringen. In der That multiplicirt man die angegebene Determinante mit folgender:

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

und setzt zur Abkürzung

$$2\,F(x_1 x_2 \dots x_n) = u_{11} x_1 x_1 + u_{22} x_2 x_2 + \cdots + 2\,u_{12} x_1 x_2 + \cdots,$$

so erhält man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} F'(x_1') & F'(x_2') & \dots & F'(x_n') \\ F'(x_1'') & F'(x_2'') & \dots & F'(x_n'') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F'(x_1^n) & F'(x_2^n) & \dots & F'(x_n^n) \end{vmatrix},$$

in welcher $F'(x_p^q)$ den partiellen Differentialquotienten von $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ nach x_p bedeutet mit den Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$, welchen der obere Index q zugetheilt ist. Multiplicirt man diese Determinante nochmals mit der vorhergehenden und setzt:

$$F_{pq} = x_1^p F'(x_1^q) + x_2^p F'(x_2^q) + \cdots + x_n^p F'(x_n^q),$$

so erhält man:

$$10.\qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}.$$

Da aber $F_{pq} = F_{qp}$ ist, so ist die letzte Determinante wieder *symmetrisch*.

Auf dieselbe Art lässt sich die identische Gleichung:

$$11. \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \cdots & x_n' & 0 \\ x_1'' & x_2'' & \cdots & x_n'' & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} & A_1 \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} & A_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} & A_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n & 0 \end{vmatrix}$$

beweisen, wo $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ die Bedeutung

$$A_\varkappa = x_1^\varkappa \alpha_1 + x_2^\varkappa \alpha_2 + \cdots + x_n^\varkappa \alpha_n,$$
$$C_\varkappa = x_1^\varkappa \gamma_1 + x_2^\varkappa \gamma_2 + \cdots + x_n^\varkappa \gamma_n$$

haben.

7.

Aus der identischen Gleichung (9) von der Form:

$$12. \quad \Delta \,.\, U = ac - b^2$$

lassen sich für die *Geometrie* wichtige Resultate ziehen. Wenn man nämlich die Grössen $u_{\varkappa\lambda}$ lineäre Ausdrücke zweier Variabeln sein lässt, so stellen die Gleichungen:

$$\Delta = 0, \qquad U = 0, \qquad a = 0, \qquad c = 0, \qquad b = 0$$

ebene *Curven* respective von der $n$ten, $(n-2)$ten und die drei letzten Gleichungen Curven von der $(n-1)$ten Ordnung dar, welche zu einander in merkwürdiger Beziehung stehen. Denn da, wie aus der Gleichung (12) erhellt, b^2 verschwindet, wenn Δ und a verschwinden, so geht die Curve $b^2 = 0$ durch die $n(n-1)$ Schnittpunkte der Curven $\Delta = 0$ und $a = 0$ hindurch. Die Gleichung $b = 0$ hat, weil sie von der $(n-1)$ten Ordnung ist, $\frac{1}{2}n(n+1)$ Constanten. Wendet man von denselben $\frac{1}{2}n(n-1)$ Constanten dazu an, die Curve $b = 0$ durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte der Curven $\Delta = 0$ und $a = 0$ hindurchgehen zu lassen, so bleiben noch n unbestimmte Constanten übrig. In der That enthält die Gleichung $b = 0$ noch n willkürliche Constanten γ, welche weder in Δ noch in a vorkommen. Daher kann die Curve $b = 0$ nicht durch alle $n(n-1)$ Schnittpunkte der Curven $\Delta = 0$ und $a = 0$ hindurchgehen, sondern nur durch

$\frac{1}{2}n(n-1)$ dieser Schnittpunkte. Wenn nun die Curve $b^2=0$ dennoch durch alle $n(n-1)$ Schnittpunkte gehen soll, so ist dies nicht anders möglich, als dass von den $n(n-1)$ Schnittpunkten je zwei in einen zusammenfallen. Die Curve $\Delta=0$ wird also in $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedenen Punkten von der Curve $a=0$ *berührt.* Dieselbe Curve wird ebenso auch von der Curve $c=0$ *berührt.* Die Curve $b=0$ geht endlich durch alle diese $n(n-1)$ Berührungspunkte hindurch.

Ebenso zeigt sich, dass die Curve $U=0$ von jeder der Curven $a=0$ und $c=0$ in $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ verschiedenen Punkten berührt wird, durch welche die Curve $b=0$ hindurchgeht.

Die Gleichung $a=0$, mit den n willkürlichen Constanten α, stellt ein ganzes System von Curven $(n-1)$ter Ordnung vor, deren jede die Curve $n$ter Ordnung $\Delta=0$ in $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedenen Punkten berührt. Von diesen Berührungspunkten können $n-1$ Punkte auf der Curve $\Delta=0$ beliebig angenommen werden, während die übrigen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Berührungspunkte durch die angenommenen bestimmt werden. In der That, da die Gleichung $a=0$ n willkürliche Constanten α in lineärer Weise enthält, von denen eine durch Division zur Einheit gemacht werden kann, so lassen sich die übrigen $n-1$ Constanten so bestimmen, dass die Curve $a=0$ durch $n-1$ auf der Curve $\Delta=0$ beliebig angenommene Punkte hindurchgeht.

Um die obigen Bemerkungen über die Curve $\Delta=0$ auf alle Curven $n$ter Ordnung ausdehnen zu können, ist noch nachzuweisen, dass sich die Gleichung einer beliebigen Curve $v=0$, $n$ter Ordnung, immer auf die Form $\Delta=0$ bringen lasse. Dieses ist in der That immer möglich, weil die Zahl der Constanten in der Determinante Δ grösser ist als die Zahl der Glieder in v. Da nämlich die symmetrische Determinante Δ aus $\frac{1}{2}n(n+1)$ verschiedenen Elementen besteht, von denen jedes drei Constanten enthält, so wird Δ im Ganzen $\frac{3}{2}n(n+1)$ Constanten enthalten, während v nur $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Glieder hat.

Diese Bemerkungen lassen sich in folgendem Lehrsatze zusammenfassen:

Durch $n-1$, beliebig auf einer gegebenen Curve $n$ter Ordnung angenommene Punkte lässt sich immer eine Curve a $(n-1)$ter Ord-

nung hindurchlegen, welche die gegebene Curve in den genannten $n-1$ Punkten und in noch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ andern, durch die ersteren bestimmten Punkten berührt. Legt man durch alle diese $\frac{1}{2}n(n-1)$ Berührungspunkte eine beliebige andere Curve b von der $(n-1)$ten Ordnung hindurch, so schneidet dieselbe die gegebene Curve in noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkten, in welchen ebenfalls eine Curve c von der $(n-1)$ten Ordnung die gegebene Curve berührt.

(Dieser Lehrsatz ist hier nur für den Fall bewiesen, wenn die Gleichung der Berührungscurve a sich auf die Form der oben angegebenen Gleichung $a=0$ zurückführen lässt. Schon bei den Curven vierter Ordnung treten auch Berührungscurven auf, bei welchen das letztere nicht angeht. Diese Curven verlangen eine andere Behandlung.)

Mit der Curve b variirt zugleich auch die Berührungscurve c. Aus der letzteren geht also, wenn man b um die Berührungspunkte von a variiren lässt, ein ganzes System die gegebene Curve berührender Curven hervor, deren je zwei die gegebene Curve in solchen Punkten berühren, durch welche sich eine Curve $(n-1)$ter Ordnung hindurchlegen lässt. Diese letztere Eigenschaft dient als Kriterium, ob zwei beliebige Berührungscurven demselben Systeme oder verschiedenen Systemen angehören.

Offenbar wird eine gegebene Curve $v=0$ $n$ter Ordnung so viele verschiedene Systeme Berührungscurven haben, als sich der Ausdruck v auf die Form einer *symmetrischen* Determinante $\varDelta$ bringen lässt. Hiernach scheint es, dass unendlich viele Systeme von Berührungscurven der gegebenen Curve $v=0$ existiren. Denn hat man v auf die Form einer symmetrischen Determinante gebracht, so kann man letztere, wie es die Gleichung (10) beweist, durch Multiplication mit dem Quadrate einer beliebigen Determinante, wieder auf eine symmetrische Determinante bringen. Dem ist aber nicht so. Die Gleichungen der Berührungscurven, welche sich aus den beiden Determinanten ergeben, sind, wie die Gleichung (11) zeigt, nur durch einen constanten Factor von einander verschieden. Man darf daher eine symmetrische Determinante $\varDelta$, die durch Multiplication einer anderen symmetrischen Determinante mit dem Quadrat einer Determinante hervorgegangen ist, nicht als eine davon verschiedene betrachten.

In diesem Sinne lässt sich, wenn $v = 0$ einen *Kegelschnitt* darstellt, v *nur auf eine Art* auf die Form einer symmetrischen Determinante bringen. *Daher hat ein Kegelschnitt nur ein einziges System Tangenten.*

Wenn $v = 0$ die Gleichung einer Curve *dritter* Ordnung ist, so lässt sich v auf drei verschiedene Arten auf die Form einer symmetrischen Determinante bringen, d. h. es giebt, wie ich in Crelle's Journal Bd. 36 S. 143 [1]) auseinandergesetzt habe, drei verschiedene homogene Functionen dritter Ordnung, deren Determinanten jede gleich einer gegebenen homogenen Function dritter Ordnung ist. Daraus folgt der (Bd. 36 S. 166 [2]) bewiesene) Lehrsatz: *Eine Curve dritter Ordnung hat drei Systeme Berührungskegelschnitte.*

8.

Es ist mir der Beweis gelungen, dass sich eine gegebene Function zweier Variabeln vierten Grades auf 36 verschiedene Arten auf die Form einer symmetrischen Determinante Δ zurückführen lässt. Hieraus ziehe ich den Schluss:

> *Dass eine gegebene Curve vierter Ordnung* 36 *Systeme Berührungscurven dritter Ordnung hat, welche die gegebene Curve vierter Ordnung in sechs verschiedenen Punkten berühren.*

Von diesen sechs Berührungspunkten können drei Punkte willkürlich auf der gegebenen Curve vierter Ordnung angenommen werden. Die drei andern sind durch die ersteren bestimmt und zwar auf 36 verschiedene Arten.

Aus dem obigen allgemeinen Satze folgt für die Curven vierter Ordnung:

> *Dass, wenn man durch die sechs Berührungspunkte einer Berührungscurve dritter Ordnung und einer gegebenen Curve vierter Ordnung eine beliebige Curve dritter Ordnung hindurchlegt, dieselbe die gegebene Curve in noch sechs Punkten schneidet, in welcher eine andere, demselben Systeme angehörige Berührungscurve die gegebene Curve vierter Ordnung berührt.*

---

1) [Seite 156 dieser Ausgabe.]
2) [Seite 181 dieser Ausgabe.]

Da die Gleichung $a = 0$ der Berührungscurve in dem vorliegenden Falle, wo $n = 4$ ist, vier willkürliche Constanten α hat, von denen eine durch Division der Einheit gleich gemacht werden kann, so zeigt sich, dass die drei andern sich so bestimmen lassen, dass a in drei lineäre Factoren zerfällt. Ich habe gefunden, dass diese Bestimmung auf 56 Arten möglich ist und dass sie durch Auflösung einer Gleichung achten Grades erreicht wird. Setzt man die lineären Factoren von a einzeln gleich 0, so hat man die Gleichungen von Doppeltangenten der gegebenen Curve vierter Ordnung. Man sieht hieraus, dass auf diese Weise jede Doppeltangente 6 mal sich ergiebt, da die Curve vierter Ordnung bekanntlich 28 Doppeltangenten hat.

Wenn in der identischen Gleichung (12), in welcher, $n = 4$ angenommen, a dreien Doppeltangenten entspricht, c ebenfalls dreien anderen Doppeltangenten der gegebenen Curve vierter Ordnung entspricht, so hat man eine Curve $b = 0$ dritter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte jener sechs Doppeltangenten hindurchgeht. Solcher Curven dritter Ordnung, $b = 0$, finde ich, unter der Voraussetzung, dass unter den sechs Doppeltangenten nicht drei sind, deren Berührungspunkte in einem Kegelschnitt liegen, der einen Determinante Δ entsprechend, 280. Da aber der gegebenen Curve vierter Ordnung 36 verschiedene Determinanten Δ entsprechen, so erhält man 280.36 solcher Curven dritter Ordnung. Von diesen Curven dritter Ordnung ist indess jede 10 mal gezählt, weil die genannten sechs Doppeltangenten sich auf 10 verschiedene Arten in zwei Gruppen zu dreien vertheilen lassen.

Demnach bietet eine Curve vierter Ordnung 1008 *verschiedene Curven dritter Ordnung dar, von denen jede durch solche sechs Paare Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten hindurchgeht, von welchen nicht drei Paare gefunden werden können, welche in einem Kegelschnitte liegen.*

Die genauere Bezeichnung der sechs Doppeltangenten in diesem Lehrsatze ist wesentlich, weil es auch *solche* sechs Doppeltangenten giebt, durch deren Berührungspunkte sich zwei Kegelschnitte legen lassen; und zugleich eine Curve dritter Ordnung, von welcher in dem folgenden Paragraphen die Rede sein wird.

9.

Die Curven dritter Ordnung $a = 0$, welche eine gegebene Curve vierter Ordnung in sechs verschiedenen Punkten berühren und von welchen der vorhergehende Paragraph handelte, haben die Eigenschaft, die Curve vierter Ordnung in sechs Punkten zu berühren, welche nicht in einem Kegelschnitt liegen.

Es giebt aber ausser den genannten 36 Systemen Berührungscurven dritter Ordnung noch 28 andere Systeme Berührungscurven dritter Ordnung, von welchen jede Curve die gegebene Curve vierter Ordnung in sechs Punkten berührt, welche in einem Kegelschnitt liegen.

Zu diesen Curven gelangt man durch die Betrachtung der identischen Gleichung (5), welche, wenn man $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = m$ setzt, in

13. $$\varDelta = ac - b^2$$

übergeht. In dieser Gleichung ist:

$$\varDelta = u_{11} u_{22} - u_{12}^2,$$
$$-a = u_{11}, \qquad -b = u_{12} - u_{11} m, \qquad -c = u_{22} - 2 u_{12} m + u_{11} m^2.$$

Nimmt man nun an, dass u_{11}, u_{12}, u_{22} gegebene Ausdrücke zweier Coordinaten bedeuten, respective von der ersten, zweiten und dritten Ordnung, und lässt m einen veränderlichen lineären Ausdruck jener Coordinaten vorstellen, so hat man folgende Gleichungen von Curven erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung:

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \qquad \varDelta = 0,$$

welche auf eine merkwürdige Weise mit einander verbunden sind. Die erste dieser Curven a ist, wie aus der identischen Gleichung (13) zu ersehen, eine *Doppeltangente* der Curve *vierter Ordnung* $\varDelta$. Die zweite b ist ein *Kegelschnitt*, welcher durch die Berührungspunkte der Doppeltangente hindurchgeht, und die dritte c ist eine Curve *dritter Ordnung*, welche die Curve $\varDelta$ in den übrigen sechs Punkten berührt, in welchen der Kegelschnitt b die Curve $\varDelta$ schneidet. Der Kegelschnitt b ist ein beliebiger durch die Berührungspunkte der Doppeltangente hindurchgehender Kegelschnitt, weil der Ausdruck b drei in m vorkommende

Constanten enthält. Da sich nun die Gleichung jeder Curve vierter Ordnung auf die Form $\varDelta = 0$ bringen lässt, wie durch Abzählung der Constanten in der gegebenen und der transformirten Gleichung zu sehen, so lässt sich aus der identischen Gleichung (13) folgender Lehrsatz ablesen:

Wenn man durch die Berührungspunkte der Doppeltangente einer gegebenen Curve vierter Ordnung einen beliebigen Kegelschnitt legt, so schneidet derselbe die gegebene Curve in den sechs Punkten, in welchen eine Curve dritter Ordnung die gegebene Curve vierter Ordnung berührt.

Von diesen sechs Berührungspunkten können drei auf der gegebenen Curve vierter Ordnung beliebig angenommen werden, weil sich immer ein Kegelschnitt angeben lässt, der durch die drei auf der Curve vierter Ordnung beliebig angenommenen Punkte und die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente hindurchgeht. Die drei andern Berührungspunkte werden durch die drei angenommenen bestimmt.

Die Gleichung $c = 0$, mit den drei willkürlichen Constanten des linearen Ausdruckes m, stellt ein ganzes System Berührungscurven dritter Ordnung dar, welche ein und derselben Doppeltangente der gegebenen Curve vierter Ordnung in der Weise entsprechen, dass die Berührungspunkte jeder Curve des Systems auf einem Kegelschnitt liegen, der durch die Berührungspunkte der Doppeltangente hindurchgeht.

Die gegebene Curve vierter Ordnung hat 28 Doppeltangenten. Daher wird die Gleichung der gegebenen Curve 28 mal auf die Form $\varDelta = 0$ gebracht werden können, und jeder dieser Formen wird ein System Berührungscurven von der bezeichneten Art entsprechen. Jedes dieser 28 Systeme Berührungscurven enthält also eine Berührungscurve, welche die gegebene Curve vierter Ordnung in drei gegebenen Punkten berührt.

Durch Veränderung von m in m' geht b in b' und c in c' über, wodurch man aus (13)

$$14. \qquad \varDelta = ac' - b'^2$$

erhält. Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so findet sich die identische Gleichung

$$0 = a(c - c') - (b + b')(b - b'),$$

aus welcher zu sehen ist, dass a ein Factor von $b+b'$ oder von $b-b'$ sein muss. Da es gleichgültig ist, welche von diesen Grössen das Product von a und einem anderen linearen Factor A ist, so kann man

15. $$b-b'=aA$$

setzen und erhält, mit Berücksichtigung dieser Gleichung, aus der vorhergehenden:

$$0=(c-c')-A(b+b'),$$

welche identische Gleichung ausdrückt, dass zwei Berührungscurven dritter Ordnung c und c' desselben Systems sich in neun Punkten schneiden, von denen sechs in einem Kegelschnitt und die drei andern in einer geraden Linie liegen.

Bezeichnet man den Ausdruck dritter Ordnung $c-Ab$ durch d, so erhält man nach der letzten identischen Gleichung:

16. $$d=c-Ab=c'+Ab',$$

woraus

$$(c-Ab)(c'+Ab')=d^2$$

folgt, und hieraus wird

$$cc'-d^2=A(bc'-b'c+Abb').$$

Der Theil dieser Gleichung rechts ist aber gleich $\varDelta A^2$, wie leicht zu sehen, wenn man die mit b multiplicirte Gleichung (14) von der mit b' multiplicirten Gleichung (13) abzieht und die Gleichung (15) zu Hülfe nimmt. Demnach haben wir die identische Gleichung

17. $$\varDelta A^2=cc'-d^2.$$

Diese Gleichung beweist, dass die zwölf Berührungspunkte der beiden Berührungscurven $c=0$ und $c'=0$ desselben Systems wieder auf einer Curve dritter Ordnung $d=0$ liegen. Da d, wie aus (16) zu sehen, drei willkürliche in m' vorkommende Constanten behält, wenn man c und b als gegeben annimmt, so lässt sich sagen, dass die Gleichung $d=0$ jede durch die Berührungspunkte der Curven $\varDelta=0$ und $c=0$ gelegte Curve dritter Ordnung darstellt. Der vorhin ausgesprochene Lehrsatz lässt sich demnach wie folgt erweitern:

Wenn man durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente einer gegebenen Curve vierter Ordnung einen Kegelschnitt legt, so schneidet derselbe die Curve in noch sechs Punkten, in welchen eine Curve dritter Ordnung die gegebene Curve berührt. Legt man durch diese sechs Berührungspunkte eine beliebige Curve dritter Ordnung hindurch, so schneidet dieselbe die gegebene Curve vierter Ordnung in noch sechs Punkten, in welchen wiederum eine Curve dritter Ordnung, aus demselben Systeme, die gegebene Curve vierter Ordnung berührt.

Zwei Berührungscurven gehören demnach demselben Systeme an, wenn sich durch die zwölf Berührungspunkte derselben mit der gegebenen Curve vierter Ordnung eine Curve dritter Ordnung hindurchlegen lässt.

Die drei in c vorkommenden unbestimmten Constanten lassen sich auf 45 verschiedene Arten so bestimmen, dass c in drei lineäre Factoren zerfällt. Jeder dieser Factoren gleich 0 gesetzt, drückt analytisch eine von den Doppeltangenten der gegebenen Curve vierter Ordnung aus, mit Ausschluss der Doppeltangente a. Demnach erhält man jede der 27 andern Doppeltangenten auf diese Weise 5 mal.

Wenn in der identischen Gleichung (17) c dreien Doppeltangenten entspricht und c' ebenfalls dreien andern Doppeltangenten, so hat man eine Curve $d = 0$ dritter Ordnung, welche durch die zwölf Berührungspunkte jener sechs Doppeltangenten hindurchgeht. Wir wollen nun untersuchen, wie viele solcher Curven d dritter Ordnung eine gegebene Curve vierter Ordnung darbietet.

Nimmt man zu diesem Ende aus den 45 genannten Gruppen von Doppeltangenten eine Gruppe c heraus, so lässt sich dieselbe nicht mit jeder der übrigen 44 Gruppen c' combiniren, weil unter diesen vier Gruppen c' enthalten sind, welche die erste in c vorkommende Doppeltangente involviren. Ebenso werden vier andere Gruppen c' die zweite Doppeltangente in c und noch vier andere die dritte Doppeltangente in c enthalten. Mit diesen zwölf Gruppen wird c nicht zu combiniren sein. Man wird also c nur mit 32 Gruppen c' zu combiniren haben, und jeder dieser Combinationen wird eine andere Curve d entsprechen. Da aber 45 Gruppen c existiren, so ist die doppelte Zahl der gesuchten Com-

binationen $= 32.45$. Mithin ist die Zahl der verschiedenen Curven d, welche der einen Doppeltangente a entsprechen, $= 720$. Die Zahl sämmtlicher Curven $d = 0$, welche die Curve vierter Ordnung aufzuweisen hat, ist mithin $720.28 = 20160$, weil die Curve vierter Ordnung 28 Doppeltangenten hat. Jede Curve d ist hier aber 4 mal gezählt, weil sie nicht einer einzigen Doppeltangente a entspricht, sondern vieren. Desshalb muss jene Zahl noch durch 4 dividirt werden. Man kann also sagen:

Eine gegebene Curve vierter Ordnung hat 5040 *verschiedene Curven dritter Ordnung aufzuweisen, von denen jede durch solche sechs Paare Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten hindurchgeht, von denen drei Paare auf einem Kegelschnitt liegen und die drei anderen auf einem anderen Kegelschnitt.*

10.

Aus der identischen Gleichung (5) von der Form:

$$\varDelta U = ac - b^2$$

lassen sich, in dem Falle, wenn u_{11}, u_{12}, u_{22} Functionen zweiten Grades von zwei Coordinaten bedeuten, für die Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$, auf welche Form sich die Gleichung jeder Curve vierter Ordnung zurückführen lässt, andere wichtige Resultate ziehen.

Es wird leicht zu sehen sein, dass die Gleichung $a = 0$, mit den beiden willkürlichen Constanten α_1, α_2, welche nur die Stelle von einer Constanten vertreten, wenn man diese Constanten variiren lässt, ein ganzes System von Kegelschnitten repräsentirt, deren jeder die gegebene Curve $\varDelta$ in vier verschiedenen Punkten berührt. Von diesen vier Berührungspunkten lässt sich nun ein Berührungspunkt willkürlich auf der gegebenen Curve annehmen, weil die Gleichung $a = 0$ nur eine willkürliche Constante enthält. Die drei andern sind durch diesen einen für das in Rede stehende System Berührungskegelschnitte bestimmt. Ich werde später zeigen, *dass eine gegebene Curve vierter Ordnung* 63 *Systeme Berührungskegelschnitte hat.* Dieses vorausgesetzt, folgt, dass sich ein gegebener Ausdruck vierter Ordnung von zwei Variabeln 63 mal auf die Form $\varDelta$ zurückführen lässt. Jedes dieser Systeme enthält einen Be-

rührungskegelschnitt, welcher die gegebene Curve in einem gegebenen Punkte berührt, so dass es also 63 verschiedene Berührungskegelschnitte giebt, welche die gegebene Curve in einem gegebenen Punkte berühren.

Durch die acht Berührungspunkte zweier Berührungskegelschnitte $a = 0$ und $c = 0$ geht wieder ein Kegelschnitt $b = 0$ hindurch. Betrachtet man den ersten Kegelschnitt als gegeben, den zweiten als variabel, so variirt auch der dritte, indem er immer durch die Berührungspunkte des ersten Kegelschnittes hindurchgeht. Dies giebt folgenden Lehrsatz:

Wenn man durch die vier Berührungspunkte eines Berührungskegelschnitts einer gegebenen Curve vierter Ordnung einen anderen Kegelschnitt legt, so schneidet derselbe die gegebene Curve vierter Ordnung in noch vier Punkten, in welchen ein zweiter, demselben Systeme zugehöriger Kegelschnitt die gegebene Curve vierter Ordnung berührt.

Es ist noch hinzuzufügen, dass zwei Berührungskegelschnitte einem und demselben Systeme angehören, wenn sich durch die acht Berührungspunkte ein Kegelschnitt hindurchlegen lässt.

Unter den Berührungskegelschnitten $a = 0$ giebt es auch Linienpaare, welche zugleich Doppeltangentenpaare der gegebenen Curve vierter Ordnung sind. In der That: da die Gleichung $a = 0$ eine willkürliche Constante enthält, so lässt sich dieselbe immer so bestimmen, dass sie der Bedingungsgleichung genügt, welche erfüllt werden muss, wenn a in lineäre Factoren zerfallen soll. Diese Factoren einzeln gleich 0 gesetzt, werden Doppeltangenten der gegebenen Curve vierter Ordnung darstellen. Erwägt man aber, dass die genannte Bedingungsgleichung vom dritten Grade ist, in Rücksicht auf die Coëfficienten in a, und dass die Coëfficienten selber quadratische Ausdrücke der willkürlichen Constante sind, so sieht man, dass die Bedingungsgleichung in Rücksicht auf die zu bestimmende Constante zu einer Gleichung sechsten Grades wird. Demnach enthält jedes System Berührungskegelschnitte sechs Paare Doppeltangenten der betrachteten Curve vierter Ordnung. Die 28 Doppeltangenten der gegebenen Curve paaren sich aber 378 mal. Je sechs Paare gehören einem Systeme an. Es müssen also $\frac{378}{6} = 63$ Systeme Berührungskegelschnitte existiren; was zu beweisen war.

Wenn zwei von den Berührungspunkten des Kegelschnitts a zusammenfallen, so berührt dieser Kegelschnitt die gegebene Curve vierter Ordnung in diesem Punkte vierpunktig, und ausserdem noch in zwei andern Punkten. Diese vierpunktigen Berührungspunkte erhält man auf folgende Weise. Man betrachte die vier Berührungspunkte des Kegelschnittes a als die Ecken eines Vierecks und construire die drei Diagonalpunkte p, in welchen sich die drei Linienpaare schneiden, welche durch die Ecken des Vierecks gelegt werden können. Diese drei Diagonalpunkte beschreiben nun eine Curve dritter Ordnung π, wenn der Berührungskegelschnitt a variirt; und die Schnittpunkte der Curve dritter Ordnung π mit der gegebenen Curve vierter Ordnung sind die gesuchten vierpunktigen Berührungspunkte. In der That: betrachtet man a, b, c als homogene Ausdrücke der drei Coordinaten x, y, z, wo $z = 1$, so hat man, wenn x, y, z die Coordinaten des Punkts p bedeuten, die Gleichungen

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \lambda \frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial a}{\partial y} + \lambda \frac{\partial b}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial a}{\partial z} + \lambda \frac{\partial b}{\partial z} = 0,$$

durch welche auch die folgende Gleichung erfüllt wird:

$$\pi = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

welche Gleichung eben die gesuchte Curve dritter Ordnung darstellt. Wenn nun zwei der Berührungspunkte des Kegelschnitts a in einen Punkt zusammenfallen, so fallen auch zwei Diagonalpunkte p in diesem Punkte zusammen und die Curve π muss in diesem Punkte die Curve vierter Ordnung schneiden. Man kann also sagen:

Jedes System Berührungskegelschnitte enthält zwölf Kegelschnitte, welche die gegebene Curve vierter Ordnung vierpunktig berühren und diese vierpunktigen Berührungspunkte liegen in einer Curve dritter Ordnung.

11.

Man betrachte zwei Berührungskegelschnitte a und c desselben Systemes, von denen der erste in das Doppeltangentenpaar a' und a'' zerfällt, der zweite in das Doppeltangentenpaar c', c''. Durch die acht Berührungspunkte dieser beiden Doppeltangentenpaare geht, wie man sah, ein Kegelschnitt b hindurch. Das in Rede stehende System Berührungskegelschnitte bietet nur sechs Paare Doppeltangenten dar. Daher giebt es in diesem Systeme fünfzehn Kegelschnitte b, welche durch die acht Berührungspunkte von je zwei Paaren Doppeltangenten hindurchgehen. Die 63 Systeme enthalten also $15.63 = 945$ solcher Kegelschnitte b. Von diesen Kegelschnitten ist aber jeder 3 mal gezählt worden. Denn erstens gehört der Kegelschnitt b, welcher durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten $a'a''$, $c'c''$ hindurchgelegt ist, dem Systeme an, welches die Berührungskegelschnitte $a'a''$ und $c'c''$ enthält; zweitens dem Systeme, welches die Berührungskegelschnitte $a'c'$ und $a''c''$ enthält; endlich drittens dem Systeme, welches die Berührungskegelschnitte $a'c''$ und $a''c'$ enthält.

Demnach ist die Zahl der Kegelschnitte, welche durch acht Berührungspunkte von vier Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung gelegt werden können, gleich $\frac{945}{3} = 315$.

(In dem vortrefflichen Werke „Treatise on the higher plane curves by George Salmon, M. A. Dublin 1852,“ in welchem der Verfasser die in dem Gebiete der höheren Curven gemachten Entdeckungen, vermehrt durch eigene Untersuchungen, vorträgt, findet man den genannten Lehrsatz S. 197 bewiesen und S. 198 die 315 Combinationen der Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte sich ein Kegelschnitt hindurchlegen lässt, in einer Tafel zusammengestellt. Meine Angaben werden in dieser Tafel ihre Bestätigung finden. Den Beweis derselben behalte ich mir für eine spätere Abhandlung [1]) über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung vor, welche manche andere in dieser Abhandlung ohne Beweis hingeworfenen Angaben aufklären wird. Herr Salmon giebt S. 199 sieben Kegelschnitte an, welche durch die 56 Berührungspunkte

1) [No. 25 dieser Ausgabe.]

der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung hindurchgehen. Es sind dieses dieselben Kegelschnitte, welche mir in dem Schreiben an den Professor Jacobi (s. Crelle's Journal Bd. 40 p. 260)[1]) vorschwebten. Bei dieser Gelegenheit will ich noch bemerken, dass drei von den sieben Kegelschnitten auch durch zwei Curven dritter Ordnung und von den noch übrigen vier Kegelschnitten ebenfalls drei durch zwei Curven dritter Ordnung sich ersetzen lassen, so dass erstens sieben Kegelschnitte durch die 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgehen, zweitens vier Kegelschnitte und zwei Curven dritter Ordnung, drittens ein Kegelschnitt und vier Curven dritter Ordnung.)

Es lässt sich auch angeben, welche Doppeltangenten die Curve vierter Ordnung in acht Punkten berühren, die in einem Kegelschnitt liegen. Zu diesem Zwecke bediene ich mich folgender Hülfsfigur. Durch acht Punkte des Raumes ziehe ich die 28 geraden Linien, welche je zwei von den acht Punkten verbinden. Jede dieser geraden Linien lasse ich einer der 28 Doppeltangenten entsprechen. Den Seiten jedes räumlichen Vierecks der Hülfsfigur entsprechen dann solche vier Doppeltangenten, deren Berührungspunkte in einem Kegelschnitt liegen. Solcher Kegelschnitte finden sich 210. Ferner entsprechen jeden vier geraden Linien, welche die acht Punkte auf die Weise verbinden, dass jede Linie durch zwei verschiedene Punkte hindurchgeht, ebenfalls vier Doppeltangenten, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen. Solcher Kegelschnitte giebt es 105. So mag es scheinen, als wenn die 315 Kegelschnitte in zwei Gruppen von 210 und 105 Kegelschnitten zerfallen, welche durch besondere Eigenschaften sich von einander unterscheiden. Dem ist aber nicht so. Es haben vielmehr die 315 Kegelschnitte für die gegebene Curve vierter Ordnung ganz dieselbe Bedeutung.

Königsberg, im April 1853.

---

1) [Seite 260 dieser Ausgabe.]

25.

Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 49, Seite 279—332.]

1.

Der geometrische Ort des Pols einer gegebenen geraden Linie in einem Systeme Kegelschnitte, welche sich in denselben vier Punkten schneiden, ist wieder ein Kegelschnitt.

Man kann noch hinzufügen, dass dieser Kegelschnitt immer durch dieselben drei Punkte hindurchgeht, wenn man die gerade Linie variiren lässt, nämlich durch die drei Diagonalpunkte des Vierecks, dessen Ecken jene vier Schnittpunkte sind.

Dieser bekannte Satz der ebenen Geometrie lässt sich auf doppelte Art auf den *Raum* ausdehnen, indem man für die gerade Linie eine *Ebene* substituirt und für das System von Kegelschnitten entweder ein System von *Oberflächen* zweiter Ordnung, welche durch acht im Raume gegebene Punkte hindurchgehen, oder ein System von *Oberflächen* zweiter Ordnung, welche durch sieben gegebene Punkte hindurchgehen.

Im ersten Falle erhält man den von Chasles in seinem „Aperçu historique etc. not. 33" angegebenen Satz, nämlich:

Wenn mehrere Oberflächen zweiter Ordnung durch acht gegebene Punkte gehen, so liegen die Pole irgend einer Ebene, in Bezug auf diese Oberflächen genommen, auf einer Curve doppelter Krümmung von der dritten Ordnung.

Diese Curve lässt sich allein für sich nicht als die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung darstellen, sondern immer nur in der Verbindung mit einer geraden Linie, welche die Curve dritter Ordnung in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Es ist noch zu bemerken, dass die genannte Curve doppelter Krümmung von der dritten Ordnung, durch die Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung hindurchgeht, welche sich durch die acht gegebenen Punkte hindurchlegen lassen.

In dem andern Falle erhält man folgenden Satz:

Der geometrische Ort des Pols einer gegebenen Ebene in einem System von Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch sieben gegebene Punkte hindurchgehen, ist eine Oberfläche dritter Ordnung.

In der That: wenn

1. $$f = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \psi = 0$$

die in Rücksicht auf die Coordinaten x, y, z, p homogenen Gleichungen von irgend drei Oberflächen zweiter Ordnung darstellen, welche durch sieben gegebene Punkte hindurchgehen, und man setzt

2. $$2F = \varkappa f + \lambda \varphi + \mu \psi,$$

so ist $2F = 0$ mit den willkürlichen Constanten $\varkappa, \lambda, \mu$ die Gleichung einer beliebigen Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die sieben gegebenen Punkte hindurchgeht. Wenn ferner die Gleichung der gegebenen Ebene

3. $$ax + by + cz + dp = 0$$

ist, und man lässt x, y, z, p die Coordinaten des Poles der genannten Ebene in Rücksicht auf die Oberfläche $2F = 0$ bedeuten, so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varkappa f'x + \lambda \varphi' x + \mu \psi' x + \nu a &= 0, \\ \varkappa f'y + \lambda \varphi' y + \mu \psi' y + \nu b &= 0, \\ \varkappa f'z + \lambda \varphi' z + \mu \psi' z + \nu c &= 0, \\ \varkappa f'p + \lambda \varphi' p + \mu \psi' p + \nu d &= 0; \end{aligned}$$

woraus man durch Elimination von $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$, und wenn man die Determinante durch $\varDelta$ bezeichnet, nämlich:

4.
$$A = \begin{vmatrix} f'x & \varphi'x & \psi'x & a \\ f'y & \varphi'y & \psi'y & b \\ f'z & \varphi'z & \psi'z & c \\ f'p & \varphi'p & \psi'p & d \end{vmatrix},$$

die Gleichung vom dritten Grade in Rücksicht auf die Coordinaten des Pols

5.
$$A = 0$$

erhält, welche der Oberfläche dritter Ordnung zugehört, die durch den Pol beschrieben wird.

Da der Pol jeder beliebigen Ebene, in Rücksicht auf einen Kegel zweiter Ordnung, die Spitze des Kegels ist, und durch die sieben gegebenen Punkte ein ganzes System von Kegeln zweiter Ordnung sich hindurchlegen lässt, so werden die Spitzen dieser Kegel auf der Oberfläche dritter Ordnung liegen, und man kann den angegebenen Satz wie folgt vervollständigen:

Auf der genannten Oberfläche dritter Ordnung liegt die Curve, welche die Spitze des Kegels zweiter Ordnung beschreibt, der durch die sieben gegebenen Punkte hindurchgeht.

Es schneiden sich also alle Oberflächen dritter Ordnung, $A = 0$, welche man erhält, wenn man die Ebene (3) beliebig variiren lässt, in der Curve, welche die Spitze des Kegels zweiter Ordnung beschreibt, der durch die sieben gegebenen Punkte hindurchgeht.

Diese Curve der Kegelspitzen wollen wir nun zunächst betrachten.

Wenn man annimmt, $\varkappa, \lambda, \mu$ seien so bestimmt, dass $2F = 0$ zur Gleichung eines Kegels wird, und man lässt x, y, z, p die Coordinaten der Spitze P des Kegels bedeuten, so hat man folgende Gleichungen:

6.
$$\begin{cases} 2F'x = \varkappa f'x + \lambda\varphi'x + \mu\psi'x = 0, \\ 2F'y = \varkappa f'y + \lambda\varphi'y + \mu\psi'y = 0, \\ 2F'z = \varkappa f'z + \lambda\varphi'z + \mu\psi'z = 0, \\ 2F'p = \varkappa f'p + \lambda\varphi'p + \mu\psi'p = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\varkappa, \lambda, \mu$ aus je drei Gleichungen erhält man nun folgende Gleichungen von vier Oberflächen dritter Ordnung:

7.
$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial d} = 0,$$

welche Oberflächen sämmtlich durch die Curve der Kegelspitzen hindurchgehen; woraus sich wiederum die allgemeine Gleichung $A = 0$ mit den willkürlichen Constanten a, b, c, d derjenigen Oberfläche dritter Ordnung zusammensetzen lässt, welche durch die Curve der Kegelspitzen hindurchgeht.

Irgend zwei von den Oberflächen dritter Ordnung $A = 0$ schneiden sich jetzt in einer Curve doppelter Krümmung von der neunten Ordnung; unter welcher eine Curve zu verstehen ist, die von jeder beliebigen Ebene in neun Punkten geschnitten wird. In der That schneidet jede der genannten Oberflächen die beliebig angenommene Ebene in einer ebenen Curve dritter Ordnung, und zwei solcher Curven schneiden sich bekanntlich in neun Punkten.

Diese Curve neunter Ordnung zerfällt in eine Curve sechster Ordnung, in welcher die Kegelspitzen liegen, und in eine Curve dritter Ordnung, in welcher die Kegelspitzen nicht liegen. Ich werde diese Behauptung dadurch rechtfertigen, dass ich zwei Oberflächen $A = 0$ angebe, welche eine gegebene Ebene in zwei ebenen Curven dritter Ordnung schneiden, deren neun Schnittpunkte so beschaffen sind, dass drei derselben mit den beiden Oberflächen $A = 0$ variiren. Diese drei Punkte können dann nicht die Spitzen von Kegeln zweiter Ordnung sein, welche durch die gegebenen sieben Punkte hindurchgehen, weil die Curve der Kegelspitzen die gegebene Ebene in ganz bestimmten, nicht variabeln Punkten schneidet.

Da die Gleichung $A = 0$ die willkürlichen Constanten a, b, c, d enthält, so kann man diese Constanten auf mehrfache Weise so bestimmen, dass die Oberfläche $A = 0$ durch zwei in der gegebenen Ebene beliebig angenommene Punkte hindurchgeht. Es seien $B = 0$ und $C = 0$ zwei solche Oberflächen $A = 0$, welche durch die beiden in der gegebenen Ebene beliebig angenommenen Punkte hindurchgehen. Jede dieser beiden Oberflächen schneidet nun die gegebene Ebene in einer ebenen Curve dritter Ordnung, und die beiden Curven dritter Ordnung schneiden sich in neun Punkten, von welchen zwei die beliebig angenommenen Punkte sind. Erwägt man aber, dass durch acht Schnittpunkte zweier ebenen Curven dritter Ordnung der neunte Schnittpunkt bestimmt wird, so wird, wenn man zwei von den neun Schnittpunkten, wie in unserem Falle,

beliebig variiren kann, mit ihnen zugleich noch ein dritter Schnittpunkt variiren. Mithin sind von den neun Schnittpunkten drei mit den Oberflächen $B = 0$ und $C = 0$ variabel, welche desshalb nicht Kegelspitzen sein können. Es bleiben also sechs Kegelspitzen in der gegebenen Ebene übrig. Diese Bemerkungen lassen sich in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Der geometrische Ort der Spitzen der Kegel, welche durch sieben gegebene Punkte des Raumes hindurchgehen, ist eine Curve doppelter Krümmung sechster Ordnung.

Man wird den Beweis dieses Satzes nicht für vollständig gelten lassen wollen, da im Grunde nur bewiesen wurde, dass die Curve der Kegelspitzen nicht von einem höheren Grade als vom sechsten sein kann. Wir werden desshalb in § 4, welcher von den Schnittpunkten einer Oberfläche zweiter Ordnung mit der Curve der Kegelspitzen handeln wird, auf diesen Satz wieder zurückkommen und einen neuen Beweis des Satzes aufstellen.

Der geometrische Ort des Pols, dessen Polar-Ebenen, in Bezug auf die Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch sieben gegebene Punkte des Raumes hindurchgehen, sich in derselben geraden Linie schneiden, ist die Curve der Kegelspitzen.

In der That: die Bedingungsgleichungen, welche die Coordinaten x, y, z, p des Pols P zu erfüllen haben, wenn die Polar-Ebenen desselben in Bezug auf die drei Oberflächen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sich in derselben geraden Linie schneiden, sind eben die Gleichungen (6).

Diese Curve der Kegelspitzen ist wieder eine solche Curve doppelter Krümmung, welche sich nicht als die Schnittcurve zweier algebraischen Oberflächen darstellen lässt. Denn da die genannte Curve von der sechsten Ordnung ist, so könnte sie nur die Schnittcurve einer Oberfläche dritter Ordnung und einer Oberfläche zweiter Ordnung sein. Wir werden aber später sehen, dass die Curve der Kegelspitzen nicht auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegen kann. Sie tritt daher immer nur in Verbindung mit einer anderen Curve als die Schnittcurve zweier Oberflächen auf; wie wir sie denn auch im Vorhergehenden als die Schnittcurve zweier Oberflächen $A = 0$ von der dritten Ordnung in Verbindung mit einer Curve dritter Ordnung dargestellt haben.

2.

Da sich die Curve der Kegelspitzen, als die Schnittcurve zweier Oberflächen, nur in Verbindung mit einem überflüssigen Factor ausdrücken lässt, so wollen wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der genannten Curve bestimmen, und zwar befreit von jeder fremdartigen Beimischung. Wenn man zu diesem Zwecke die Function $2F$ nach den Potenzen und Producten der Coordinaten des Punkts P ordnet, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$8. \quad \begin{aligned} 2F = u_{11}x^2 + u_{22}y^2 + u_{33}z^2 + u_{44}p^2 + 2u_{12}xy + 2u_{13}xz \\ + 2u_{14}xp + 2u_{23}yz + 2u_{24}yp + 2u_{34}zp, \end{aligned}$$

in welchem die Coëfficienten u lineäre homogene Ausdrücke der Grössen $\varkappa, \lambda, \mu$ bedeuten. Bezeichnet man ferner durch Δ *die Determinante der Function* F, welche die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der Function gebildete Determinante

$$9. \quad \Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix}$$

ist, so erhält man als das Resultat der Elimination der Coordinaten des Punktes P aus den Gleichungen (6) die Gleichung

$$10. \quad \Delta = 0.$$

Diese Gleichung ist die Bedingungsgleichung, welche erfüllt werden muss, wenn die in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes P lineären Gleichungen (6) zu gleicher Zeit bestehen sollen. Man sieht hieraus, dass die Grössen $\varkappa, \lambda, \mu$ in den Gleichungen (6) nicht beliebig angenommen werden können, sondern dass sie der Gleichung (10) genügen müssen.

Betrachtet man die genannten Grössen als die Coordinaten eines Punktes Π in irgend einer Ebene, so stellt die Gleichung (10) eine ebene Curve dar, welche von der vierten Ordnung ist, weil Δ in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes Π derselben Ordnung angehört. Wählt man nun auf dieser ebenen Curve vierter Ordnung irgend einen Punkt Π, so werden die Coordinaten desselben, für $\varkappa, \lambda, \mu$ in die Gleichungen (6)

gesetzt, diese Gleichungen erfüllbar machen; und durch Auflösung von dreien dieser Gleichungen wird man die Coordinaten eines Punktes P der Curve der Kegelspitzen erhalten, welche zugleich der vierten Gleichung (6) genügen. Man sieht hieraus, wie jedem Punkte Π der ebenen Curve vierter Ordnung *ein* bestimmter Punkt P der Curve der Kegelspitzen entspricht, und dass der Punkt P die Curve der Kegelspitzen beschreibt, wenn der entsprechende Punkt Π die ebene Curve vierter Ordnung durchläuft. Ebenso entspricht auch umgekehrt jedem Punkte P der Curve der Kegelspitzen *ein* Punkt Π der Curve vierter Ordnung.

Diese beiden Curven stehen in einem Reciprocitäts-Verhältnisse, welches analytisch durch die Gleichungen (6) ausgedrückt ist, und welches ich in den folgenden Paragraphen weiter entwickeln werde.

Die Function $\varDelta$ ist, wie schon erwähnt wurde, eine homogene Function vierter Ordnung in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes Π. Sie ist eine allgemeine Function von dieser Gattung, wenn man die 30 Coëfficienten, welche die Function $2F$ enthält und aus welchen die 15 Terme der Entwickelung von $\varDelta$ zusammengesetzt sind, unbestimmt lässt. Man kann sogar über einige dieser 30 Coëfficienten nach Belieben verfügen, ohne der Function $\varDelta$ dadurch den Charakter der Allgemeinheit zu nehmen. Aus diesem Grunde *stellt die Gleichung $\varDelta = 0$ eine beliebige ebene Curve vierter Ordnung dar,* und die Eigenschaften, welche wir in den folgenden Paragraphen an dieser Curve vierter Ordnung entwickeln werden, haben allgemeine Gültigkeit für die ebenen Curven vierter Ordnung.

Zu eben derselben Gleichung (10), nur durch einen constanten Factor verschiedenen, gelangt man auch, wenn man für die Coordinaten des Punktes P in der Function $2F$ lineäre Substitutionen neuer Variabeln macht, hierauf nach diesen neuen Variabeln differentiirt, die Differentialquotienten gleich 0 setzt, um die den Gleichungen (6) entsprechenden zu erhalten, und aus diesen Gleichungen die neuen Variabeln eliminirt. In der That: macht man die Substitutionen:

$$
11. \quad \begin{cases} x = x_1 X + x_2 Y + x_3 Z + x_4 P, \\ y = y_1 X + y_2 Y + y_3 Z + y_4 P, \\ z = z_1 X + z_2 Y + z_3 Z + z_4 P, \\ p = p_1 X + p_2 Y + p_3 Z + p_4 P, \end{cases}
$$

so geht durch dieselben die Function $2F$ in

$$12.\quad \begin{aligned} 2F = F_{11}X^2 + F_{22}Y^2 + F_{33}Z^2 + F_{44}P^2 + 2F_{12}XY + 2F_{13}XZ \\ + 2F_{14}XP + 2F_{23}YZ + 2F_{24}YP + 2F_{34}ZP \end{aligned}$$

über; in welchem Ausdrucke der Kürze wegen

$$13.\quad F_{pq} = x_p F' x_q + y_p F' y_q + z_p F' z_q + p_p F' p_q$$

gesetzt ist.

Bildet man nun das den Gleichungen (6) entsprechende System

$$14.\quad 2F'X = 0, \quad 2F'Y = 0, \quad 2F'Z = 0, \quad 2F'P = 0$$

und bezeichnet durch $\digamma$ die aus den Coëfficienten der neuen Variabeln in diesen Gleichungen gebildete Determinante:

$$15.\quad \digamma = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{vmatrix},$$

so wird

$$16.\quad \digamma = 0$$

das Resultat der Elimination der neuen Variabeln aus den zuletzt genannten vier Gleichungen (14), und man erhält:

$$17.\quad \Delta r^2 = \digamma;$$

in welcher Gleichung r die Determinante bedeutet, gebildet aus den Coëfficienten der Substitutionen (11) (s. Crelle's Journ. Bd. 42, S. 118)[1]).

3.

Eine in der Ebene der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ gegebene gerade Linie

$$18.\quad A\varkappa + B\lambda + C\mu = 0$$

schneidet die Curve in vier Punkten Π. Wir wollen untersuchen, welche Eigenschaften die diesen vier Punkten entsprechenden Punkte P der Curve der Kegelspitzen zeigen.

---

1) [Seite 291 dieser Ausgabe.]

Setzen wir zu diesem Zwecke den Werth von μ aus der Gleichung (18) in das System Gleichungen (6), so geht das letztere in

$$19. \quad \begin{cases} \varkappa\left(\frac{f'x}{A} - \frac{\psi'x}{C}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi'x}{B} - \frac{\psi'x}{C}\right) = 0, \\ \varkappa\left(\frac{f'y}{A} - \frac{\psi'y}{C}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi'y}{B} - \frac{\psi'y}{C}\right) = 0, \\ \varkappa\left(\frac{f'z}{A} - \frac{\psi'z}{C}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi'z}{B} - \frac{\psi'z}{C}\right) = 0, \\ \varkappa\left(\frac{f'p}{A} - \frac{\psi'p}{C}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi'p}{B} - \frac{\psi'p}{C}\right) = 0 \end{cases}$$

über. Diese Gleichungen bestimmen aber die Spitzen P von vier Kegeln zweiter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen zweiter Ordnung

$$20. \quad \frac{f}{A} - \frac{\psi}{C} = 0, \quad \frac{\varphi}{B} - \frac{\psi}{C} = 0$$

hindurchlegen lassen. In der That: eliminirt man aus den Gleichungen (19) die Coordinaten der Spitze P des Kegels

$$\varkappa\left(\frac{f}{A} - \frac{\psi}{C}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi}{B} - \frac{\psi}{C}\right) = 0,$$

so erhält man eine Gleichung vierten Grades in $\frac{\lambda}{\varkappa}$, deren Wurzeln die vier Kegel bestimmen. Es ist hierdurch folgender Satz bewiesen:

Den vier Schnittpunkten Π der ebenen Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ und einer beliebigen geraden Linie entsprechen in der Curve der Kegelspitzen vier Punkte P, welche die Spitzen von vier durch die sieben gegebenen Punkte gelegten Kegeln zweiter Ordnung sind, die sich in einer und derselben Curve schneiden.

Da zwei von den genannten vier Kegelspitzen die beiden anderen bestimmen, so kann man auch sagen,

dass umgekehrt den Spitzen P von vier Kegeln zweiter Ordnung, welche durch die sieben gegebenen Punkte hindurchgehen, vier in einer geraden Linie liegende Punkte Π entsprechen, wenn die Kegel sich in einer und derselben Curve schneiden.

Den Schnittpunkten einer zweiten geraden Linie

$$21. \qquad A_1 \varkappa + B_1 \lambda + C_1 \mu = 0$$

und der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechen auf der Curve der Kegelspitzen vier Punkte, welche die Spitzen von vier Kegeln zweiter Ordnung sind, die sich in der durch folgende beiden Oberflächen bestimmten Curve schneiden:

$$22. \qquad \frac{f}{A_1} - \frac{\psi}{C_1} = 0, \quad \frac{\varphi}{B_1} - \frac{\psi}{C_1} = 0.$$

Die Werthe der Coordinaten, welche den Gleichungen (20), ebenso die, welche den Gleichungen (22) genügen, genügen auch der Gleichung:

$$23. \qquad f(BC_1 - B_1 C) + \varphi(CA_1 - C_1 A) + \psi(AB_1 - A_1 B) = 0.$$

Daher liegen die beiden Curven (20) und (22) auf einer und derselben Oberfläche zweiter Ordnung (23), welche durch die sieben im Raume gegebenen Punkte hindurchgeht. Diese Oberfläche bleibt ungeändert, wenn man die gerade Linie (18) um den Schnittpunkt derselben und der geraden Linie (21) beliebig dreht. Es lässt sich also sagen: Wenn K, L, M die Coordinaten eines beliebigen Punktes π in der Ebene der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ bezeichnen und man dreht um diesen Punkt eine gerade Linie, welche die Curve in vier Punkten Π schneidet, so sind die den vier Schnittpunkten entsprechenden Punkte P die Spitzen von vier durch die sieben Punkte des Raumes gehenden Kegeln zweiter Ordnung, welche sich in einer Curve schneiden, die auf der Oberfläche liegt, deren Gleichung

$$24. \qquad Kf + L\varphi + M\psi = 0$$

ist. Diese Oberfläche wird durch die zuletzt genannte Curve erzeugt. Nimmt man die Oberfläche (24) als gegeben an, so lassen sich unendlich viele Curven (20) auf ihr durch die sieben Punkte gehend construiren, und jeder dieser Curven (20) entspricht eine durch den Punkt π gehende gerade Linie (18). Wenn diese gerade Linie zur Tangente der Curve $\Delta = 0$ wird, so wird die ihr entsprechende Curve einen Doppelpunkt haben, indem dem Tangirungspunkte der Tangente der Doppelpunkt der Curve entspricht. Es giebt also auf der Oberfläche (24) zwölf Curven (20), welche durch die sieben Punkte hindurchgehen und einen Doppelpunkt

haben. Die zwölf Doppelpunkte sind die Schnittpunkte der Oberfläche (24) mit der Curve der Kegelspitzen. Der Beweis dieser Behauptung lässt sich leicht mit Hülfe des ersten Satzes des folgenden Paragraphen geben.

Die Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung, welche durch die auf der Oberfläche (23) liegende Curve (20) gehen, bilden ein System *harmonischer Pole* der Oberfläche. Ebenso bilden die Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung, welche durch die auf derselben Oberfläche (23) liegende Curve (22) hindurchgehen, ein System harmonischer Pole der Oberfläche. Wir haben also zwei Systeme harmonischer Pole derselben Oberfläche zweiter Ordnung, welche sich, wie in Crelle's Journal Bd. 20 p. 296 [1]) gezeigt worden ist, als die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung betrachten lassen. Demnach haben wir folgenden Satz:

Den acht Schnittpunkten Π zweier geraden Linien und der ebenen Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechen acht Punkte P in der Curve der Kegelspitzen, welche die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung sind.

4.

Die Gleichungen (6) werden zu folgenden, wenn man sie nach den Coordinaten des Punktes P ordnet:

$$25. \quad \begin{cases} F'x = u_{11}x + u_{12}y + u_{13}z + u_{14}p = 0, \\ F'y = u_{21}x + u_{22}y + u_{23}z + u_{24}p = 0, \\ F'z = u_{31}x + u_{32}y + u_{33}z + u_{34}p = 0, \\ F'p = u_{41}x + u_{42}y + u_{43}z + u_{44}p = 0. \end{cases}$$

Aus je drei dieser Gleichungen ergeben sich die Verhältnisse der Coordinaten des Punktes P. Um sie bequem darzustellen, wollen wir

$$26. \quad \frac{\partial \Delta}{\partial u_{m,m}} = U_{m,m}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial u_{m,n}} = U_{m,n} = U_{n,m}$$

setzen, indem wir unter dem Zeichen $\frac{\partial \Delta}{\partial u_{m,n}}$ den partiellen Differentialquotienten von Δ *nur* nach $u_{m,n}$ genommen verstehen, unbekümmert darum, dass $u_{m,n} = u_{n,m}$ ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man:

---

1) [Seite 36 dieser Ausgabe.]

$$\begin{aligned} x:y:z:p &= U_{11}:U_{12}:U_{13}:U_{14} \\ &= U_{21}:U_{22}:U_{23}:U_{24} \\ &= U_{31}:U_{32}:U_{33}:U_{34} \\ &= U_{41}:U_{42}:U_{43}:U_{44}, \end{aligned}$$

woraus, wenn man durch ϱ einen unbestimmten Coëfficienten bezeichnet, folgendes, dem Systeme (6) aequivalente System von Gleichungen hervorgeht:

$$27. \quad \begin{cases} x^2 = \varrho U_{11}, & y^2 = \varrho U_{22}, & z^2 = \varrho U_{33}, & p^2 = U_{44}, \\ xy = \varrho U_{12}, & yz = \varrho U_{23}, & zp = \varrho U_{34}, \\ xz = \varrho U_{13}, & yp = \varrho U_{24}, \\ xp = \varrho U_{14}. \end{cases}$$

Da die Grössen U in diesen zehn Gleichungen in Rücksicht auf die Coordinaten des Punkts Π homogene Functionen dritter Ordnung sind, also lineäre Ausdrücke in Rücksicht auf die zehn Producte $\varkappa^3$, λ^3, μ^3, $\varkappa^2\lambda$, $\varkappa^2\mu$, $\lambda^2\varkappa$, $\lambda^2\mu$, $\mu^2\varkappa$, $\mu^2\lambda$, $\varkappa\lambda\mu$, so kann man auch jene zehn Gleichungen nach diesen zehn Producten lineär auflösen, wodurch sich Gleichungen von der Form:

$$28. \quad \begin{cases} \varkappa^3 = V_{111}, & \varkappa^2\lambda = V_{112}, & \lambda^2\varkappa = V_{221}, & \mu^2\varkappa = V_{331}, \\ \lambda^3 = V_{222}, & \varkappa^2\mu = V_{113}, & \lambda^2\mu = V_{223}, & \mu^2\lambda = V_{332}, \\ \mu^3 = V_{333}, & & \varkappa\lambda\mu = V_{123}, \end{cases}$$

ergeben, in welchen Gleichungen die Grössen V homogene Functionen zweiter Ordnung in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes P darstellen.

Es geht nun durch die Substitutionen (27) die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung:

$$29. \quad \alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \cdots + 2\alpha_{12}xy + \cdots = 0,$$

in die Gleichung einer ebenen Curve dritter Ordnung:

$$30. \quad \alpha_{11}U_{11} + \alpha_{22}U_{22} + \cdots + 2\alpha_{12}U_{12} + \cdots = 0,$$

über; und umgekehrt geht durch die Substitutionen (28) die Gleichung einer ebenen Curve dritter Ordnung:

$$31. \quad \beta_{111}\varkappa^3 + \beta_{222}\lambda^3 + \cdots + 3\beta_{112}\varkappa^2\lambda + \cdots + 6\beta_{123}\varkappa\lambda\mu = 0,$$

in die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung:

$$32. \quad \beta_{111}V_{111} + \beta_{222}V_{222} + \cdots + 3\beta_{112}V_{112} + \cdots + 6\beta_{123}V_{123} = 0,$$

über.

Hieraus lässt sich schliessen,

dass den Schnittpunkten P der Curve der Kegelspitzen und einer beliebigen Oberfläche zweiter Ordnung die Schnittpunkte Π der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ und einer durch die Oberfläche bestimmten Curve dritter Ordnung entsprechen; und dass umgekehrt den Schnittpunkten Π der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ und einer beliebigen ebenen Curve dritter Ordnung die Schnittpunkte P der Curve der Kegelspitzen und einer durch die Curve dritter Ordnung bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung entsprechen.

Da nun die Curve $\Delta = 0$ von einer Curve dritter Ordnung in zwölf Punkten geschnitten wird, so wird auch die der Curve dritter Ordnung entsprechende Oberfläche zweiter Ordnung, sowie jede Oberfläche zweiter Ordnung, die Curve der Kegelspitzen in zwölf Punkten schneiden. Aus dem eben bewiesenen Satze, *dass die Curve der Kegelspitzen von einer beliebigen Oberfläche zweiter Ordnung in zwölf Punkten geschnitten wird,* folgt, wenn man die Oberfläche zweiter Ordnung in ein Ebenenpaar übergehen lässt, *dass jede Ebene die Curve der Kegelspitzen in sechs Punkten schneidet,* was schon in dem ersten Paragraphen auf einem andern Wege bewiesen wurde.

Die Particularisirung der Gleichungen (31) und (29) führt zu den interessantesten Resultaten.

Nehmen wir zum Beispiel an, die Gleichung der Curve dritter Ordnung (31) sei:

$$\varkappa\lambda\mu = 0,$$

so ist die Gleichung der dieser Curve entsprechenden Oberfläche zweiter Ordnung (32):

$$V_{123} = 0.$$

Diese Oberfläche geht also durch die zwölf Punkte P hindurch, welche den Schnittpunkten Π der drei geraden Linien $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ und der Curve $\Delta = 0$ entsprechen. Die zwölf Punkte P sind aber nichts anderes als die Spitzen der Kegel zweiter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve von je zweien der drei Oberflächen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ hindurchlegen lassen. Wir haben daher folgenden Satz:

Wenn drei Oberflächen zweiter Ordnung gegeben sind, so schneiden sich je zwei von ihnen in einer Curve doppelter Krümmung, durch welche sich vier Kegel zweiter Ordnung hindurchlegen lassen. Die Spitzen der zwölf Kegel, welche sich durch die drei Schnittcurven der Oberflächen hindurchlegen lassen, liegen wieder auf einer Oberfläche zweiter Ordnung.

Wenn der Theil links der Gleichung (31) ein vollständiger *Cubus* $(\beta_1 \varkappa + \beta_2 \lambda + \beta_3 \mu)^3$ ist, so erhält man aus der Gleichung (32) die Gleichung

$$33. \quad \beta_1^3 V_{111} + \beta_2^3 V_{222} + \cdots + 3\beta_1^2 \beta_2 V_{112} + \cdots + 6\beta_1 \beta_2 \beta_3 V_{123} = 0,$$

welche mit den drei willkürlichen Constanten β ein ganzes System von Oberflächen zweiter Ordnung darstellt, welche die Curve der Kegelspitzen viermal dreipunktig berühren. Man wird bemerken, dass von diesen vier Berührungspunkten zwei beliebig auf der Curve angenommen werden können, und dass die beiden andern Berührungspunkte durch die beiden ersten in der Weise bestimmt sind, dass die vier Kegel zweiter Ordnung, welche von den Berührungspunkten als Spitzen der Kegel durch die sieben im Raume gegebenen Punkte gelegt werden, sich in einer und derselben Curve doppelter Krümmung schneiden.

Die acht Berührungspunkte von zwei Oberflächen aus dem genannten System lassen sich als die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung betrachten, und die zwölf Berührungspunkte von drei Oberflächen des Systems liegen auf einer Oberfläche zweiter Ordnung. Wenn man daher durch die acht Berührungspunkte irgend zweier Oberflächen des Systems irgend eine Oberfläche zweiter Ordnung legt, so schneidet sie die Curve der Kegelspitzen in vier neuen Punkten, welche die Berührungspunkte einer dritten Oberfläche des Systems sind.

Unter diesen Oberflächen zweiter Ordnung giebt es auch solche, welche die Curve der Kegelspitzen zweimal sechspunktig berühren. Sie entsprechen den Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$. Endlich hat man noch Oberflächen zweiter Ordnung, welche die Curve der Kegelspitzen zwei mal, das eine mal neunpunktig, das andere mal dreipunktig berühren. Sie entsprechen den Wendetangenten der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$.

Wir wollen die sich hier aufdrängende Frage, ob ausser den genannten Oberflächen zweiter Ordnung noch andere gefunden werden können, welche die Curve der Kegelspitzen vier mal dreipunktig berühren, unerörtert lassen, und nur bemerken, dass sie gleichbedeutend ist mit der Frage, ob es Curven dritter Ordnung giebt, welche die gegebene Curve vierter Ordnung vier mal dreipunktig berühren. Da nur die Untersuchung der Curve der Kegelspitzen hier von Interesse ist insofern, als man von den Eigenschaften dieser Curve auf entsprechende Eigenschaften der ebenen Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ nach dem Vorhergehenden zu schliessen berechtigt ist, so wollen wir uns damit begnügen, in dem folgenden Paragraphen die Zahl der discutirten speciellen Fälle der Gleichung (31) nur noch um einen zu vermehren, indem wir untersuchen werden, welche acht Punkte auf der Curve der Kegelspitzen den Schnittpunkten eines Kegelschnittes und der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechen.

5.

Man nehme an, dass die Gleichung (31) die Form

$$34. \qquad (a\varkappa + b\lambda + c\mu) F(\varkappa\lambda\mu) = 0$$

habe, in welcher Gleichung $F(\varkappa\lambda\mu)$ eine homogene Function zweiter Ordnung bedeutet. Unter dieser Voraussetzung zerfällt die Curve dritter Ordnung (31) in einen *Kegelschnitt* $F(\varkappa\lambda\mu) = 0$ und in eine *gerade Linie* $a\varkappa + b\lambda + c\mu = 0$. Durch Substitution der Producte der Variabeln aus (28) in der entwickelten Gleichung (34) geht dieselbe in eine Gleichung von der Form:

$$v_{11} x^2 + v_{22} y^2 + \cdots + 2 v_{12} xy + \cdots = 0$$

über, in welcher die Coëfficienten v lineäre homogene Ausdrücke der Grössen a, b, c sind. Es stellt sich die zuletzt genannte Gleichung, nach diesen Grössen geordnet, wie folgt dar:

$$35. \qquad aA + bB + cC = 0.$$

In dieser Gleichung bezeichnen A, B, C, in Rücksicht auf die Variabeln x, y, z, p, homogene Functionen zweiter Ordnung, welche allein von der Function $F(\varkappa\lambda\mu)$ abhangen. Aus diesem Grunde stellt

die Gleichung (35), wenn man darin a, b, c variiren lässt, ein ganzes System von Oberflächen zweiter Ordnung dar, welche sämmtlich durch die acht Punkte der Curve der Kegelspitzen hindurchgehen, die den acht Schnittpunkten des Kegelschnittes $F(\varkappa\lambda\mu) = 0$ und der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ entsprechen. Die acht Punkte, durch welche alle jene Oberflächen hindurchgehen, sind aber die Schnittpunkte der drei Oberflächen zweiter Ordnung $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Man kann daher den am Ende des § 3 angegebenen Satz wie folgt vervollständigen:

Den acht Schnittpunkten Π eines Kegelschnitts und einer ebenen Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ entsprechen acht Punkte P auf der Curve der Kegelspitzen, welche die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung sind.

6.

Die Particularisirung der Gleichung (29) leitet auf Eigenschaften der ebenen Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ hin. In der That: nehmen wir an, der Theil links der Gleichung (29) sei ein vollständiges Quadrat $(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 p)^2$, so erhält man aus der Gleichung (30):

36. $$\alpha_1^2 U_{11} + \alpha_2^2 U_{22} + \cdots + 2\alpha_1\alpha_2 U_{12} + \cdots = 0,$$

die Gleichung mit den vier willkürlichen Constanten eines ganzen Systems von *Berührungscurven* dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ sechs mal berühren. Die Berührungspunkte sind nämlich die den sechs Schnittpunkten P der Ebene $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 p = 0$ (welche wir mit α bezeichnen wollen) und der Curve der Kegelspitzen entsprechenden Punkte Π der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$.

Da von den sechs Schnittpunkten P der Ebene α und der Curve der Kegelspitzen drei beliebig angenommen werden können, wodurch die drei anderen bestimmt sind, so können auch von den Berührungspunkten der Curve (36) und der Curve $\varDelta = 0$ drei Berührungspunkte auf der letzteren Curve beliebig angenommen werden, durch welche die drei anderen bestimmt sind; was sich auch aus der Zahl der willkürlichen Constanten in der Gleichung (36) nachweisen lässt.

Die sechs Berührungspunkte der Berührungscurve dritter Ordnung liegen nicht in einem Kegelschnitt.

Denn wenn sich durch die sechs Berührungspunkte ein Kegelschnitt hindurchlegen liesse, so würde er die Curve vierter Ordnung in acht Punkten schneiden, deren entsprechende P, nach dem Satze des vorhergehenden Paragraphen, die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung sind. Da aber sechs von diesen Schnittpunkten in der bezeichneten Ebene α liegen, so können diese nicht als Schnittpunkte von drei Oberflächen zweiter Ordnung betrachtet werden.

Eine andere Berührungscurve dieses Systems wird zur Gleichung

$$37. \qquad \gamma_1^2 U_{11} + \gamma_2^2 U_{22} + \cdots + 2\gamma_1\gamma_2 U_{12} + \cdots = 0$$

haben, auf gleiche Weise der Ebene $\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 p = 0$ entsprechend. Da nun die genannten beiden Ebenen, mit einander verbunden, eine Oberfläche zweiter Ordnung:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 p)(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 p) = 0,$$

darstellen, welche durch die zwölf den Berührungspunkten Π von (36) und (37) entsprechenden Punkte P der Curve der Kegelspitzen hindurchgeht, so wird auch die dieser Oberfläche entsprechende Curve dritter Ordnung:

$$38. \qquad \alpha_1\gamma_1 U_{11} + \alpha_2\gamma_2 U_{22} + \cdots + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) U_{12} + \cdots = 0,$$

durch die zwölf Berührungspunkte von (36) und (37) hindurchgehen. Es ist hierin der Beweis des folgenden Satzes zu erkennen:

Wenn man durch die sechs Berührungspunkte einer Berührungscurve einer gegebenen Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ eine beliebige Curve dritter Ordnung hindurchlegt, so schneidet sie die gegebene Curve vierter Ordnung in noch sechs Punkten, in welchen eine andere, demselben System angehörige Berührungscurve die gegebene Curve vierter Ordnung berührt.

Es ist noch zu bemerken,

dass die Berührungspunkte zweier Berührungscurven desselben Systems auf einer Curve dritter Ordnung liegen.

Unter den Berührungscurven giebt es auch solche, welche die Curve vierter Ordnung 3 mal vierpunktig berühren. Die Berührungspunkte entsprechen den Berührungspunkten einer Ebene, welche die Curve der Kegelspitzen in drei verschiedenen Punkten berührt. Die Berührungs-

punkte zweier solcher Curven sind zugleich die Berührungspunkte einer Berührungscurve, welche aber nicht demselben Systeme angehört, da ihre Berührungspunkte nicht den Schnittpunkten einer Ebene und der Curve der Kegelspitzen, sondern zweier Ebenen entsprechen.

Bezeichnet man die negativen Theile links der Gleichungen (36), (37) und (38) respective mit a, c, b, so lassen sich dieselben wie folgt ausdrücken:

39.
$$a = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix}, \qquad c = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \gamma_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \gamma_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix},$$
$$b = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix},$$

und man hat, wie ich in der vorhergehenden Abhandlung „Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie" durch die Gleichung (8)* gezeigt habe:

40.
$$\varDelta U = ac - b^2,$$

aus welcher identischen Gleichung ich in der genannten Abhandlung den zuletzt aufgestellten Satz abgeleitet habe.[1])

Es tritt uns hier die Frage entgegen, ob das aufgestellte System von Berührungscurven das einzige sei, welches die Curve vierter Ordnung aufzuweisen hat, oder ob ausser ihm noch andere existiren. Man wird leicht sehen, dass diese Frage mit der Frage nach den verschiedenen Functionen F, deren Determinanten entwickelt dieselbe homogene Function $\varDelta$ der vierten Ordnung sind, gleichbedeutend ist. Durch lineäre Substitutionen von der Form (11) geht die in (8) gegebene Function F zwar in eine neue über, wie sie in (12) dargestellt ist, allein die Deter-

---

1) Die folgenden Citate mit dem Zeichen * beziehen sich auf meine Abhandlung „Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie" (Crelle's Journal Bd. 49 S. 243 [No. 24 dieses Bandes]).

minante dieser neuen Function ist von der Determinante der ersten nur durch einen Factor verschieden, wie es die Gleichung (17) beweist, und die Gleichungen der Berührungscurven, welche sich von den beiden Functionen F auf die beschriebene Weise ableiten lassen, unterscheiden sich, wie es die identische Gleichung (11)* in der citirten Abhandlung beweist, nur durch einen constanten Factor. Da also zwei Functionen F auf dasselbe System Berührungscurven führen, wenn die beiden Functionen durch lineäre Substitutionen von der Form (11) auf einander zurückgeführt werden können, so werden wir zwei Functionen F von der beschriebenen Art nicht als verschiedene Functionen zu betrachten haben.

Es mag hier genügen, auf die Frage nach den verschiedenen Functionen F, deren Determinanten dieselbe homogene Function $\varDelta$ der vierten Ordnung sind, aufmerksam gemacht zu haben. Die Beantwortung dieser Frage soll in den zunächst folgenden Paragraphen vorbereitet werden.

7.

Unter den Oberflächen, welche, wie wir gesehen haben, die Curve der Kegelspitzen in zwölf Punkten schneiden, verdienen die Oberflächen, welche durch die sieben im Raume gegebenen Punkte hindurchgehen, einer besonderen Erwähnung. Bezeichnet man durch K, L, M die Coordinaten eines beliebigen Punktes π in der Ebene der betrachteten Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$, so ist die allgemeinste Form der Gleichung jener Oberflächen:

41. $$Kf + L\varphi + M\psi = 0.$$

Wir wollen nun untersuchen, in welche Gleichung die angegebene Gleichung durch die Substitutionen (27) übergeht.

Zu diesem Zwecke differentiire man die Gleichung (9) nach $\varkappa$, welches

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial \varkappa} = \frac{\partial \varDelta}{\partial u_{11}} \frac{\partial u_{11}}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \varDelta}{\partial u_{22}} \frac{\partial u_{22}}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \varDelta}{\partial u_{12}} \frac{\partial u_{12}}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \varDelta}{\partial u_{21}} \frac{\partial u_{21}}{\partial \varkappa} + \cdots,$$

und, mit Rücksicht auf (26),

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial \varkappa} = U_{11} \frac{\partial u_{11}}{\partial \varkappa} + U_{22} \frac{\partial u_{22}}{\partial \varkappa} + U_{12} \frac{\partial u_{12}}{\partial \varkappa} + U_{21} \frac{\partial u_{21}}{\partial \varkappa} + \cdots$$

giebt. Substituirt man in dieser Gleichung für die Grössen U ihre Werthe aus (27), so erhält man:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varkappa} = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial u_{11}}{\partial \varkappa}x^2 + \frac{\partial u_{22}}{\partial \varkappa}y^2 + 2\,\frac{\partial u_{12}}{\partial \varkappa}xy + \cdots\right\}.$$

Bemerkt man nun, dass der mit $\frac{1}{\varrho}$ multiplicirte Theil der Gleichung nach (8) der partielle Differentialquotient von $2F$ nach $\varkappa$ genommen ist, insofern diese Grösse $\varkappa$ in den Coëfficienten u der Function $2F$ enthalten ist, so hat man, mit Rücksicht auf (2):

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varkappa} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial 2F}{\partial \varkappa} = \frac{1}{\varrho}\cdot f.$$

Auf diese Weise ergiebt sich durch Differentiation von (9) nach $\varkappa, \lambda, \mu$:

42. $$\frac{\partial \Delta}{\partial \varkappa} = \frac{1}{\varrho}\cdot f,\qquad \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = \frac{1}{\varrho}\cdot \varphi,\qquad \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} = \frac{1}{\varrho}\cdot \psi.$$

Setzt man diese Werthe von f, φ, ψ endlich in die Gleichung (41), so geht dieselbe, mit Weglassung des Factors ϱ, in

43. $$K\frac{\partial \Delta}{\partial \varkappa} + L\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} + M\frac{\partial \Delta}{\partial \mu} = 0$$

über. Dies ist bekanntlich die Gleichung der Curve dritter Ordnung, welche die Curve der vierten Ordnung $\Delta = 0$ in den Berührungspunkten der von dem Punkte π an die Curve gezogenen Tangenten schneidet. Wir haben demnach folgende Sätze:

Den zwölf Schnittpunkten P einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die sieben im Raume gegebenen Punkte gelegt ist, und der Curve der Kegelspitzen, entsprechen in der ebenen Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ die Berührungspunkte Π der von einem durch die Oberfläche bestimmten Punkte π an die Curve gelegten Tangenten.

Den zwölf Berührungspunkten Π der von einem beliebigen Punkte π an die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ gezogenen Tangenten entsprechen auf der Curve der Kegelspitzen zwölf Punkte P, welche auf einer durch die sieben gegebenen Punkte gelegten und durch den Punkt π näher bestimmten Oberfläche zweiter Ordnung liegen.

8.

Wenn in der in (15) angegebenen Determinante ∇ die Elemente F_{11}, F_{22}, F_{12} verschwinden, so wird dieselbe zu einem vollständigen Quadrat

44. $$D^2 = \begin{vmatrix} F_{13} & F_{14} \\ F_{23} & F_{24} \end{vmatrix}^2.$$

Wir werden uns dieses Umstandes bedienen, um die Gleichungen der Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ abzuleiten.

Ueber die Coëfficienten in den Substitutionen (11) sind in dem Vorhergehenden keine Bestimmungen gemacht worden. Betrachten wir dieselben als die Coordinaten von vier Punkten des Raumes 1, 2, 3, 4, indem wir annehmen, dass die Coëfficienten mit dem Index 1 dem ersten dieser vier Punkte entsprechen etc., so steht es frei, diesen Punkten bestimmte Lagen im Raume anzuweisen, wodurch die Coëfficienten in den Substitutionen (11) eben bestimmt werden. Wir wollen annehmen, dass die Punkte 1 und 2 zwei von den acht Schnittpunkten der drei Oberflächen f, φ und ψ seien. Unter dieser Annahme verschwinden die Elemente F_{11} und F_{22} der Determinante ∇, weil die Coëfficienten von $\varkappa$, λ, μ in den genannten Elementen verschwinden, und die Gleichung der Curve vierter Ordnung nimmt die Gestalt

45. $$r^2 \Delta = \nabla = \begin{vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{vmatrix} = 0$$

an. Es ist nun

$$F_{12} = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in vier Punkten schneidet. Die Coordinaten der vier Schnittpunkte genügen der Gleichung (45) und der Gleichung $F_{12} = 0$. Sie genügen auch den genannten beiden Gleichungen, wenn man in der ersteren $F_{12} = 0$ setzt. Sie genügen mithin den beiden Gleichungen

$$D^2 = 0 \quad \text{und} \quad F_{12} = 0;$$

das heisst, sie fallen paarweise zusammen. Eine gerade Linie, welche die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in vier Punkten schneidet, die paar-

weise zusammenfallen, nennt man aber eine *Doppeltangente* der Curve. Es ist mithin die Gleichung $F_{12}=0$ die Gleichung einer *Doppeltangente* der Curve vierter Ordnung $\varDelta=0$, und $D=0$ ist die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher durch die Berührungspunkte der Doppeltangente hindurchgeht.

Es lässt sich auch die Lage der den Berührungspunkten $\varPi$ der genannten Doppeltangente der Curve vierter Ordnung $\varDelta=0$ entsprechenden Punkte P in der Curve der Kegelspitzen näher bezeichnen. Legt man nämlich durch die Punkte 1, 2, in welchen sich der Annahme nach die drei Oberflächen f, φ, ψ schneiden, eine gerade Linie, so schneidet dieselbe die Curve der Kegelspitzen in zwei Punkten P, welche den Berührungspunkten $\varPi$ der Doppeltangente entsprechen. Diese Behauptung werden wir durch die folgende Betrachtung rechtfertigen.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der geraden Linie 12 sind bekanntlich:

$$x_1+\varrho x_2, \qquad y_1+\varrho y_2, \qquad z_1+\varrho z_2, \qquad p_1+\varrho p_2.$$

Setzt man diese für x, y, z, p in die Gleichungen (6), so erhält man:

$$\begin{aligned}
u &= F'x_1+\varrho F'x_2=0,\\
v &= F'y_1+\varrho F'y_2=0,\\
w &= F'z_1+\varrho F'z_2=0,\\
r &= F'p_1+\varrho F'p_2=0.
\end{aligned}$$

Es wird nun zu beweisen sein, dass diesen vier Gleichungen genügt werden kann; oder, was dasselbe ist, dass dem folgenden Systeme genügt wird:

$$\begin{aligned}
x_1u+y_1v+z_1w+p_1r &= 0,\\
x_2u+y_2v+z_2w+p_2r &= 0,\\
x_3u+y_3v+z_3w+p_3r &= 0,\\
x_4u+y_4v+z_4w+p_4r &= 0.
\end{aligned}$$

Den beiden ersten von diesen Gleichungen wird genügt, weil F_{11}, F_{22} und F_{12} verschwinden. Die folgende Gleichung, welche $F_{13}+\varrho F_{23}=0$ ist, bestimmt den Werth von ϱ, und die letzte Gleichung $F_{14}+\varrho F_{24}=0$ wird erfüllt, weil $D=0$ ist. Da aber den Gleichungen $D=0$ und $F_{12}=0$ 2 mal genügt wird, so hat auch ϱ zwei Werthe, das heisst, die

gerade Linie 12 schneidet die Curve der Kegelspitzen in zwei verschiedenen Punkten. Demnach haben wir folgenden Satz:

Wenn man zwei von den acht Schnittpunkten der drei Oberflächen zweiter Ordnung f, φ, ψ durch eine gerade Linie verbindet, so schneidet dieselbe die Curve der Kegelspitzen in zwei Punkten P, welche den Berührungspunkten Π einer Doppeltangente der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ entsprechen.

Bezeichnet man nun die acht Schnittpunkte der drei Oberflächen f, φ, ψ mit den Zahlen 1, 2, . . . 8 und verbindet irgend zwei derselben p, q durch eine gerade Linie, so schneidet diese Linie die Curve der Kegelspitzen in zwei Punkten P, deren entsprechende Punkte Π auf der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ die Berührungspunkte der durch die Gleichung:

$$46. \qquad F_{pq} = 0$$

dargestellten Doppeltangente der Curve vierter Ordnung sind.

Wir werden in dem Folgenden sagen, die gerade Linie pq, welche die Schnittpunkte p, q der drei Oberflächen f, φ, ψ verbindet, entspreche der Doppeltangente $F_{pq} = 0$, welche wir der Kürze wegen mit demselben Zeichen pq bezeichnen werden. Man wird aus dieser Bezeichnung nicht Anlass nehmen, zu glauben, dass den geraden Linien pq, welche durch denselben Punkt des Raumes gehen, Doppeltangenten pq entsprechen, welche sich in einem und demselben Punkte der Ebene schneiden. Jene geraden Linien pq entsprechen solchen Doppeltangenten pq, welche ganz andere Eigenschaften haben.

Die Zahl der geraden Linien, welche je zwei von den acht Schnittpunkten der drei Oberflächen f, φ, ψ verbinden, beträgt 28. Ihnen entsprechen also die 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung, welche, wie bekannt, eine solche Curve darbietet.

Man ist nach dem Vorhergehenden im Stande, die Gleichungen der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ einzeln abzuleiten, wenn $\varDelta$ als eine symmetrische Determinante von der Form (9) gegeben ist. Denn kennt man die Elemente u dieser Determinante, so lässt sich aus ihnen die in (8) aufgeführte Function $2F$ componiren, in welcher die Coëfficienten von $\varkappa$, λ, μ die Functionen f, φ, ψ sind. Zur Bildung der Gleichungen der Doppeltangenten brauchen wir noch die Coordinaten

der acht Schnittpunkte der drei Oberflächen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, welche man durch Auflösung einer Gleichung vom achten Grade erhält.

Demnach führt das Problem der Doppeltangenten auf die Transformation eines gegebenen Ausdrucks vierter Ordnung von drei Variabeln in die Form einer symmetrischen Determinante Δ mit linearen Elementen, und demnächst auf die Auflösung einer Gleichung vom achten Grade.

Das Product $\Pi(F_{pq})$ sämmtlicher Functionen F_{pq} ist eine symmetrische Function der Wurzeln der drei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Drückt man diese symmetrische Function durch die Coëfficienten in den genannten drei Gleichungen aus, so erhält man $\Pi(F_{pq}) = 0$: die Gleichung des Systems sämmtlicher Doppeltangenten der gegebenen Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$.

9.

Aus den Gleichungen von sechs Doppeltangenten, welche den sechs Kanten eines Tetraëders entsprechen, dessen Ecken vier Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 der drei Oberflächen f, φ, ψ sind, lässt sich die Gleichung der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ ableiten.

In dem vorhergehenden Paragraph wurde nachgewiesen, dass der Kegelschnitt $D = 0$ die Doppeltangente 12 in den Berührungspunkten schneidet. Bemerkt man nun, dass D ungeändert bleibt, wenn 1 mit 3 und gleichzeitig 2 mit 4 vertauscht werden, so darf man hieraus schliessen, dass der Kegelschnitt

$$D = F_{13} F_{24} - F_{23} F_{14} = 0$$

durch die vier Berührungspunkte der beiden Doppeltangenten 12 und 34 hindurchgeht. Die Form der Gleichung des Kegelschnitts zeigt ferner, dass die Doppeltangentenpaare 13, 24 und 23, 14 die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks bilden, durch dessen Ecken ebenfalls der Kegelschnitt hindurchgeht. Wir haben demnach folgenden Satz:

Wenn drei Doppeltangentenpaare gegeben sind, deren entsprechende Linien die gegenüber liegenden Kanten eines Tetraëders bilden, so geht durch die Berührungspunkte des einen Doppeltangentenpaares und durch die Ecken des durch die beiden andern Doppeltangentenpaare gebildeten Vierecks ein und derselbe Kegelschnitt.

Durch die Berührungspunkte des Doppeltangentenpaares 12, 34, durch welche der Kegelschnitt $D = 0$ hindurchgeht, lässt sich ein ganzes System von Kegelschnitten hindurchlegen:

$$F_{12}F_{34} + \varrho(F_{13}F_{24} - F_{23}F_{14}) = 0.$$

Unter diesen Kegelschnitten zeichnet sich der Kegelschnitt w aus, in dessen Gleichung die willkürliche Constante ϱ den Werth -1 hat, nämlich:

$$w = F_{12}F_{34} + F_{23}F_{14} - F_{13}F_{24} = 0.$$

Diese Gleichung bleibt ungeändert, wenn man 2 mit 4 vertauscht. Daraus folgt, dass der Kegelschnitt durch die Berührungspunkte der beiden Doppeltangentenpaare 12, 34 und 14, 23 hindurchgeht. Wir finden auf diese Weise drei Kegelschnitte u, v, w, nämlich

$$\begin{aligned}
u &= -F_{12}F_{34} + F_{23}F_{14} + F_{13}F_{24} = 0,\\
v &= +F_{12}F_{34} - F_{23}F_{14} + F_{13}F_{24} = 0,\\
w &= +F_{12}F_{34} + F_{23}F_{14} - F_{13}F_{24} = 0,
\end{aligned}$$

von denen der Kegelschnitt u durch die Berührungspunkte der Doppeltangentenpaare 23, 14 und 13, 24 hindurchgeht. Der Kegelschnitt v geht durch die Berührungspunkte der Doppeltangentenpaare 12, 34 und 13, 24; und der Kegelschnitt w geht durch die Berührungspunkte der Doppeltangentenpaare 12, 34 und 23, 14 hindurch. Hierdurch erhellt nachstehender Satz:

Durch die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ lässt sich ein Kegelschnitt legen, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien ein räumliches Viereck bilden.

Der Kegelschnitt u geht durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten 23.14.24.13 hindurch. Es sind daher:

$$u^2 = 0 \quad \text{und} \quad F_{23}.F_{14}.F_{24}.F_{13} = 0$$

die Gleichungen zweier Curven vierter Ordnung, welche sich in sechzehn Punkten schneiden, durch welche auch die Curve $\varDelta = 0$ hindurchgeht. Es müssen sich also zwei Factoren r^2 und ϱ finden lassen, von der Gestalt, dass:

$$r^2\varDelta = u^2 - \varrho F_{23}F_{14}F_{24}F_{13}$$

ist. Da dieser Ausdruck sich aber auf gleiche Weise aus v^2 und $F_{12}F_{34}F_{24}F_{13}$ und aus w^2 und $F_{12}F_{34}F_{23}F_{14}$ zusammensetzen lassen muss, so zeigt sich, dass $\varrho = 4$ sein muss. Man erhält also, indem man für u und ϱ ihre Werthe setzt und entwickelt:

$$47. \quad \begin{aligned} V = r^2\varDelta = F_{12}^2F_{34}^2 + F_{23}^2F_{14}^2 + F_{13}^2F_{24}^2 - 2\,F_{23}F_{14}F_{13}F_{24} \\ - 2\,F_{13}F_{24}F_{12}F_{34} - 2\,F_{12}F_{34}F_{23}F_{14}; \end{aligned}$$

ein Ausdruck, der sich auch unmittelbar durch Entwickelung der in (15) angegebenen Determinante V ergiebt, wenn man berücksichtigt, dass

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$$

ist. Setzt man diesen Ausdruck gleich 0, so haben wir die Gleichung der Curve vierter Ordnung aus den Gleichungen der sechs Doppeltangenten componirt.

Es ist noch zu bemerken, dass der Ausdruck $r^2\varDelta$ sich auch aus u, v, w auf die Weise zusammensetzen lässt, dass:

$$-r^2\varDelta = vw + wu + uv;$$

was geometrisch auch daraus ersichtlich ist, dass die genannten drei Kegelschnitte u, v, w sich gegenseitig nur in den Berührungspunkten der sechs Doppeltangenten schneiden.

10.

Nachdem in § 8 die Lage der Punkte P auf der Curve der Kegelspitzen bestimmt worden, welche den Berührungspunkten Π der Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ entsprechen, wollen wir nun, mit Rücksicht auf diese Bestimmung, mit der in § 6 angefangenen Particularisirung fortfahren.

Wir sahen, wie den sechs Schnittpunkten P einer beliebigen Ebene α und der Curve der Kegelspitzen die sechs Berührungspunkte Π einer Berührungscurve entsprechen. Wenn man die Ebene α durch zwei von den acht Schnittpunkten der drei Oberflächen f, φ, ψ hindurchgehen lässt, so wird die dieser Ebene entsprechende Berührungscurve dritter Ordnung in eine Doppeltangente zerfallen, welche der die genannten beiden Punkte verbindenden geraden Linie L entspricht, und in einen *Berührungskegelschnitt.* In der That: da der Ebene α in unserem Falle

eine Curve dritter Ordnung entspricht, welche die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in zwölf Punkten schneidet, von denen vier in der der geraden Linie L entsprechenden Doppeltangente liegen, so müssen die übrigen Schnittpunkte in einem Kegelschnitt liegen. Dreht man nun die Ebene α um die Linie L herum, so erhält man auf diese Weise ein ganzes System von Berührungskegelschnitten.

Dies lässt sich analytisch verfolgen, wenn man von der in (39) gegebenen Gleichung der Berührungscurve dritter Ordnung:

$$a = 0,$$

ausgeht. Multiplicirt man diese Gleichung mit r^2, so erhält man nach der unter (11)* angegebenen identischen Gleichung:

$$48. \qquad a r^2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & A_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & A_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & A_3 \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & A_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher Gleichung der Kürze wegen

$$A_q = \alpha_1 x_q + \alpha_2 y_q + \alpha_3 z_q + \alpha_4 p_q$$

gesetzt ist. Entwickelt man die angegebene Determinante unter Berücksichtigung, dass $F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$ ist, so erhält man:

$$49. \qquad \begin{aligned} -\frac{ar^2}{2} = & A_1^2 F_{23} F_{24} F_{34} + A_2^2 F_{13} F_{14} F_{34} + A_3^2 F_{12} F_{14} F_{24} + A_4^2 F_{12} F_{13} F_{23} \\ & - \{A_1 A_2 F_{34} + A_3 A_4 F_{12}\} \{- F_{12} F_{34} + F_{23} F_{14} + F_{13} F_{24}\} \\ & - \{A_1 A_4 F_{23} + A_2 A_3 F_{14}\} \{+ F_{12} F_{34} - F_{23} F_{14} + F_{13} F_{24}\} \\ & - \{A_1 A_3 F_{24} + A_2 A_4 F_{13}\} \{+ F_{12} F_{34} + F_{23} F_{14} - F_{13} F_{24}\}. \end{aligned}$$

Wenn nun die Ebene α durch die Punkte 1 und 2 hindurchgeht, so verschwinden die Constanten A_1 und A_2 und die Gleichung der Berührungscurve nimmt die Gestalt

$$F_{12} \{A_3^2 F_{14} F_{24} - A_3 A_4 (- F_{12} F_{34} + F_{23} F_{14} + F_{13} F_{24}) + A_4^2 F_{13} F_{23}\} = 0$$

an; woraus ersichtlich ist, dass die genannte Curve in die Doppeltangente 12 und in einen Berührungskegelschnitt zerfällt, dessen Gleichung

$$50. \qquad A_3^2 F_{14} F_{24} - A_3 A_4 (- F_{12} F_{34} + F_{23} F_{14} + F_{13} F_{24}) + A_4^2 F_{13} F_{23} = 0$$

ist. Der Theil links dieser Gleichung lässt sich in der Form einer Determinante darstellen. Setzt man nämlich:

$$51. \quad \begin{gathered} -F_{14}F_{24} = v_{44}, \qquad -F_{13}F_{23} = v_{33}, \\ F_{12}F_{34} - F_{23}F_{14} - F_{13}F_{24} = 2\,v_{34} = 2\,v_{43}, \end{gathered}$$

so stellt sich die Gleichung (50) so dar:

$$52. \quad \begin{vmatrix} v_{33} & v_{34} & A_3 \\ v_{43} & v_{44} & A_4 \\ A_3 & A_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieses ist also die Gleichung eines Systems von Berührungskegelschnitten der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$, mit den willkürlichen Constanten A_3, A_4.

Man wird bemerken, dass der Theil links dieser Gleichung in zwei lineäre Factoren $F_{13}\,F_{23}$ zerfällt, also a in die drei lineären Factoren $F_{12}F_{13}F_{23}$, wenn $A_3 = 0$ ist, das heisst, wenn die Ebene α durch drei Punkte 1, 2, 3 hindurchgeht. Wie oft also die Ebene α durch drei von den acht Punkten 1, 2 ... 8 gelegt werden kann, so oft zerfällt der Ausdruck a in drei lineäre Factoren. Es lassen sich aber acht Punkte zu dreien 56 mal combiniren. Daher wird die Berührungscurve 56 mal in drei Doppeltangenten zerfallen, oder, analytisch ausgedrückt, der in (39) gegebene Ausdruck a wird durch specielle Annahme der in ihm steckenden Constanten α sich auf 56 Arten in drei lineäre Factoren zerlegen lassen, was ich in § 8* nur historisch mitgetheilt habe und wovon nun hier der Beweis vorliegt.

Wenn man durch die vier Berührungspunkte eines Berührungskegelschnittes der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ einen anderen Kegelschnitt legt, so schneidet er die Curve in noch vier Punkten, in welchen ein zweiter, demselben System zugehöriger Kegelschnitt die Curve berührt. Die acht Berührungspunkte zweier Berührungskegelschnitte desselben Systems liegen wieder auf einem Kegelschnitt.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem zweiten des § 6. Betrachtet man nämlich den Kegelschnitt (52) und die Doppeltangente 12 als eine Berührungscurve dritter Ordnung, und legt durch die Berührungspunkte eine Curve dritter Ordnung, welche in die Doppeltangente 12 und in einen Kegelschnitt zerfällt, so sind die sechs neuen Schnittpunkte die

Berührungspunkte einer Curve dritter Ordnung, bestehend aus der Doppeltangente 12 und einem neuen Berührungskegelschnitt.

Es ist leicht zu sehen, dass die Bedingungsgleichung zwischen den willkürlichen Constanten A_3, A_4, welche erfüllt werden muss, wenn der Theil links der Gleichung (52) in lineäre Factoren zerfallen soll, eine homogene Gleichung sechsten Grades ist. Hieraus folgt, dass das betrachtete System von Berührungskegelschnitten sechs Paare Doppeltangenten enthält.

Nach den vorausgeschickten Erwägungen sind wir im Stande, diese Doppeltangentenpaare des in Rede stehenden Systems von Berührungskegelschnitten näher zu bezeichnen. Es sind folgende Doppeltangentenpaare:

$$13.23 \quad 14.24 \quad 15.25 \quad 16.26 \quad 17.27 \quad 18.28.$$

Durch die acht Berührungspunkte von irgend zwei Paaren dieser Doppeltangenten lässt sich nach dem vorhergehenden Satze ein Kegelschnitt legen; woraus wiederum der letzte Satz des vorhergehenden Paragraphen hervorgeht. Dieser Satz giebt Combinationen von drei Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$, durch deren Berührungspunkte sich ein Kegelschnitt legen lässt. Aus dem ersten Satze des § 6 können wir Combinationen von drei Doppeltangenten herleiten, durch deren Berührungspunkte sich kein Kegelschnitt legen lässt. In der That: da die Doppeltangenten

$$12 \quad 23 \quad 31,$$

wie man sah, eine Berührungscurve des betrachteten Systems $a = 0$ bilden, so lässt sich durch ihre sechs Berührungspunkte kein Kegelschnitt legen. Solcher Combinationen giebt es 56. Man kann also sagen:

Durch die Berührungspunkte von drei Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ lässt sich kein Kegelschnitt legen, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien ein Dreieck bilden.

Betrachtet man die sechs Doppeltangenten:

$$12 \quad 23 \quad 31 \quad 45 \quad 56 \quad 64,$$

oder die sechs Doppeltangenten:

$$12 \quad 23 \quad 31 \quad 45 \quad 34 \quad 35,$$

so bilden die drei ersten eine Berührungscurve $a = 0$ und die drei letzten ebenfalls eine solche Berührungscurve. Nach dem letzten Satze des § 6 lässt sich durch die Berührungspunkte zweier Berührungscurven eine Curve dritter Ordnung hindurchlegen. Mithin liegen die Berührungspunkte der genannten sechs Doppeltangenten auf einer Curve dritter Ordnung. Dieses lässt sich allgemeiner so ausdrücken:

Die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn die den sechs Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien zwei gesonderte Dreiecke bilden, oder wenn sie zwei Dreiecke bilden, welche eine Ecke gemein haben.

Wir haben nur des einen Systems von Berührungskegelschnitten erwähnt, welches sich aus dem betrachteten System von Berührungscurven dritter Ordnung ergab, indem wir die Ebene α, welche die den Berührungspunkten Π der Berührungscurve entsprechenden Punkte P enthielt, um die gerade Linie 12 herumdrehten. Da aber 28 gerade Linien pq vorhanden sind, so erhalten wir auf gleiche Weise durch Umdrehung der Ebene α um diese 28 geraden Linien 28 verschiedene Systeme von Berührungskegelschnitten, welche alle aus dem einen Systeme von Berührungscurven hervorgehen.

11.

In dem § 9* findet sich die Existenz von 28 Systemen von Berührungscurven dritter Ordnung nachgewiesen, welche eine gegebene Curve vierter Ordnung in sechs verschiedenen Punkten berühren, die in einem Kegelschnitt liegen; desgleichen finden sich Eigenschaften dieser Curven entwickelt. Wir vermögen jetzt die Gleichungen dieser Curven selbst abzuleiten.

Zu dem Ende entnehmen wir aus dem § 9 die identische Gleichung:

$$-V = -r^2\Delta = 4\,F_{23}F_{14}F_{24}F_{13} - u^2,$$

deren Theil rechts sich als Determinante darstellt, so dass man

$$-V = -r^2\Delta = \begin{vmatrix} F_{23} & u \\ u & 4\,F_{14}F_{24}F_{13} \end{vmatrix}$$

hat. Die Elemente F_{23}, u, $4 F_{14} F_{24} F_{13}$ in dieser Determinante sind Functionen respective vom ersten, zweiten und dritten Grade in Rücksicht auf die Coordinaten des Punktes Π. Bezeichnet man nun durch a, b, c die Ausdrücke:

$$53. \qquad a = F_{23}, \quad b = u - F_{23} m, \quad c = 4 F_{14} F_{24} F_{13} - 2 u m + F_{23} m^2,$$

so erhält man die identische Gleichung

$$54. \qquad -V = -r^2 \Delta = ac - b^2.$$

Aus der Form dieser identischen Gleichung zeigt sich, wenn man m eine beliebige lineäre Function der Coordinaten des Punktes Π bedeuten lässt, dass $c = 0$ ein ganzes System von Curven dritter Ordnung darstellt, welche die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in sechs verschiedenen Punkten berühren, durch welche der Kegelschnitt $b = 0$ hindurchgeht, der die Curve vierter Ordnung überdies in den Berührungspunkten der Doppeltangente 23 schneidet.

Der Ausdruck c zerfällt in drei lineäre Factoren, wenn $m = 0$ ist. Man kann im Allgemeinen die drei in m steckenden Constanten, so dass c in drei lineäre Factoren zerfällt, auf so viele Arten bestimmen, als sich Combinationen von drei Doppeltangenten finden lassen, deren Berührungspunkte mit den Berührungspunkten der Doppeltangente 23 in einem Kegelschnitt $b = 0$ liegen. Diese Combinationen finden sich auf folgende Art. Man suche die von den, den Doppeltangenten entsprechenden, geraden Linien gebildeten räumlichen Vierecke, welche die Seite 23 gemein haben. Ihre Zahl beträgt 30. Mithin giebt es 30 Combinationen von der beschriebenen Art. Es finden sich ferner 15 andere Combinationen unter der Voraussetzung des Satzes, „dass die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten in einem Kegelschnitt liegen, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien die Punkte 12 . . . 8 paarweise verbinden“: eines Satzes, dessen Beweis am Ende des § 12 gegeben werden wird. Denn es giebt 15 Systeme von drei geraden Linien, welche die sechs Punkte 1, 4, 5, 6, 7, 8 paarweise verbinden. Wir haben also im Ganzen 45 Combinationen von drei Doppeltangenten von der oben bezeichneten Art. Es lässt sich mithin c eben so oft in drei lineäre Factoren zerlegen. Diese Angabe findet man in § 9* ohne Beweis aufgeführt.

12.

Das Problem der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung verlangt, wie sich in § 8 zeigte, die Transformation eines gegebenen homogenen Ausdrucks vierter Ordnung von drei Variabeln in die Form einer symmetrischen Determinante mit linearen Elementen, oder, was dasselbe ist, die Bestimmung einer Function F, deren Determinante $\varDelta$ eben die gegebene Function vierter Ordnung ist. Die Bestimmung dieser Function hat aber grössere Schwierigkeiten, als sich mit den erlangten Hülfsmitteln überwinden lassen. Wir wollen uns daher begnügen, indem wir die Kenntniss der Function F voraussetzen, andere Functionen F zu ermitteln, welche dieselbe Determinante haben.

Es sei die Function F:

$$2F = u_{11}x^2 + u_{22}y^2 + \cdots + 2u_{12}xy + \cdots \tag{55.}$$

bekannt. Durch Bestimmung der Coordinaten der acht Schnittpunkte der drei Oberflächen

$$\frac{\partial 2F}{\partial \varkappa} = f = 0, \quad \frac{\partial 2F}{\partial \lambda} = \varphi = 0, \quad \frac{\partial 2F}{\partial \mu} = \psi = 0$$

erhält man die Coëfficienten in den Substitutionen (11), durch welche die als bekannt vorausgesetzte Function F in

$$F = F_{12}XY + F_{13}XZ + F_{14}XP + F_{23}YZ + F_{24}YP + F_{34}ZP \tag{56.}$$

transformirt wird; und die Determinante ∇ dieser Function, nämlich:

$$\begin{aligned} \nabla = r^2\varDelta = F_{12}^2F_{34}^2 + F_{23}^2F_{14}^2 + F_{13}^2F_{24}^2 - 2F_{23}F_{14}F_{13}F_{24} \\ - 2F_{13}F_{24}F_{12}F_{34} - 2F_{12}F_{34}F_{23}F_{14}, \end{aligned} \tag{57.}$$

ist der gegebene homogene Ausdruck vierter Ordnung, multiplicirt mit r^2; also ist $\nabla = r^2\varDelta = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve vierter Ordnung.

Wir bemerken, dass die Determinante ∇ ungeändert bleibt, wenn man 12 mit 34 vertauscht und gleichzeitig 13 mit 24 und 14 mit 23, während die Function F sich durch diese Vertauschung ändert. Sie geht nämlich in die Function F':

$$F' = F_{34}X'Y' + F_{24}X'Z' + F_{23}X'P' + F_{14}Y'Z' + F_{13}Y'P' + F_{12}Z'P' \tag{58.}$$

über, wenn man gleichzeitig $X', Y', \ldots$ statt der Variabeln $X, Y, \ldots$ setzt.

Diese Function F' ist in der That von der Function F verschieden, denn die eine kann nicht durch lineäre Substitutionen der neuen Variabeln von der andern abgeleitet werden. Beide Functionen haben aber dieselbe Determinante ∇.

Auf gleiche Weise nun, wie die drei Oberflächen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial 2F}{\partial \varkappa} = f = 0, \quad \frac{\partial 2F}{\partial \lambda} = \varphi = 0, \quad \frac{\partial 2F}{\partial \mu} = \psi = 0,$$

deren acht Schnittpunkte mit den Zahlen 1, 2 ... 8 bezeichnet wurden, der Function F entsprechen, entsprechen auch die drei Oberflächen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial 2F'}{\partial \varkappa} = 0, \quad \frac{\partial 2F'}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial 2F'}{\partial \mu} = 0,$$

welche sich in den acht Punkten $1', 2', \ldots 8'$ schneiden mögen, der Function F'. Die Spitzen der Kegel zweiter Ordnung, welche durch diese acht Punkte hindurchgehen, beschreiben wieder eine Curve sechster Ordnung, welche unter Vermittlung der Gleichungen:

$$\frac{\partial 2F'}{\partial X'} = 0, \quad \frac{\partial 2F'}{\partial Y'} = 0, \quad \frac{\partial 2F'}{\partial Z'} = 0, \quad \frac{\partial 2F'}{\partial P'} = 0,$$

analog den Gleichungen (14) der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ entspricht. Es entspricht endlich jeder geraden Linie $p'q'$ eine von den Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$. Da nun auch jeder geraden Linie ab, welche zwei von den acht Punkten 1, 2, ... 8 verbindet, eine von den Doppeltangenten entspricht, so werden einer jeden Doppeltangente zwei gerade Linien entsprechen: die eine aus dem Systeme F, die andere aus dem Systeme F'. Wir werden daher sagen, dass zwei gerade Linien ab und $p'q'$, aus den beiden Systemen genommen, einander entsprechen, wenn jede von ihnen derselben Doppeltangente der Curve vierter Ordnung entspricht.

Nach dieser Erklärung sollen die in den beiden Systemen einander entsprechenden geraden Linien näher bezeichnet werden. Zu diesem Zwecke ist es nöthig, die Coordinaten der acht Punkte in dem Systeme F und in dem Systeme F' festzustellen. Wir setzen also fest, dass des Punktes 1 Coordinaten $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$, $P = 0$, des Punktes $1'$ Coordinaten $X' = 1$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, $P' = 0$ etc. sein sollen; dass ferner

des Punktes 5 Coordinaten X_5, Y_5, Z_5, P_5 sein sollen, wonach des Punktes 5′ Coordinaten gleich $\frac{1}{X_5}$, $\frac{1}{Y_5}$, $\frac{1}{Z_5}$, $\frac{1}{P_5}$ gesetzt werden können, weil, wenn die ersten Coordinaten der Gleichung $F=0$ genügen, die letzteren der Gleichung $F'=0$ genügen müssen etc. Diese Bestimmungen, in den folgenden beiden Schematen übersichtlich zusammengestellt, sind:

	X	Y	Z	P
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1
5	X_5	Y_5	Z_5	P_5
6	X_6	Y_6	Z_6	P_6
7	X_7	Y_7	Z_7	P_7
8	X_8	Y_8	Z_8	P_8

	X'	Y'	Z'	P'
1′	1	0	0	0
2′	0	1	0	0
3′	0	0	1	0
4′	0	0	0	1
5′	$\frac{1}{X_5}$	$\frac{1}{Y_5}$	$\frac{1}{Z_5}$	$\frac{1}{P_5}$
6′	$\frac{1}{X_6}$	$\frac{1}{Y_6}$	$\frac{1}{Z_6}$	$\frac{1}{P_6}$
7′	$\frac{1}{X_7}$	$\frac{1}{Y_7}$	$\frac{1}{Z_7}$	$\frac{1}{P_7}$
8′	$\frac{1}{X_8}$	$\frac{1}{Y_8}$	$\frac{1}{Z_8}$	$\frac{1}{P_8}$

Betrachtet man nun die Gleichung der, der geraden Linie ab entsprechenden Doppeltangente ab, welche in (46) aufgestellt wurde, nämlich

$$F_{ab}=0,$$

so ist der Theil F_{ab} links dieser Gleichung als eine Function der Coordinaten der beiden Punkte a und b nach (13) wie folgt gegeben:

$$F_{ab}=x_a\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_b+y_a\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_b+z_a\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_b+p_a\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_b.$$

Stellt man diese Function als eine Function der Coordinaten X, Y, Z, P derselben beiden Punkte dar, indem man die letzteren durch X_a, Y_a, ... X_b, Y_b, ... bezeichnet, welche unter Vermittelung der Gleichungen (11) den ursprünglichen Coordinaten der genannten beiden Punkte entsprechen, so findet sich:

$$F_{ab}=X_a\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_b+Y_a\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_b+Z_a\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)_b+P_a\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_b.$$

Setzt man endlich für $\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_b$, $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_b$, ... ihre Werthe aus (56) genommen, so erhält man für die Gleichung der Doppeltangente ab:

$$59.\quad \begin{aligned} F_{ab} = X_a(F_{12}Y_b + F_{13}Z_b + F_{14}P_b) + Y_a(F_{21}X_b + F_{23}Z_b + F_{24}P_b) \\ + Z_a(F_{31}X_b + F_{32}Y_b + F_{34}P_b) + P_a(F_{41}X_b + F_{42}Y_b + F_{43}Z_b) = 0. \end{aligned}$$

Ebenso ergiebt sich für die Gleichung der Doppeltangente $p'q'$, wenn man die in (58) gegebene Function F' zum Grunde legt:

$$60.\quad \begin{aligned} F'_{p'q'} = X'_{p'}(F_{34}Y'_{q'} + F_{24}Z'_{q'} + F_{23}P'_{q'}) + Y'_{p'}(F_{34}X'_{q'} + F_{14}Z'_{q'} + F_{13}P'_{q'}) \\ + Z'_{p'}(F_{24}X'_{q'} + F_{14}Y'_{q'} + F_{12}P'_{q'}) + P'_{p'}(F_{23}X'_{q'} + F_{13}Y'_{q'} + F_{12}Z'_{q'}) = 0. \end{aligned}$$

Geht man auf die angegebenen Schemata zurück, so findet sich, indem man $a = 1$, $b = 2$, $p = 3$, $q = 4$ setzt, dass:

$$F_{12} = F'_{3'4'}$$

ist. In diesem Falle stellen die Gleichungen (59) und (60) dieselbe Doppeltangente der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ dar. Es sind mithin nach der obigen Erklärung 12 und $3'4'$ zwei entsprechende gerade Linien.

Auf diese Weise ergeben sich als entsprechende gerade Linien:

$$(A')\qquad \begin{cases} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 3'4' & 2'4' & 2'3' & 1'4' & 1'3' & 1'2'. \end{cases}$$

Die angegebenen geraden Linien bilden die Kanten zweier Tetraëder 1234 und $1'2'3'4'$. Die Kanten des einen entsprechen also den Kanten des anderen Tetraëders, auf die in (A') angegebene Weise.

Es wurde in § 10 bewiesen, dass sich durch die Berührungspunkte von drei Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ kein Kegelschnitt legen lässt, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien ein Dreieck bilden. In dem Systeme F' bilden nun die geraden Linien $1'2'$, $1'3'$, $2'3'$ ein Dreieck. Daraus folgt, dass die diesen geraden Linien entsprechenden Doppeltangenten 34, 24, 14 die Curve in sechs Punkten berühren werden, welche nicht in einem Kegelschnitt liegen. Da nun die den genannten Doppeltangenten in dem Systeme F entsprechenden geraden Linien 34, 24, 14 in einem Punkte 4 zusammenstossen, so ist zugleich folgender Satz bewiesen:

Durch die Berührungspunkte von drei Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ lässt sich kein Kegelschnitt legen, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien in einem Punkte zusammenlaufen.

Es ist für die folgende Auseinandersetzung vortheilhaft, die 28 den Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in dem Systeme F entsprechenden geraden Linien, welche die acht Punkte 1, 2, ... 8 paarweise verbinden, auf zwei Tetraëder 1234 und 5678 zu beziehen. Sechs von den genannten geraden Linien bilden dann die Kanten des ersten, sechs andere die Kanten des zweiten Tetraëders und die 16 noch übrigen geraden Linien verbinden die Ecken des ersten mit den Ecken des zweiten Tetraëders. In dem System F' werden wir auf gleiche Weise die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien als die Kanten zweier Tetraëder $1'2'3'4'$ und $5'6'7'8'$ betrachten und die noch übrigen 16 geraden Linien als die Verbindungslinien der Ecken des ersten mit den Ecken des zweiten Tetraëders.

Nachdem nun nachgewiesen ist, wie die Kanten des Tetraëders 1234 den Kanten des Tetraëders $1'2'3'4'$ entsprechen, wollen wir untersuchen, welche geraden Linien in dem Systeme F den Verbindungslinien der Ecken der beiden Tetraëder des Systems F' entsprechen.

Der geraden Linie $1'5'$ entspricht die Doppeltangente $1'5'$, deren Gleichung aus (60) hervorgeht, wenn man $X'_{p'} = 1$, $Y'_{p'} = 0$, $Z'_{p'} = 0$, $P'_{p'} = 0$ und $X'_{q'} = \frac{1}{X_5}$, $Y'_{q'} = \frac{1}{Y_5}$, $Z'_{q'} = \frac{1}{Z_5}$, $P'_{q'} = \frac{1}{P_5}$ setzt. Die Gleichung dieser Doppeltangente wird demnach zu

$$F'_{1'5'} = F_{34}\frac{1}{Y_5} + F_{24}\frac{1}{Z_5} + F_{23}\frac{1}{P_5} = 0,$$

oder, wenn man mit den Nennern multiplicirt:

$$F_{34} Z_5 P_5 + F_{24} Y_5 P_5 + F_{23} Y_5 Z_5 = 0.$$

Da aber die Coordinaten X_5, Y_5, Z_5, P_5 statt X, Y, Z, P gesetzt die in (56) angegebene Function F verschwinden machen, so erhält man die identische Gleichung:

$$F_{12} X_5 Y_5 + F_{13} X_5 Z_5 + F_{14} X_5 P_5 + F_{23} Y_5 Z_5 + F_{24} Y_5 P_5 + F_{34} Z_5 P_5 = 0,$$

mit deren Hülfe die vorhergehende Gleichung in

$$(F_{12}Y_5 + F_{13}Z_5 + F_{14}P_5)X_5 = 0$$

und, mit Weglassung des Factors X_5, in

$$F_{12}Y_5 + F_{13}Z_5 + F_{14}P_5 = 0$$

übergeht. Diese Gleichung der Doppeltangente $1'5'$ ist aber gerade die Gleichung der Doppeltangente 15, wovon man sich durch (59) überzeugen kann. Man sieht hieraus, dass die 16 Verbindungslinien der Ecken der beiden Tetraëder in dem System F den 16 Verbindungslinien der Ecken der beiden Tetraëder in dem System F' auf folgende Weise entsprechen:

$$(B')\begin{cases} 1\,5 \quad 2\,5 \quad 3\,5 \quad 4\,5 \quad 1\,6 \quad 2\,6 \quad 3\,6 \quad 4\,6 \quad 1\,7 \quad 2\,7 \quad 3\,7 \quad 4\,7 \quad 1\,8 \quad 2\,8 \quad 3\,8 \quad 4\,8 \\ 1'5' \quad 2'5' \quad 3'5' \quad 4'5' \quad 1'6' \quad 2'6' \quad 3'6' \quad 4'6' \quad 1'7' \quad 2'7' \quad 3'7' \quad 4'7' \quad 1'8' \quad 2'8' \quad 3'8' \quad 4'8'. \end{cases}$$

Es können nun den sechs Kanten des Tetraëders 5 6 7 8 in dem System F nur noch die sechs Kanten des Tetraëders $5'6'7'8'$ in dem System F' entsprechen. Es bleibt aber zu untersuchen übrig, in welcher Weise die sechs Kanten

$$5\,6 \qquad 5\,7 \qquad 5\,8 \qquad 6\,7 \qquad 6\,8 \qquad 7\,8$$

des ersten Tetraëders den sechs Kanten

$$5'6' \qquad 5'7' \qquad 5'8' \qquad 6'7' \qquad 6'8' \qquad 7'8'$$

des anderen Tetraëders entsprechen.

Wir werden nachweisen, dass der geraden Linie $5'6'$ die gerade Linie 5 6 nicht entsprechen kann.

Wenn $5'6'$ und 5 6 entsprechende gerade Linien wären, so würden, weil die geraden Linien $5'6'$, $6'2'$, $2'1'$, $1'5'$ in dem System F' ein räumliches Viereck bilden, die diesen geraden Linien entsprechenden Doppeltangenten 5 6, 6 2, 3 4, 1 5 die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in acht Punkten berühren, welche in einem Kegelschnitt liegen. Es berühren aber die vier Doppeltangenten 5 6, 6 2, 2 1, 1 5 die Curve in acht Punkten, welche in einem Kegelschnitt liegen, weil die diesen Doppeltangenten in

dem System F entsprechenden geraden Linien ein räumliches Viereck bilden. Es müssten also die Doppeltangenten 1 2 und 3 4 zusammenfallen; was gegen die Annahme ist.

Eben so wenig kann die gerade Linie $5'6'$ der geraden Linie 5 7 entsprechen. Denn die geraden Linien $6'1'$, $1'5'$, $5'6'$ bilden in dem System F' ein Dreieck, deren entsprechende Doppeltangenten 6 1, 1 5, 5 7 die Curve in sechs Punkten berühren müssten, durch welche sich kein Kegelschnitt legen lässt, während man weiss, dass sich durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten 6 1, 1 5, 5 7, 7 6 ein Kegelschnitt legen lässt. Da nun die gerade Linie $5'6'$ keiner von den geraden Linien 5 6, 5 7, 5 8, 6 7, 6 8 entsprechen kann, so muss sie der geraden Linie 7 8 entsprechen.

Es entsprechen also die Kanten des Tetraëders 5 6 7 8 den Kanten des Tetraëders $5'6'7'8'$ auf folgende Weise:

$$(C')\qquad \begin{cases} 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78, \\ 7'8' & 6'8' & 6'7' & 5'8' & 5'7' & 5'6'. \end{cases}$$

Auch auf directem Wege lässt sich dieses nachweisen, indem man zeigt, dass sich die beiden Ausdrücke F_{56} und $F'_{7'8'}$ nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden. Dieser Beweis lässt sich aber nicht ohne weitläufige Transformation der genannten Ausdrücke durchführen. Wir wollen uns daher mit dem gegebenen Beweise begnügen, und in der Entwickelung neuer Resultate fortfahren.

Die geraden Linien $1'2'$, $2'6'$, $6'5'$, $5'1'$ bilden in dem Systeme F' ein räumliches Viereck. Die ihnen entsprechenden Doppeltangenten 3 4, 2 6, 7 8, 5 1 berühren also die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in acht Punkten, durch welche sich ein Kegelschnitt legen lässt. Die diesen Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien in dem Systeme F verbinden die acht Punkte 1, 2, ... 8 paarweise; aus welcher Bemerkung der am Ende von § 11 erwähnte Satz hervorgeht, nämlich:

Die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einem Kegelschnitt, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien die Punkte 12 ... 8 *paarweise verbinden.*

13.

Auf dieselbe Art, wie die in (8) gegebene Function F durch die Substitutionen (11) in die Form (56) übergeht, transformiren die Substitutionen

61.
$$\begin{cases} x = x_5\xi + x_6\eta + x_7\zeta + x_8\vartheta, \\ y = y_5\xi + y_6\eta + y_7\zeta + y_8\vartheta, \\ z = z_5\xi + z_6\eta + z_7\zeta + z_8\vartheta, \\ p = p_5\xi + p_6\eta + p_7\zeta + p_8\vartheta \end{cases}$$

dieselbe Function F in folgende:

62. $$F = F_{56}\xi\eta + F_{57}\xi\zeta + F_{58}\xi\vartheta + F_{67}\eta\zeta + F_{68}\eta\vartheta + F_{78}\zeta\vartheta.$$

Diese Function ist nach der in § 6 gegebenen Erklärung keine neue Function F, weil sie eben durch die lineären Substitutionen (61) aus der in (8) gegebenen Function F hervorgeht. Man kann aber, so wie man aus den Coëfficienten der Function F in (56) die Function F' in (58) componirte, auch hier aus den Coëfficienten der Function F in (62) folgende Function $F_,$ zusammensetzen:

63. $$F_, = F_{78}\xi'\eta' + F_{68}\xi'\zeta' + F_{67}\xi'\vartheta' + F_{58}\eta'\zeta' + F_{57}\eta'\vartheta' + F_{56}\zeta'\vartheta'.$$

Diese Function ist nach der gegebenen Erklärung eine von F verschiedene, also eine neue Function dieser Gattung.

Die Functionen F' und $F_,$ sind nicht verschiedene Functionen, weil die eine durch lineäre Substitutionen in die andere übergeht. Diese Behauptung wird durch die folgende Betrachtung gerechtfertigt werden.

Die acht Schnittpunkte der drei Oberflächen zweiter Ordnung $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ lassen sich nach dem in Crelle's Journal Bd. 20 S. 297 [1]) ausgesprochenen Lehrsatze 9 als zwei Systeme harmonischer Pole einer andern Oberfläche zweiter Ordnung ansehen. Demnach mögen die Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 das eine und die Schnittpunkte 5, 6, 7, 8 das andere System harmonischer Pole einer Oberfläche zweiter Ordnung bilden, deren Gleichung $\Phi = 0$ sei. Um die Bedingungen dieser Annahme analytisch auszudrücken, sollen durch a und b irgend zwei von den Zahlen 1, 2, 3, 4

1) [Seite 37 dieser Ausgabe.]

und durch p und q irgend zwei von den Zahlen 5, 6, 7, 8 bezeichnet werden. Alsdann erhält man:

$$x_a \Phi'(x_b) + y_a \Phi'(y_b) + z_a \Phi'(z_b) + p_a \Phi'(p_b) = 0, \tag{64.}$$

$$x_p \Phi'(x_q) + y_p \Phi'(y_q) + z_p \Phi'(z_q) + p_p \Phi'(p_q) = 0. \tag{65.}$$

Die erste dieser Gleichungen, welche sechs Gleichungen in sich schliesst, drückt die Bedingung aus, dass die Punkte 1, 2, 3, 4 ein System harmonischer Pole der Oberfläche $\Phi = 0$ bilden. Ebenso drückt die zweite, welche ebenfalls sechs Gleichungen umfasst, die Bedingung aus, dass die Punkte 5, 6, 7, 8 ein System harmonischer Pole derselben Oberfläche bilden. Diesen zwölf Gleichungen haben nun die neun in der Gleichung der Oberfläche $\Phi = 0$ enthaltenen Constanten zu genügen; was unmöglich zu sein scheint. Es ist aber an der citirten Stelle nachgewiesen worden, dass drei von diesen zwölf Gleichungen aus den neun anderen folgen; wesshalb die zwölf Gleichungen in der That nur die Stelle von neun Gleichungen vertreten, aus welchen sich die neun Constanten in der Function Φ auf lineäre Weise berechnen lassen.

Mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (64) transformiren die Substitutionen (11) die Function Φ in die Form:

$$\Phi = b_1 X^2 + b_2 Y^2 + b_3 Z^2 + b_4 P^2, \tag{66.}$$

während dieselbe Function, mit Rücksicht auf die Bedingungen (65), durch die Substitutionen (61) die Form

$$\Phi = a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \zeta^2 + a_4 \vartheta^2 \tag{67.}$$

annimmt.

Setzt man nun die aus den Substitutionen (11) und (61) genommenen Werthe von x einander gleich und ebenso die Werthe von $y, z, p,$ so erhält man vier Gleichungen, welche, nach X, Y, Z, P aufgelöst, folgende Substitutionen ergeben:

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_5 \xi + X_6 \eta + X_7 \zeta + X_8 \vartheta, \\ Y &= Y_5 \xi + Y_6 \eta + Y_7 \zeta + Y_8 \vartheta, \\ Z &= Z_5 \xi + Z_6 \eta + Z_7 \zeta + Z_8 \vartheta, \\ P &= P_5 \xi + P_6 \eta + P_7 \zeta + P_8 \vartheta. \end{aligned}\right. \tag{68.}$$

In der That: wenn $\xi = 1,\ \eta = 0,\ \zeta = 0,\ \vartheta = 0$ ist, so nehmen die Variabeln x, y, z, p nach (61) die Werthe x_5, y_5, z_5, p_5 an, welchen letzteren nach (11) die Werthe X_5, Y_5, Z_5, P_5 der Variabeln X, Y, Z, P entsprechen, die man unmittelbar aus den Gleichungen (68) erhält, wenn man $\xi = 1,\ \eta = 0,\ \zeta = 0,\ \vartheta = 0$ setzt.

Demnach haben die Substitutionen (68) die Eigenschaft, dass sie die Function (66), welche nur die Quadrate der Variabeln $X, Y \ldots$ enthält, in die Function (67) transformiren, welche ebenfalls nur die Quadrate der Variabeln $\xi, \eta, \ldots$ enthält.

Eine andere Eigenschaft der Substitutionen (68) ergiebt sich aus der Ansicht der Functionen (56) und (62). Sie transformiren die eine Function, in welcher die Quadrate der Variabeln fehlen, in die andere Function, in welcher ebenfalls die Quadrate der Variabeln fehlen.

Es haben demnach die genannten Substitutionen die beiden Eigenschaften, welche der in Crelle's Journal Bd. 45 S. 100[1]) bewiesene Lehrsatz 3 verlangt. Der genannte Lehrsatz tritt also hier in Wirksamkeit. Nach diesem Lehrsatze wird die Function (58), nämlich:

$$69.\quad \begin{aligned} F' = F_{34} X'Y' + F_{24} X'Z' + F_{23} X'P' + F_{14} Y'Z' + F_{13} Y'P' \\ + F_{12} Z'P', \end{aligned}$$

durch die Substitutionen

$$70.\quad \begin{cases} X' = \dfrac{1}{X_5}\xi'' + \dfrac{1}{X_6}\eta'' + \dfrac{1}{X_7}\zeta'' + \dfrac{1}{X_8}\vartheta'', \\ Y' = \dfrac{1}{Y_5}\xi'' + \dfrac{1}{Y_6}\eta'' + \dfrac{1}{Y_7}\zeta'' + \dfrac{1}{Y_8}\vartheta'', \\ Z' = \dfrac{1}{Z_5}\xi'' + \dfrac{1}{Z_6}\eta'' + \dfrac{1}{Z_7}\zeta'' + \dfrac{1}{Z_8}\vartheta'', \\ P' = \dfrac{1}{P_5}\xi'' + \dfrac{1}{P_6}\eta'' + \dfrac{1}{P_7}\zeta'' + \dfrac{1}{P_8}\vartheta'' \end{cases}$$

in

$$71.\quad \begin{aligned} F' = \frac{M}{a_1 a_2 a_3 a_4}\{F_{78}\xi'\eta' + F_{68}\xi'\zeta' + F_{67}\xi'\vartheta' + F_{58}\eta'\zeta' \\ + F_{57}\eta'\vartheta' + F_{56}\zeta'\vartheta'\} \end{aligned}$$

---

1) [Seite 315 dieser Ausgabe.]

transformirt, indem der Kürze wegen

$$\xi' = \frac{a_1 a_1 \xi''}{A^{(5)}}, \quad \eta' = \frac{a_2 a_2 \eta''}{A^{(6)}}, \quad \zeta' = \frac{a_3 a_3 \zeta''}{A^{(7)}}, \quad \vartheta' = \frac{a_4 a_4 \vartheta''}{A^{(8)}}$$

$$\text{und} \quad A^{\varkappa} = X_{\varkappa} Y_{\varkappa} Z_{\varkappa} P_{\varkappa}$$

gesetzt ist. Vergleicht man die Function F' in (71) mit der Function $F_{\prime}$ in (63), so findet sich, dass sie sich nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden. Sie sind also nach der in § 6 gegebenen Erklärung *keine* verschiedenen Functionen.

14.

Um eine neue Function F aus der in (8) gegebenen Function F abzuleiten, transformire man die gegebene Function durch lineäre Substitutionen, welche sich von den Substitutionen (11) nur dadurch unterscheiden, dass der Index 5 statt des Index 4 gesetzt wird, in:

$$72. \quad F = F_{12} X Y + F_{13} X Z + F_{15} X P + F_{23} Y Z + F_{25} Y P + F_{35} Z P.$$

Aus den Coëfficienten der Variabeln der auf diese Weise transformirten Function componire man die neue Function

$$73. \quad \begin{aligned} F'' = F_{35} X'' Y'' + F_{25} X'' Z'' + F_{23} X'' P'' + F_{15} Y'' Z'' \\ + F_{13} Y'' P'' + F_{12} Z'' P''. \end{aligned}$$

Die acht Schnittpunkte der drei Oberflächen

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$$

haben wir mit den Zahlen 1, 2, ... 8 bezeichnet. Die acht Schnittpunkte der drei Oberflächen

$$\frac{\partial F''}{\partial \varkappa} = 0, \quad \frac{\partial F''}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial F''}{\partial \mu} = 0,$$

welche in gleicher Weise der Function F'' entsprechen, werden wir mit $1''$, $2''$, ... $8''$ bezeichnen. Endlich stellen wir die Coordinaten der ersten und der zweiten acht Punkte wie folgt übersichtlich zusammen:

	X	Y	Z	P
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
5	0	0	0	1
4	X_4	Y_4	Z_4	P_4
6	X_6	Y_6	Z_6	P_6
7	X_7	Y_7	Z_7	P_7
8	X_8	Y_8	Z_8	P_8

	X''	Y''	Z''	P''
$1''$	1	0	0	0
$2''$	0	1	0	0
$3''$	0	0	1	0
$5''$	0	0	0	1
$4''$	$\frac{1}{X_4}$	$\frac{1}{Y_4}$	$\frac{1}{Z_4}$	$\frac{1}{P_4}$
$6''$	$\frac{1}{X_6}$	$\frac{1}{Y_6}$	$\frac{1}{Z_6}$	$\frac{1}{P_6}$
$7''$	$\frac{1}{X_7}$	$\frac{1}{Y_7}$	$\frac{1}{Z_7}$	$\frac{1}{P_7}$
$8''$	$\frac{1}{X_8}$	$\frac{1}{Y_8}$	$\frac{1}{Z_8}$	$\frac{1}{P_8}$

Es versteht sich, dass diese Coordinaten andere Werthe haben, als die mit demselben Zeichen bezeichneten in den beiden Schematen des § 11.

Es entsprechen nun die Kanten des Tetraëders 1 2 3 5 den Kanten des Tetraëders $1''2''3''5''$ in folgender Weise:

$$(A'') \quad \begin{cases} 1\,2 & 1\,3 & 1\,5 & 2\,3 & 2\,5 & 3\,5, \\ 3''5'' & 2''5'' & 2''3'' & 1''5'' & 1''3'' & 1''2''. \end{cases}$$

Ebenso werden die Kanten des Tetraëders 4 6 7 8 den Kanten des Tetraëders $4''6''7''8''$ wie folgt entsprechen:

$$(C'') \quad \begin{cases} 4\,6 & 4\,7 & 4\,8 & 6\,7 & 6\,8 & 7\,8, \\ 7''8'' & 6''8'' & 6''7'' & 4''8'' & 4''7'' & 4''6''. \end{cases}$$

Endlich entsprechen die Verbindungslinien der Ecken der dem System F angehörigen Tetraëder den Verbindungslinien der Ecken der dem System F'' angehörigen Tetraëder auf folgende Weise:

$$(B'') \begin{cases} 1\,4 & 1\,6 & 1\,7 & 1\,8 & 2\,4 & 2\,6 & 2\,7 & 2\,8 & 3\,4 & 3\,6 & 3\,7 & 3\,8 & 5\,4 & 5\,6 & 5\,7 & 5\,8, \\ 1''4'' & 1''6'' & 1''7'' & 1''8'' & 2''4'' & 2''6'' & 2''7'' & 2''8'' & 3''4'' & 3''6'' & 3''7'' & 3''8'' & 5''4'' & 5''6'' & 5''7'' & 5''8''. \end{cases}$$

Hätte man am Anfang dieses Paragraphen lineäre Substitutionen gewählt, welche sich von den Substitutionen (61) nur dadurch unterscheiden, dass der Index 5 in den Index 4 verändert ist, so würde man schliesslich eine Function $F_{''}$ erhalten haben, welche von F'' *nicht* verschieden ist.

Fährt man in der vorgezeichneten Weise fort, aus der gegebenen Function F neue Functionen dieser Gattung zu bilden, so ist leicht zu sehen, dass man so viele neue Functionen F erlangen wird, als die acht Punkte 1, 2, ... 8 in zwei Gruppen von vier Punkten sich vertheilen lassen. Nimmt man noch die gegebene Function F hinzu, so erhält man den Satz:

Einer gegebenen Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechen 36 verschiedene Functionen F, deren Determinanten sämmtlich gleich Δ sind.

Jeder dieser Functionen entspricht ein System von 28 geraden, acht Punkte des Raumes paarweise verbindenden Linien, welche in der beschriebenen Weise den 28 Doppeltangenten der gegebenen Curve entsprechen. In der folgenden Tafel findet man die den 28 Doppeltangenten in den verschiedenen Systemen entsprechenden geraden Linien zusammengestellt. Die Zahlen der ersten verticalen Reihe in der Tafel entsprechen den 36 verschiedenen Functionen F. Die letzte verticale Reihe enthält die diesen Functionen entsprechenden zwei Gruppen der acht Punkte 1, 2, ... 8. Ausserdem findet man in der ersten horizontalen Reihe die 28 den Doppeltangenten in dem Systeme F entsprechenden geraden Linien verzeichnet. Darunter stehen die diesen entsprechenden geraden Linien des Systems F', wie sie in A', B', C' angegeben sind, mit Weglassung des Index $'$. Die folgende horizontale Reihe enthält die entsprechenden geraden Linien des Systems F'' nach Vorschrift von A'', B'', C'', mit Weglassung des Index $''$ etc.

Der Gebrauch der am Schluss dieses Paragraphen angehängten Tafel ergiebt sich nach dem Vorgehenden von selbst. So entnehmen wir zum Beispiel, gestützt auf den zweiten Satz des § 9, aus der Tafel, da 12, 25, 56, 61 in der Reihe 35 ein Viereck bilden, dass die ihnen entsprechenden Doppeltangenten in der Reihe 0, nämlich 12, 34, 56, 78 die Curve der vierten Ordnung $\Delta = 0$ in acht Punkten berühren, welche in einem Kegelschnitt liegen; was wir am Ende des § 12 in Gestalt eines Satzes ausgedrückt haben.

Zur Vervollständigung des obigen Satzes in diesem Paragraphen bleibt noch nachzuweisen übrig, dass der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ ausser den genannten 36 Functionen F, nicht noch andere Functionen F entsprechen, deren Determinanten gleich Δ sind. Diesen Nachweis wird der folgende Paragraph geben.

0.	12	13	14	15	16	17	18	23	24	25	26	27	28	34	35	36	37	38	45	46	47	48	56	57	58	67	68	78	
1.	34	24	23	15	16	17	18	14	13	25	26	27	28	12	35	36	37	38	45	46	47	48	78	68	67	58	57	56	1234 5678
2.	35	25	14	23	16	17	18	15	24	13	26	27	28	34	12	36	37	38	45	78	68	67	56	57	58	48	47	46	1235 4678
3.	36	26	14	15	23	17	18	16	24	25	13	27	28	34	35	12	37	38	78	46	58	57	56	48	47	67	68	45	1236 4578
4.	37	27	14	15	16	23	18	17	24	25	26	13	28	34	35	36	12	38	68	58	47	56	48	57	46	67	45	78	1237 4568
5.	38	28	14	15	16	17	23	18	24	25	26	27	13	34	35	36	37	12	67	57	56	48	47	46	58	45	68	78	1238 4567
6.	45	13	25	24	16	17	18	23	15	14	26	27	28	34	35	78	68	67	12	46	47	48	56	57	58	38	37	36	1245 3678
7.	46	13	26	15	24	17	18	23	16	25	14	27	28	34	78	36	58	57	45	12	47	48	56	38	37	67	68	35	1246 3578
8.	47	13	27	15	16	24	18	23	17	25	26	14	28	34	68	58	37	56	45	46	12	48	38	57	36	67	35	78	1247 3568
9.	48	13	28	15	16	17	24	23	18	25	26	27	14	34	67	57	56	38	45	46	47	12	37	36	58	35	68	78	1248 3567
10.	56	13	14	26	25	17	18	23	24	16	15	27	28	78	35	36	48	47	45	46	38	37	12	57	58	67	68	34	1256 3478
11.	57	13	14	27	16	25	18	23	24	17	26	15	28	68	35	48	37	46	45	38	47	36	56	12	58	67	34	78	1257 3468
12.	58	13	14	28	16	17	25	23	24	18	26	27	15	67	35	47	46	38	45	37	36	48	56	57	12	34	68	78	1258 3467
13.	67	13	14	15	27	26	18	23	24	25	17	16	28	58	48	36	37	45	38	46	47	35	56	57	34	12	68	78	1267 3458
14.	68	13	14	15	28	17	26	23	24	25	18	27	16	57	47	36	45	38	37	46	35	48	56	34	58	67	12	78	1268 3457
15.	78	13	14	15	16	28	27	23	24	25	26	18	17	56	46	45	37	38	36	35	47	48	34	57	58	67	68	12	1278 3456
16.	12	45	35	34	16	17	18	23	24	25	78	68	67	15	14	36	37	38	13	46	47	48	56	57	58	28	27	26	1345 2678
17.	12	46	36	15	34	17	18	23	24	78	26	58	57	16	35	14	37	38	45	13	47	48	56	28	27	67	68	25	1346 2578
18.	12	47	37	15	16	34	18	23	24	68	58	27	56	17	35	36	14	38	45	46	13	48	28	57	26	67	25	78	1347 2568
19.	12	48	38	15	16	17	34	23	24	67	57	56	28	18	35	36	37	14	45	46	47	13	27	26	58	25	68	78	1348 2567
20.	12	56	14	36	35	17	18	23	78	25	26	48	47	34	16	15	37	38	45	46	28	27	13	57	58	67	68	24	1356 2478
21.	12	57	14	37	16	35	18	23	68	25	48	27	46	34	17	36	15	38	45	28	47	26	56	13	58	67	24	78	1357 2468
22.	12	58	14	38	16	17	35	23	67	25	47	46	28	34	18	36	37	15	45	27	26	48	56	57	13	24	68	78	1358 2467
23.	12	67	14	15	37	36	18	23	58	48	26	27	45	34	35	17	16	38	28	46	47	25	56	57	24	13	68	78	1367 2458
24.	12	68	14	15	38	17	36	23	57	47	26	45	28	34	35	18	37	16	27	46	25	48	56	24	58	67	13	78	1368 2457
25.	12	78	14	15	16	38	37	23	56	46	45	27	28	34	35	36	18	17	26	25	47	48	24	57	58	67	68	13	1378 2456
26.	12	13	56	46	45	17	18	78	24	25	26	38	37	34	35	36	28	27	16	15	47	48	14	57	58	67	68	23	1456 2378
27.	12	13	57	47	16	45	18	68	24	25	38	27	36	34	35	28	37	26	17	46	15	48	56	14	58	67	23	78	1457 2368
28.	12	13	58	48	16	17	45	67	24	25	37	36	28	34	35	27	26	38	18	46	47	15	56	57	14	23	68	78	1458 2367
29.	12	13	67	15	47	46	18	58	24	38	26	27	35	34	28	36	37	25	45	17	16	48	56	57	23	14	68	78	1467 2358
30.	12	13	68	15	48	17	46	57	24	37	26	35	28	34	27	36	25	38	45	18	47	16	56	23	58	67	14	78	1468 2357
31.	12	13	78	15	16	48	47	56	24	36	35	27	28	34	26	25	37	38	45	46	18	17	23	57	58	67	68	14	1478 2356
32.	12	13	14	67	57	56	18	48	38	25	26	27	34	28	35	36	37	24	45	46	47	23	17	16	58	15	68	78	1567 2348
33.	12	13	14	68	58	17	56	47	37	25	26	34	28	27	35	36	24	38	45	46	23	48	18	57	16	67	15	78	1568 2347
34.	12	13	14	78	16	58	57	46	36	25	34	27	28	26	35	24	37	38	45	23	47	48	56	18	17	67	68	15	1578 2346
35.	12	13	14	15	78	68	67	45	35	34	26	27	28	25	24	36	37	38	23	46	47	48	56	57	58	18	17	16	1678 2345

15.

Die Zahl der Combinationen der 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$, zu dreien, beträgt $\frac{28.27.26}{1.2.3} = 3276$. Unter diesen Combinationen von drei Doppeltangenten giebt es solche, deren Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen und solche, durch deren Berührungspunkte sich ein Kegelschnitt legen lässt.

Es giebt 2016 *Combinationen von drei Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung* $\varDelta = 0$, *deren Berührungspunkte nicht in einem Kegelschnitt liegen.*

In der That: in § 10 wurde nachgewiesen, dass das der Function F entsprechende System von Berührungscurven dritter Ordnung $a = 0$ 56 Combinationen von drei Doppeltangenten in sich schliesst, durch deren Berührungspunkte sich kein Kegelschnitt legen lässt. Da man aber 36 Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung hat, welche den 36 Functionen F entsprechen, so hat man auch $36.56 = 2016$ Combinationen von drei Doppeltangenten, deren Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Zwei von diesen Combinationen, welche verschiedenen Systemen von Berührungscurven angehören, können aber nicht zusammenfallen, weil dann nach dem zweiten Satze in § 6 die beiden Systeme selbst zusammenfallen müssten.

Die in dem Satze angegebene Zahl von Combinationen erhält man auch durch folgende Betrachtung. Nach dem zweiten Satze in § 10 wird man so viele Combinationen von drei Doppeltangenten haben, deren Berührungspunkte nicht in einem Kegelschnitt liegen, als die 28, den Doppeltangenten in dem System F entsprechenden geraden Linien verschiedene Dreiecke bilden. Die 28 geraden Linien des Systems F bilden aber 56 verschiedene Dreiecke. Mithin giebt es, erstens, 56 Combinationen von drei Doppeltangenten, deren Berührungspunkte nicht in einem Kegelschnitt liegen.

Nach dem ersten Satze in § 12 wird man so viele Combinationen von drei Doppeltangenten angeben können, deren Berührungspunkte nicht in einem Kegelschnitt liegen, als von den 28, den Doppeltangenten in dem Systeme F entsprechenden geraden Linien drei in einem Punkte

zusammenstossen. Von diesen geraden Linien stossen aber 280 mal drei in einem Punkte zusammen. Mithin giebt es, zweitens, 280 Combinationen von drei Doppeltangenten der bezeichneten Art.

Es giebt noch eine dritte Art von Combinationen von drei Doppeltangenten, deren Berührungspunkte nicht in einem Kegelschnitt liegen. In der Tafel des vorhergehenden Paragraphen sahen wir, dass in der Reihe 1 die geraden Linien 34, 24, 45 in einem Punkte zusammenstossen; woraus zu schliessen ist, dass die ihnen entsprechenden Doppeltangenten 12, 13, 45 in der Reihe 0 die Curve vierter Ordnung in sechs Punkten berühren, welche nicht auf einem Kegelschnitt liegen; was sich allgemeiner so ausdrücken lässt:

Die Berührungspunkte von drei Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen nicht auf einem Kegelschnitt, wenn nur zwei von den, den drei Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien sich in einem Punkte schneiden.

Die 28 den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien in dem System F bilden 1680 Combinationen von der eben bezeichneten Art. Es giebt also 1680 Combinationen von drei Doppeltangenten dritter Art.

Durch Addition der drei angegebenen Zahlen der Combinationen erhält man nun die in dem obigen Satze angegebene Gesammtzahl von Combinationen von drei Doppeltangenten, deren Berührungspunkte nicht in einem Kegelschnitt liegen.

Es giebt 1260 *Combinationen von drei Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.*

Um diesen Satz zu beweisen, gehe man auf den zweiten Satz in § 9 zurück. Nach diesem Satze wird man so viele Combinationen von vier Doppeltangenten angeben können, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, als die 28, den Doppeltangenten in dem Systeme F entsprechenden geraden Linien verschiedene räumliche Vierecke bilden. Da aber diese geraden Linien 210 verschiedene Vierecke bilden, so giebt es auch 210 verschiedene Kegelschnitte, welche durch die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten hindurchgehen.

Nach dem letzten Satze in § 12 giebt es ferner so viele Combinationen von vier Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte ein Kegelschnitt hindurchgeht, als Systeme von vier geraden Linien, welche die acht Punkte 1, 2, ... 8 paarweise verbinden. Da sich nun 105 solcher Systeme von vier geraden Linien finden lassen, so hat man noch 105 verschiedene Kegelschnitte, welche durch die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten hindurchgehen.

Es giebt also 315 *Combinationen von vier Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung* $\varDelta = 0$, *deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.*

Derselbe Satz ist im § 11* auf einem anderen Wege bewiesen und dort so ausgedrückt worden:

Die Zahl der Kegelschnitte, welche durch acht Berührungspunkte von vier Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung gelegt werden können, ist gleich 315.

Jede von den 315 Combinationen von vier Doppeltangenten des vorstehenden Satzes enthält vier Combinationen von drei Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte ein Kegelschnitt geht. Mithin ist $4.315 = 1260$ die Zahl der Combinationen von drei Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte ein Kegelschnitt geht.

Wir haben demnach 2016 Combinationen nach Vorschrift des ersten Satzes und 1260 Combinationen, wie sie der zweite Satz verlangt. Da die Summe beider Zahlen 3276 die Gesammtzahl der Combinationen der 28 Doppeltangenten zu dreien ist, so sondern sich die letzteren in zwei Gruppen, von denen die Berührungspunkte der ersteren nicht in einem Kegelschnitt liegen, während die Berührungspunkte der andern in einem Kegelschnitt liegen.

Wir sind nun im Stande, den Beweis zu führen, dass der gegebenen Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ nicht mehr als die 36 genannten Functionen F entsprechen, deren Determinanten sämmtlich gleich $\varDelta$ sind. Denn gäbe es ausser ihnen noch eine andere Function F, so würden dieser, ausser den genannten 2016 Combinationen noch 56 neue Combinationen von drei Doppeltangenten entsprechen, deren Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen; was mit den vorhergehenden Sätzen

nicht vereinbar ist. Es entsprechen also einer gegebenen Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ *nur* 36 Functionen F, deren Determinanten sämmtlich gleich Δ sind.

Da man nur die Kenntniss der Function F, oder des ihr entsprechenden Systems von Berührungscurven dritter Ordnung voraussetzte, so liessen sich am Ende des § 10 nur 28 verschiedene Systeme Berührungskegelschnitte daraus ableiten. Wir haben aber 36 verschiedene Functionen F kennen gelernt. Mithin würden 28.36 Systeme Berührungskegelschnitte vorhanden sein, wenn die verschiedenen Functionen F nur verschiedene Systeme von Berührungskegelschnitten darböten. Jedes System von Berührungskegelschnitten entspricht aber 16 verschiedenen Functionen F.

Mithin ist die Zahl der verschiedenen Systeme von Berührungskegelschnitten einer gegebenen Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ gleich 63.

Diesen Satz findet man in § 10* anders bewiesen. Dass jedes System von Berührungskegelschnitten aus 16 verschiedenen Functionen F sich auf die in § 10 angegebene Art ableiten lässt, lässt sich auf die Weise deutlich machen, dass man nachweist, wie ein bestimmter Berührungskegelschnitt, zum Beispiel das mit 12 und 13 bezeichnete Doppeltangentenpaar, 16 verschiedenen Functionen F entspricht. Aus der Tafel im vorhergehenden Paragraphen ist zu sehen, dass das genannte Doppeltangentenpaar den sechs Functionen F entspricht, welchen die Indices 0, 1, ... 5 zukommen und den zehn Functionen F, welchen die Indices 26, 27, ... 35 zukommen, während dieses Doppeltangentenpaar allen übrigen Functionen F nicht entspricht.

16.

Am Ende von § 10 haben wir auf die Curven dritter Ordnung aufmerksam gemacht, welche durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ hindurchgehen. Wir wiederholen hier den ersten Theil des dort bewiesenen Satzes:

a) Die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn die den sechs Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien zwei gesonderte Dreiecke bilden.

Man wird demnach so viele Combinationen von sechs Doppeltangenten der genannten Art haben, als sich Ebenenpaare durch je sechs von den acht Punkten 1, 2, ... 8 hindurchlegen lassen. Durch sechs Punkte lassen sich zehn Ebenenpaare hindurchlegen; also durch je sechs von acht Punkten gehen $28.10 = 280$ Ebenenpaare. Bezeichnet man nun durch a die Zahl der Combinationen von sechs Doppeltangenten, deren in dem Systeme F entsprechende gerade Linien zwei gesonderte Dreiecke bilden, so erhält man für die Zahl der verschiedenen Curven dritter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten der bezeichneten Art hindurchgehen:

$$a = 280.$$

b) Die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn fünf von den, den sechs Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien in einem Punkte zusammenstossen und die sechste keine von den genannten geraden Linien schneidet.

In der That: da die geraden Linien der ersten horizontalen Reihe: 34, 42, 23, 51, 16, 65 in der Tafel zwei gesonderte Dreiecke bilden, wie sie der vorhergehende Satz *a)* verlangt, so geht durch die Berührungspunkte der ihnen entsprechenden Doppeltangenten 12, 13, 14, 15, 16, 78 der 0ten horizontalen Reihe eine Curve dritter Ordnung hindurch. Bezeichnet man durch b die Zahl dieser Art Curven dritter Ordnung, so erhält man diese Zahl, wenn man die Zahl der Combinationen von sieben Elementen zur zweiten Classe mit 8 multiplicirt. Es ist also:

$$b = 168.$$

Die geraden Linien 23, 34, 24, 56, 67, 57 in der ersten horizontalen Reihe der Tafel bilden zwei gesonderte Dreiecke. Die ihnen entsprechenden Doppeltangenten in der 0ten horizontalen Reihe berühren also die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in zwölf Punkten, welche auf einer Curve dritter Ordnung liegen; welche Bemerkung sich so ausdrücken lässt:

c) Die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn

drei von den, den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten eines Tetraëders, und die drei andern den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten eines zweiten von dem ersten gesonderten Tetraëders bilden.

Die Zahl c dieser Curven dritter Ordnung wird 560 sein; welche ergiebt, wie oft die acht Punkte 1, 2, ... 8 sich in zwei Gruppen von je vier Punkten vertheilen lassen, multiplicirt mit 16. Demnach ist:

$$c = 560.$$

Mit Hülfe eines dieser Sätze wird man in der Tafel vergeblich nach neuen Combinationen von sechs Doppeltangenten der Linien vierter Ordnung $\Delta = 0$ suchen, durch deren Berührungspunkte eine Curve dritter Ordnung hindurchgeht. Diese Sätze führen vielmehr auf einander zurück. Addirt man die Zahlen a, b, c, so erhält man 1008 als Gesammtzahl der Combinationen von sechs Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte Curven dritter Ordnung hindurchgehen. Es ist aber wichtig, zu bemerken, dass in jeder der bezeichneten Combinationen von sechs Doppeltangenten nicht drei Doppeltangenten gefunden werden können, durch deren Berührungspunkte ein Kegelschnitt hindurchgeht; wovon man sich leicht durch den Vergleich mit den drei in § 15 angeführten Arten von Combinationen von drei Doppeltangenten überzeugt, deren Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Wir können demnach sagen:

Es giebt 1008 verschiedene Curven dritter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ hindurchgehen, unter denen nicht drei Doppeltangenten enthalten sind, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.

Wenn man die letzte Bestimmung, dass die Berührungspunkte von je drei der sechs Doppeltangenten nicht in einem Kegelschnitt liegen sollen, aufhebt, so findet man noch mehr Curven von der genannten Art, indem man von dem zweiten Theile des am Ende des § 10 bewiesenen Satzes ausgeht:

A) Die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung,

wenn die den sechs Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien zwei Dreiecke bilden, welche eine Ecke gemein haben.

Nach diesem Satze werden die den Seiten der beiden Dr eiecke 1 2 3 3 4 5 entsprechenden Doppeltangenten die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in zwölf Punkten berühren, welche in einer Curve dritter Ordnung liegen. Verbindet man die beiden Punkte 2 und 5 durch eine gerade Linie, so bilden die Seiten der beiden Dreiecke mit der geraden Linie 25 zwei räumliche Vierecke 2 1 3 5 und 2 3 4 5, mit der gemeinschaftlichen Seite 25. Nach dem zweiten Satze in § 9 liegen die Berührungspunkte der den Seiten der beiden Dreiecke entsprechenden Doppeltangenten auf zwei Kegelschnitten, welche sich in den Berührungspunkten der Doppeltangente 25 schneiden. Dieser Doppeltangente 25 entspricht also die angegebene Combination der sechs, den Seiten der beiden Dreiecke entsprechenden Doppeltangenten. Die Zahl aller Combinationen, welche in gleicher Weise der Doppeltangente 25 entsprechen, wird demnach der Zahl der Combinationen der sechs Elemente 1, 3, 4, 6, 7, 8 zur dritten Classe, multiplicirt mit der Zahl der Permutationen von drei Elementen gleich sein, also $= 20.6 = 120$. Da wir aber 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung haben, und jeder von ihnen 120 Combinationen entsprechen, so würde man im Ganzen 120.28 Combinationen von sechs Doppeltangenten erhalten, deren entsprechende gerade Linien zwei Dreiecke bilden, mit einer gemeinschaftlichen Ecke, wenn jede Combination nur einer Doppeltangente in der angegebenen Weise entspräche. Die eben angegebene Combination entspricht aber eben so der Doppeltangente 25, als der Doppeltangente 15, oder 14, oder 24. Es ist daher jede Combination 4 mal gezählt. Bezeichnet man nun durch A die Zahl der verschiedenen Combinationen von sechs Doppeltangenten, deren entsprechende Linien zwei Dreiecke mit einer gemeinschaftlichen Ecke bilden, so ergiebt sich

$$A = \frac{120.28}{4} = 840.$$

B) Die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn die den sechs Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien ein räumliches Sechseck bilden.

In der That: die geraden Linien 12, 23, 31, 34, 45, 53 der Reihe 17 in der Tafel bilden zwei Dreiecke mit einer, beiden gemeinschaftlichen Ecke. Daraus folgt, dass die ihnen in der Reihe 0 entsprechenden Doppeltangenten 12, 23, 46, 61, 45, 35 die Curve vierter Ordnung in zwölf Punkten berühren, welche auf einer Curve dritter Ordnung liegen. Die diesen Doppeltangenten in dem System F entsprechenden geraden Linien bilden aber ein *räumliches Sechseck.*

Durch die zwölf Berührungspunkte der genannten Doppeltangenten lassen sich 4 mal zwei Kegelschnitte legen, welche sich in den Berührungspunkten einer anderen Doppeltangente schneiden. Nach dem letzten Satze in § 12 liegen die Berührungspunkte der Doppeltangenten 12, 35, 46 auf einem Kegelschnitt, der durch die Berührungspunkte der Doppeltangente 78 hindurchgeht, und die Berührungspunkte der Doppeltangenten 23, 45, 16 liegen auf einem Kegelschnitt, der ebenfalls durch die Berührungspunkte der Doppeltangente 78 hindurchgeht. In derselben Art, wie die genannte Combination von sechs Doppeltangenten der Doppeltangente 78 entspricht, entspricht diese Combination, nach dem zweiten Satz im § 9, auch der Doppeltangente 15, oder 24, oder 36. Wir wollen mit B die Zahl der verschiedenen Curven dritter Ordnung von der beschriebenen Art bezeichnen. Diese Zahl ist gleich der Zahl der von den, den 28 Doppeltangenten in dem System F entsprechenden geraden Linien gebildeten räumlichen Sechsecke; deren Zahl beträgt $28.60 = 1680$. Es ist also:

$$B = 1680.$$

C) Die Berührungspunkte der sechs Doppeltangenten 16, 26, 36, 34, 35, 78 *der Curve vierter Ordnung* $\varDelta = 0$ *liegen auf einer Curve dritter Ordnung.*

Da nämlich in der Reihe 3 der Tafel die geraden Linien 23, 13, 12 und 34, 35, 45 zwei Dreiecke bilden, welche eine gemeinschaftliche Ecke haben, so liegen die Berührungspunkte der diesen geraden Linien entsprechenden Doppeltangenten in der Reihe 0 auf einer Curve dritter Ordnung.

Durch die Berührungspunkte der genannten sechs Doppeltangenten lassen sich 4 mal zwei Kegelschnitte legen, welche sich in einer neuen Doppeltangente schneiden. Die Berührungspunkte der Doppeltangenten

26, 36, 35 liegen auf einem Kegelschnitt. Auf einem zweiten Kegelschnitt liegen die Berührungspunkte der Doppeltangenten 16, 34, 78, welcher den ersten in den Berührungspunkten der Doppeltangente 25 schneidet. Auf dieselbe Weise wie die angegebene Combination von sechs Doppeltangenten der Doppeltangente 25 entspricht, entspricht sie auch der Doppeltangente 14, oder 24, oder 15.

Die den genannten sechs Doppeltangenten in dem System F entsprechenden geraden Linien 16, 26, 36, 34, 35, 78 bilden eine räumliche Figur. Wie oft nun durch die den Doppeltangenten entsprechenden 28 geraden Linien eine solche Figur gebildet wird, so viele Curven gehen durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten hindurch. Um diese Zahl C der Curven dritter Ordnung zu ermitteln, muss man also die Zahl der räumlichen Figuren von der beschriebenen Art bestimmen. Die beschriebene Figur besteht aus zwei Theilen, von denen der erste aus den fünf zusammenhängenden geraden Linien 16, 26, 36, 34, 35, die durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bestimmt sind, gebildet wird. Der zweite gesonderte Theil der Figur besteht aus der einen geraden Linie 78. Wenn man die letztere gerade Linie ungeändert lässt und nun die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit einander vertauscht, so erhält man 90 verschiedene Figuren. Man hat also 90.28 verschiedene Figuren von der beschriebenen Art. Es ist demnach:

$$C = 2520.$$

Addirt man die Zahlen A, B, C, so erhält man die Zahl 5040 aller Curven dritter Ordnung von der beschriebenen Art. Wir haben also folgenden Satz:

> *Es giebt* 5040 *verschiedene Curven dritter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung* $\Delta = 0$ *hindurchgehen. Durch die zwölf Berührungspunkte der sechs Doppeltangenten lassen sich vier Paare Kegelschnitte legen. Jedes Paar Kegelschnitte schneidet sich in den Berührungspunkten einer andern Doppeltangente, und die vier Doppeltangenten, in welchen sich die vier Paare Kegelschnitte schneiden, berühren die Curve in acht Punkten, welche auf einem Kegelschnitt liegen.*

17.

Das Problem der Doppeltangenten einer gegebenen Curve vierter Ordnung haben wir in § 8 auf die Transformation einer gegebenen homogenen Function Δ vom vierten Grade in die Form (9) einer symmetrischen Determinante zurückgeführt. Diese Transformation lässt sich unter Umständen algebraisch durchführen durch Auflösung von Gleichungen, welche den vierten Grad nicht übersteigen.

Wenn Δ in zwei rationale Factoren zerfällt, so lässt sich Δ in die Form einer symmetrischen Determinante algebraisch transformiren.

Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder zerfällt Δ in einen Factor vom dritten Grade und in einen Factor ersten Grades, oder es zerfällt Δ in zwei Factoren zweiten Grades.

Behandeln wir zuerst den ersten Fall, indem wir annehmen, dass v der homogene Factor dritten Grades und a der lineäre Factor sei; unter welcher Voraussetzung eben ist:

$$74. \qquad \Delta = v \,.\, a.$$

Man kann nun drei verschiedene homogene Functionen dritten Grades u bestimmen, oder durch Multiplication derselben mit der dritten Wurzel der Einheit neun homogene Functionen u, deren Determinanten der gegebenen Function v gleich sind, so dass, wenn man durch $u_{\varkappa\lambda}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u bezeichnet,

$$v = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Die Bestimmung der Function u verlangt nur die Auflösung einer Gleichung dritten Grades, welche ich im 28. Bande des Crelle'schen Journals S. 89 [1]) aufgestellt habe. Demnach stellt sich Δ als eine symmetrische Determinante dar, wie folgt:

$$75. \qquad \Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

1) [Seite 113 dieser Ausgabe.]

Wir gehen zu dem andern Falle über. Um von der Form der symmetrischen Determinante (9) zu der Form (47) einer ebenfalls symmetrischen, aber einfacheren Determinante überzugehen, welche unmittelbar die Doppeltangenten giebt, bedurfte es der Auflösung einer Gleichung vom achten Grade. In unserem Falle, wenn $\varDelta$ in zwei Factoren zweiten Grades U und V zerfällt, wird sich die Transformation gleich auf diese Form (47) algebraisch durchführen lassen.

Man weiss, dass sich zwei beliebige homogene Functionen vom zweiten Grade von drei Variabeln immer in zwei Functionen, welche nur die Quadrate der neuen Variabeln enthalten, transformiren lassen, und dass diese Transformation die Auflösung einer cubischen Gleichung erfordert. Wir können demnach, ohne das Problem zu beschränken, annehmen, dass die Factoren von $\varDelta$, U und V von der Form

$$76. \quad \begin{cases} U = a\varkappa^2 + b\lambda^2 + c\mu^2, \\ V = \alpha\varkappa^2 + \beta\lambda^2 + \gamma\mu^2, \\ \varDelta = U.V \end{cases}$$

seien. Wenn nun $m\varkappa + n\lambda + p\mu = 0$ die Gleichung der den beiden Kegelschnitten $U = 0$, $V = 0$ gemeinschaftlichen Tangente sein soll, so müssen die Coëfficienten in der angegebenen Gleichung der gemeinschaftlichen Tangente den beiden folgenden Gleichungen genügen:

$$77. \quad \begin{cases} \dfrac{m^2}{a} + \dfrac{n^2}{b} + \dfrac{p^2}{c} = 0, \\ \dfrac{m^2}{\alpha} + \dfrac{n^2}{\beta} + \dfrac{p^2}{\gamma} = 0, \end{cases}$$

woraus sich folgende Werthe von m^2, n^2, p^2 ergeben:

$$78. \quad \begin{cases} m^2 = a\alpha\,(b\gamma - c\beta), \\ n^2 = b\beta\,(c\alpha - a\gamma), \\ p^2 = c\gamma\,(a\beta - b\alpha). \end{cases}$$

Da die Gleichungen (77) ungeändert bleiben, wenn man m in $-m$, oder n in $-n$, oder p in $-p$ verändert, so sieht man, dass die Gleichungen der vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte U und V folgende sein werden:

$$79. \quad \begin{cases} m\varkappa + n\lambda + p\mu = 0, \\ m\varkappa + n\lambda - p\mu = 0, \\ m\varkappa - n\lambda + p\mu = 0, \\ -m\varkappa + n\lambda + p\mu = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit Π das Product der Theile links in diesen Gleichungen, so wird

80. $$\Pi = m^4\varkappa^4 + n^4\lambda^4 + p^4\mu^4 - 2n^2p^2\lambda^2\mu^2 - 2p^2m^2\mu^2\varkappa^2 - 2m^2n^2\varkappa^2\lambda^2,$$

und $\Pi = 0$ die Gleichung der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte.

Man wird nun bemerken, dass der Ausdruck

$$\Pi + 4a\alpha b\beta c\gamma U.V$$

ein vollständiges Quadrat ist, so dass sich, wenn man mit u den Ausdruck

81. $$u = a\alpha(b\gamma + c\beta)\varkappa^2 + b\beta(c\alpha + a\gamma)\lambda^2 + c\gamma(a\beta + b\alpha)\mu^2$$

bezeichnet, die identische Gleichung

82. $$\Pi + 4a\alpha b\beta c\gamma U.V = u^2$$

findet. Diese identische Gleichung, geometrisch gedeutet, giebt den bekannten Satz, dass die gemeinschaftlichen Tangenten zweier beliebigen Kegelschnitte diese Curven in acht Punkten berühren, welche wieder auf einem Kegelschnitt liegen.

Wenn man

83. $$\begin{cases} V = 4a\alpha b\beta c\gamma U.V, \\ \Pi = 4F_{23}F_{14}F_{24}F_{13} \end{cases}$$

setzt, so wird die identische Gleichung (82) zu

84. $$V = u^2 - 4F_{23}F_{14}F_{24}F_{13}.$$

Die vier linearen Factoren, in welche Π zerfällt, sind nach (79) bekannt. Bezeichnet man nämlich durch A, B, C, D noch zu bestimmende Constanten, so wird:

85. $$\begin{cases} F_{23} = (m\varkappa + n\lambda + p\mu)A, \\ F_{14} = (m\varkappa + n\lambda - p\mu)B, \\ F_{24} = (m\varkappa - n\lambda + p\mu)C, \\ F_{13} = (-m\varkappa + n\lambda + p\mu)D. \end{cases}$$

Diese vier Constanten, zwischen welchen, wegen der zweiten Gleichung (83), die Relation

86. $$4ABCD = -1$$

statt hat, werden nun so zu bestimmen sein, dass

$$87.\qquad u = -F_{12}F_{34} + F_{23}F_{14} + F_{24}F_{13}$$

ist, oder, dass der Theil rechts der daraus folgenden Gleichung

$$88.\qquad F_{12}F_{34} = -u + F_{23}F_{14} + F_{24}F_{13}$$

in zwei lineäre Factoren F_{12}, F_{34} zerfällt, welche wir hierdurch kennen lernen.

Wenn wir der Kürze wegen $AB = E$ setzen, so ist, weil $CD = -\frac{1}{4E}$:

$$89.\qquad \begin{cases} F_{23}F_{14} = \{(m\varkappa + n\lambda)^2 - p^2\mu^2\}E, \\ F_{24}F_{13} = \{(m\varkappa - n\lambda)^2 - p^2\mu^2\}\frac{1}{4E}. \end{cases}$$

Man wird nun bemerken, dass der Theil rechts der Gleichung (88) aus den Quadraten der Variabeln $\varkappa$, λ, μ und dem einzigen Product $\varkappa\lambda$ zusammengesetzt ist. Soll aber ein solcher Ausdruck in zwei lineäre Factoren zerfallen, so muss die Summe der in μ^2 multiplicirten Glieder verschwinden. Setzen wir die Summe der in μ^2 multiplicirten Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (88) gleich 0, so erhalten wir zur Bestimmung von E die quadratische Gleichung:

$$90.\qquad E^2 + E\frac{a\beta + b\alpha}{a\beta - b\alpha} + \tfrac{1}{4} = 0,$$

woraus sich durch Auflösung

$$91.\qquad \begin{cases} E = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(a\beta)} + \sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{(a\beta)} - \sqrt{(b\alpha)}}, \\ \frac{1}{4E} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(a\beta)} - \sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{(a\beta)} + \sqrt{(b\alpha)}} \end{cases}$$

ergiebt. Setzt man endlich die Werthe von u aus (81) und von $F_{23}F_{14}$ und $F_{24}F_{13}$ aus (89) in (88), so erhält man:

$$92.\qquad F_{12}F_{34} = \frac{2}{a\beta - b\alpha}\{\varkappa^2 n^2 a\alpha - 2\varkappa\lambda nm\sqrt{(a\alpha b\beta)} + \lambda^2 m^2 b\beta\}.$$

Demnach ist:

$$93.\qquad \begin{cases} F_{12}F_{34} = \frac{2}{a\beta - b\alpha}\{\varkappa n\sqrt{(a\alpha)} - \lambda m\sqrt{(b\beta)}\}^2, \\ F_{23}F_{14} = -\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{(a\beta)} + \sqrt{(b\alpha)})^2}{a\beta - b\alpha}\{(m\varkappa + n\lambda)^2 - p^2\mu^2\}, \\ F_{24}F_{13} = \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{(a\beta)} - \sqrt{(b\alpha)})^2}{a\beta - b\alpha}\{-(m\varkappa - n\lambda)^2 + p^2\mu^2\}, \end{cases}$$

und man kann setzen:

94.
$$\begin{cases} F_{12} = \dfrac{2}{\sqrt{2\sqrt{(a\beta - b\alpha)}}}\{n\varkappa\sqrt{(a\alpha)} - m\lambda\sqrt{(b\beta)}\}, \\ F_{34} = \dfrac{2}{\sqrt{2\sqrt{(a\beta - b\alpha)}}}\{n\varkappa\sqrt{(a\alpha)} - m\lambda\sqrt{(b\beta)}\}, \\ F_{23} = -\dfrac{\sqrt{(a\beta)} + \sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{2\sqrt{(a\beta - b\alpha)}}}\{m\varkappa + n\lambda + p\mu\}, \\ F_{14} = +\dfrac{\sqrt{(a\beta)} + \sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{2\sqrt{(a\beta - b\alpha)}}}\{m\varkappa + n\lambda - p\mu\}, \\ F_{24} = +\dfrac{\sqrt{(a\beta)} - \sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{2\sqrt{(a\beta - b\alpha)}}}\{m\varkappa - n\lambda + p\mu\}, \\ F_{13} = +\dfrac{\sqrt{(a\beta)} - \sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{2\sqrt{(a\beta - b\alpha)}}}\{-m\varkappa + n\lambda + p\mu\}; \end{cases}$$

welche Ausdrücke folgender Gleichung identisch genügen:

95.
$$F = 4\,a\alpha\,b\beta\,c\gamma\,UV = F_{12}^2F_{34}^2 + F_{23}^2F_{14}^2 + F_{13}^2F_{24}^2 - 2\,F_{23}F_{14}F_{13}F_{24} - 2\,F_{13}F_{24}F_{12}F_{34} - 2\,F_{12}F_{34}F_{23}F_{14}.$$

Ich will diese Abhandlung nicht schliessen, ohne noch auf eine allgemeine Eigenschaft der 56 Berührungspunkte der 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung hinzuweisen.

Man weiss, dass durch die 56 Berührungspunkte einer beliebig gegebenen Curve vierter Ordnung eine Curve vierzehnter Ordnung hindurchgeht (Crelle's Journal Bd. 41 p. 292)[1]. Durch die Verbindung der Gleichung der gegebenen Curve mit der Gleichung der genannten Curve vierzehnten Grades kann man eine unendliche Zahl von Curven vierzehnten Grades bilden, welche ebenfalls durch jene 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgehen. Da es nun, nach § 15, 315 verschiedene Kegelschnitte giebt, welche durch je acht von den 56 Berührungspunkten der Doppeltangenten hindurchgehen, welchen Satz Herr Salmon zuerst veröffentlicht hat, so drängt sich die Frage auf, ob unter jenen Curven vierzehnten Grades nicht eine oder mehrere in sieben Kegelschnitte zerfallen. In der That finden sich leicht, gleichwie bei Herrn Salmon, sieben solcher Kegelschnitte a, b etc. Ich bezeichne dieselben in dem Folgenden durch die Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte sie hindurchgehen, nämlich

---

1) [Seite 288 dieser Ausgabe.]

a.	12	23	34	41,
b.	13	35	56	61,
c.	15	58	87	71,
d.	24	45	57	72,
e.	26	64	48	82,
f.	67	73	38	86,
g.	18	25	36	47.

Mit Hülfe der Tafel (§ 14) lassen sich aus dieser Combination von sieben Kegelschnitten leicht andere Combinationen von sieben Kegelschnitten ableiten, welche ebenfalls durch sämmtliche Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgehen. Es wäre aber interessant, zu erfahren, wie viele solcher Combinationen es überhaupt giebt.

Die drei Kegelschnitte a, b, c lassen sich auch durch zwei Curven dritter Ordnung h, i ersetzen, welche durch dieselben Berührungspunkte der Doppeltangenten als die Kegelschnitte hindurchgehen, nämlich

h.	12	23	35	58	87	71,
i.	14	43	31	16	65	51,

oder durch die beiden Curven dritter Ordnung h', i',

h'.	34	41	17	78	85	53,
i'.	12	23	31	15	56	61.

Ebenso lassen sich die Kegelschnitte d, e, f durch die Curven dritter Ordnung:

k.	24	45	57	76	68	82,
l.	26	64	48	83	37	72,

oder durch die Curven dritter Ordnung k', l',

k'.	24	48	83	37	76	62,
l'.	45	57	72	28	86	64,

ersetzen; was aus den in § 14 angeführten Sätzen erhellt.

Königsberg, im August 1853.

26.

Transformation der Gleichung der Curven vierzehnten Grades, welche eine gegebene Curve vierten Grades in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneiden.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 52, Seite 97—102.]

In Bd. 40 S. 260 dieses Journals[1]) findet man die Gleichung der Curven vierzehnten Grades aufgestellt, welche eine gegebene Curve vierten Grades in den 56 Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneidet, und in Bd. 41 S. 292[2]) habe ich diese Gleichung hergeleitet.

Durch ein etwas abgekürztes Verfahren hat Herr Salmon, auf demselben Wege, ganz dieselbe Gleichung erlangt, und zugleich eine geometrische Interpretation des einen Theils der Gleichung gegeben (A treatise on the higher plane curves pag. 89). Auch dem zweiten Theile der Gleichung lässt sich mit Hülfe des in diesem Journal Bd. 45 S. 87[3]) angegebenen Satzes eine geometrische Deutung unterlegen.

Mit Hülfe der Gleichung der gegebenen Curve lässt sich aber die erwähnte Gleichung vom vierzehnten Grade auf unendlich viele Arten *transformiren,* und ich werde ihr in Folgendem eine entsprechendere Form geben, in welcher auf *jeden* ihrer beiden Theile die Salmon'sche Interpretation Anwendung findet.

---

1) [Seite 260 dieser Ausgabe, Brief an Jacobi.]
2) [Seite 288 dieser Ausgabe.]
3) [Seite 302 dieser Ausgabe.]

Es seien irgend *neun* Grössen $v_\varkappa^\lambda$ gegeben, wo die Indices $\varkappa$ und λ die Zahlen 1, 2, 3 bedeuten. Irgend *neun* andere gegebene Grössen sollen durch $w_\varkappa^\lambda$ bezeichnet werden. In dieser Voraussetzung lassen sich immer neun Grössen $b_\varkappa^\lambda$ so angeben, dass der Gleichung

1. $$v_1^\lambda b_1^\varkappa + v_2^\lambda b_2^\varkappa + v_3^\lambda b_3^\varkappa = w_\varkappa^\lambda$$

Genüge geschieht.

In der That drückt diese Gleichung, da $\varkappa$ und λ die Zahlen 1, 2, 3 sind, *neun,* in Rücksicht auf die Grössen b lineäre Gleichungen aus, welche gerade diese Grössen unzweideutig bestimmen. Da aber nur drei von den Grössen, nämlich $b_1^\varkappa$, $b_2^\varkappa$, $b_3^\varkappa$, in die Gleichungen eingehen, indem man $\lambda = 1, 2, 3$ setzt, so erhält man durch Auflösung dieser drei Gleichungen:

2. $$V_\lambda^1 w_\varkappa^1 + V_\lambda^2 w_\varkappa^2 + V_\lambda^3 w_\varkappa^3 = V b_\lambda^\varkappa;$$

wo durch V die Determinante aus den neun Grössen v, und durch $V_\lambda^\varkappa$ ihre nach $v_\lambda^\varkappa$ genommenen partiellen Differentialquotienten bezeichnet werden.

Wir wollen ferner folgende Bezeichnungen annehmen:

3. $$\begin{cases} v_1^\varkappa x_1 + v_2^\varkappa x_2 + v_3^\varkappa x_3 = v^\varkappa, \\ w_1^\varkappa x_1 + w_2^\varkappa x_2 + w_3^\varkappa x_3 = w^\varkappa. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf diese Bezeichnungen ergiebt sich aus der Gleichung (2), wenn man sie mit $x_\varkappa$ multiplicirt, und dann 1, 2, 3 für $\varkappa$ setzt und addirt:

$$V_\lambda^1 w^1 + V_\lambda^2 w^2 + V_\lambda^3 w^3 = V\{b_\lambda^1 x_1 + b_\lambda^2 x_2 + b_\lambda^3 x_3\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit w^λ und setzt hierauf für λ die Zahlen 1, 2, 3, so findet sich für die *Summe* aller der Gleichungen:

4. $$\begin{aligned} \Sigma V_\lambda^\varkappa w^\varkappa w^\lambda = V\{&(b_1^1 w^1 + b_2^1 w^2 + b_3^1 w^3) x_1 \\ &+ (b_1^2 w^1 + b_2^2 w^2 + b_3^2 w^3) x_2 + (b_1^3 w^1 + b_2^3 w^2 + b_3^3 w^3) x_3\}. \end{aligned}$$

Wenn man dagegen in (2) $\varkappa = \lambda$ und hierauf für λ die Zahlen 1, 2, 3 setzt, so giebt die Addition

$$\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa = V\{b_1^1 + b_2^2 + b_3^3\}$$

oder

5. $$\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa = V\beta,$$

wenn der Kürze wegen

6. $$\beta = b_1^1 + b_2^2 + b_3^3$$

gesetzt wird. Multiplicirt man endlich die Gleichung (5) mit

$$w^1 x_1 + w^2 x_2 + w^3 x_3$$

und zieht sie von (4) ab, so erhält man:

7. $$\begin{aligned} &\Sigma V_\lambda^\varkappa w^\varkappa w^\lambda - (w^1 x_1 + w^2 x_2 + w^3 x_3) \Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa \\ &= V\{[(b_1^1 - \beta) w^1 + b_2^1 w^2 + b_3^1 w^3] x_1 + [b_1^2 w^1 + (b_2^2 - \beta) w^2 + b_3^2 w^3] x_2 \\ &\quad + [b_1^3 w^1 + b_2^3 w^2 + (b_3^3 - \beta) w^3] x_3\}. \end{aligned}$$

Um einen diesem ähnlichen Ausdruck aufzustellen, der aus ihm durch Vertauschung der Elemente v und w hervorgeht, löse man die Gleichung (1) nach den neun Grössen v auf. Dies giebt:

8. $$w_1^\lambda c_1^\varkappa + w_2^\lambda c_2^\varkappa + w_3^\lambda c_3^\varkappa = c\, v_\varkappa^\lambda,$$

wo c die aus den neun Grössen b gebildete Determinante, und $c_\varkappa^\lambda$ ihren nach $b_\lambda^\varkappa$ genommenen partiellen Differentialquotienten bedeutet.

Man sieht leicht, dass die Bezeichnungen in (1) und (8) in den beiden Gleichungen (3) so angenommen sind, dass diese Gleichungen *in einander übergehen,* wenn man überall die Buchstaben v und w mit einander vertauscht, und zugleich $b_\varkappa^\lambda$ mit $\frac{c_\varkappa^\lambda}{c}$. Der Vortheil der Bezeichnungsart ist klar; denn da die Gleichung (7) aus den genannten hervorgegangen ist, so ist es erlaubt, auch in dieser Gleichung die angegebene Vertauschung zu machen; wodurch sich dann, wenn man berücksichtigt, dass die aus den neun Grössen w gebildete Determinante $W = V.c$ ist,

9. $$\begin{aligned} &\Sigma W_\lambda^\varkappa v^\varkappa v^\lambda - (v^1 x_1 + v^2 x_2 + v^3 x_3) \Sigma W_\lambda^\varkappa v_\lambda^\varkappa \\ &= V\{[(c_1^1 - \gamma) v^1 + c_2^1 v^2 + c_3^1 v^3] x_1 + [c_1^2 v^1 + (c_2^2 - \gamma) v^2 + c_3^2 v^3] x_2 \\ &\quad + [c_1^3 v^1 + c_2^3 v^2 + (c_3^3 - \gamma) v^3] x_3\} \end{aligned}$$

ergiebt, in welcher Gleichung der Kürze wegen

10. $$\gamma = c_1^1 + c_2^2 + c_3^3$$

gesetzt ist.

Wir kehren wieder zu den Gleichungen (1) und deren Auflösungen (8) zurück. Multiplicirt man dieselben mit x_λ, setzt dann $\lambda = 1, 2, 3$ und addirt, so erhält man:

$$11. \quad \begin{cases} v_1 b_1^\varkappa + v_2 b_2^\varkappa + v_3 b_3^\varkappa = w_\varkappa, \\ w_1 c_1^\varkappa + w_2 c_2^\varkappa + w_3 c_3^\varkappa = c v_\varkappa; \end{cases}$$

unter der Voraussetzung, dass $v_\varkappa$, $w_\varkappa$ folgende Bedeutung haben:

$$12. \quad \begin{cases} v_\varkappa^1 x_1 + v_\varkappa^2 x_2 + v_\varkappa^3 x_3 = v_\varkappa, \\ w_\varkappa^1 x_1 + w_\varkappa^2 x_2 + w_\varkappa^3 x_3 = w_\varkappa. \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (11) stellt ein System von drei, in Rücksicht auf die Variabeln v_1, v_2, v_3 linearen Gleichungen, und die letzte die nach diesen Variabeln aufgelösten Gleichungen dar. Mit diesen Gleichungen findet aber zugleich folgendes merkwürdige System von Gleichungen statt:

$$13. \quad \begin{cases} (b_1^1 - \beta) w_1 + b_2^1 w_2 + b_3^1 w_3 = (c_1^1 - \gamma) v_1 + c_2^1 v_2 + c_3^1 v_3, \\ b_1^2 w_1 + (b_2^2 - \beta) w_2 + b_3^2 w_3 = c_1^2 v_1 + (c_2^2 - \gamma) v_2 + c_3^2 v_3, \\ b_1^3 w_1 + b_2^3 w_2 + (b_3^3 - \beta) w_3 = c_1^3 v_1 + c_2^3 v_2 + (c_3^3 - \gamma) v_3. \end{cases}$$

Aus den drei Gleichungen, welche die erste Gleichung (11) darstellt, ergiebt sich nämlich:

$$\begin{aligned} - b_2^2 w_1 + b_2^1 w_2 &= - c_3^3 v_1 + c_3^1 v_3, \\ - b_3^3 w_1 + b_3^1 w_3 &= - c_2^2 v_1 + c_2^1 v_2, \end{aligned}$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man die erste Gleichung (13).

Die Gleichungen (13) zeigen, dass die Ausdrücke (7) und (9) einander gleich sind, wenn $v^\varkappa = v_\varkappa$ und $w^\varkappa = w_\varkappa$ ist. Das Letztere ist der Fall, wenn $v_\varkappa^\lambda = v_\lambda^\varkappa$ und $w_\varkappa^\lambda = w_\lambda^\varkappa$ ist. Es findet also unter dieser Voraussetzung folgende identische Gleichung statt:

$$14. \quad \begin{aligned} &\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda - (w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3) \Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa \\ &= \Sigma W_\lambda^\varkappa v_\varkappa v_\lambda - (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3) \Sigma W_\lambda^\varkappa v_\lambda^\varkappa. \end{aligned}$$

Von dieser identischen Gleichung lassen sich interessante Anwendungen in der *Geometrie* machen, wenn man durch $v_\varkappa^\lambda$ die zweiten partiellen Differentialquotienten einer gegebenen homogenen Function v, $p$ten Grades, von den Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet, und durch $w_\varkappa^\lambda$ die zweiten partiellen Differentialquotienten einer andern gegebenen homogenen Function $q$ten Grades, von denselben Variabeln. Aus den Gleichungen (12) folgt

alsdann, mit Berücksichtigung der bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen:

$$v_\varkappa = (p-1)\frac{\partial v}{\partial x_\varkappa}, \qquad w_\varkappa = (q-1)\frac{\partial w}{\partial x_\varkappa};$$

und da

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = p(p-1)v,$$
$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = q(q-1)w$$

ist, so ergiebt sich aus (14), wenn man für $v_\varkappa$ und $w_\varkappa$ respective $(p-1)v_\varkappa$ und $(q-1)w_\varkappa$ setzt:

$$15. \qquad (q-1)^2 \Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda - q(q-1)w\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa$$
$$= (p-1)^2 \Sigma W_\lambda^\varkappa v_\varkappa v_\lambda - p(p-1)v\,\Sigma W_\lambda^\varkappa v_\lambda^\varkappa;$$

in welcher Gleichung $v_\varkappa$ und $w_\varkappa$ die ersten partiellen Differentialquotienten der Functionen v und w bedeuten.

Wir wollen nun diese identische Gleichung (15), in der Voraussetzung, dass $p = q = 2$ ist, in welcher die Gleichungen $v = 0$ und $w = 0$ *zwei Kegelschnitte* darstellen, *geometrisch* deuten. Die Gleichung $\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda = 0$, welche ebenfalls die Gleichung eines *Kegelschnitts* ist, stellt den *geometrischen Ort der Pole aller Tangenten des Kegelschnitts* v in Rücksicht auf den Kegelschnitt w dar. Dieser Kegelschnitt geht mithin durch die vier Punkte, in welchen die, den beiden Kegelschnitten v und w gemeinschaftlichen Tangenten den Kegelschnitt w *berühren.* Diese Eigenschaft hat aber auch der durch folgende Gleichung dargestellte Kegelschnitt:

$$(q-1)^2 \Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda - q(q-1)w\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa = 0.$$

Da nun auf gleiche Weise der Kegelschnitt

$$(p-1)^2 \Sigma W_\lambda^\varkappa v_\varkappa v_\lambda - p(p-1)v\Sigma W_\lambda^\varkappa v_\lambda^\varkappa = 0$$

durch die vier Punkte geht, in welchen die den beiden Kegelschnitten v und w gemeinschaftlichen Tangenten den Kegelschnitt v berühren, und beide Kegelschnitte, deren Gleichungen zuletzt aufgestellt wurden, nach (15), in *einen* zusammenfallen, so wird dadurch der bekannte Satz bewiesen: *Dass sich durch die acht Berührungspunkte der zweien Kegelschnitten u und v gemeinschaftlichen Tangenten wieder ein Kegelschnitt legen*

lässt, dessen analytischer Ausdruck irgend eine der beiden zuletzt aufgestellten Gleichungen ist.

Es wurde aber die identische Gleichung (15) desshalb entwickelt, um sie in dem Falle $p = 4$ und $q = 6$ zu benutzen; in welchem Falle die Gleichung in folgende übergeht:

$$16. \qquad 25\,\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda - 30\,w\,\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa = 9\,\Sigma W_\lambda v_\varkappa v_\lambda - 12\,v\,\Sigma W_\lambda^\varkappa v_\lambda^\varkappa.$$

Man lasse ausserdem die Function w vom sechsten Grade die Determinante bedeuten, welche aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der gegebenen homogenen Function v, vierten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3, gebildet wird. Dies ist dieselbe Function, die im Vorhergehenden durch V bezeichnet wurde.

Diese identische Gleichung (16) dient nun dazu, die in Bd. 40 S. 260 und Bd. 41 S. 292 [1]) angegebene Gleichung der Curve vierzehnten Grades, welche die gegebene Curve vierter Ordnung $v = 0$ in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneidet und welche sich durch

$$17. \qquad \Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda - 3\,.\,w\,\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa = 0$$

darstellen lässt, auf mehrfache Art *umzugestalten.*

Am besten wird es sein, die Summe $\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\lambda^\varkappa$ zu eliminiren; wodurch man, mit Berücksichtigung der Gleichung $v = 0$, für die Curve vierzehnten Grades, welche die gegebene Curve $v = 0$ vierten Grades in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneidet, die transformirte Gleichung

$$18. \qquad 5\,\Sigma V_\lambda^\varkappa w_\varkappa w_\lambda = 3\,\Sigma W_\lambda^\varkappa v_\varkappa v_\lambda$$

erhält.

Wenn man für die Zeichen in dieser Gleichung ihre Werthe setzt, und zugleich für die Summen die Determinantenformen anwendet, so stellt sich die Gleichung wie folgt dar:

---

1) [Seite 260 und 288 dieser Ausgabe.]

$$5.\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_3} & \frac{\partial w}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \frac{\partial w}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_3 \partial x_3} & \frac{\partial v}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix},$$

in welcher w die Determinante

$$w = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_3} \end{vmatrix}$$

bedeutet und $v = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve vierten Grades ist.

Königsberg, im Januar 1855.

27.

Ueber die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 54, Seite 227—273.]

Die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale, wie Jacobi dieselben in einem im Jahre 1836 an die Akademie der Wissenschaften zu Berlin und im 17. Band des Crelle'schen Journals p. 68 mitgetheilten Schreiben zu finden angiebt, sind seitdem der Gegenstand vielfacher und schöner Beweise geworden von Lebesgue und Delaunay in Liouville's Journal Tom. IV p. 17 und p. 209 a. 1841, von Bertrand Journal de l'école polytechnique a. 1841, von Eisenlohr in einer in Mannheim 1853 gedruckten Abhandlung. Spitzer verlässt den von Jacobi betretenen Weg in seiner mit eben so grosser Geistesschärfe als Fleiss ausgearbeiteten und in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie 1854 p. 1014 mitgetheilten Abhandlung. Was auf dem ersteren Wege nicht so zu Tage tritt, die wahre Form, auf welche die zweite Variation zurückzuführen ist, ergiebt sich auf dem anderen, so zu sagen, von selbst. Dagegen macht die nöthige Beschränkung der in diese Form eingehenden willkürlichen Constanten, in dem allgemeinen Falle wenigstens, unüberwindliche Schwierigkeiten, welche der von Jacobi eingeschlagene Weg ganz vermeidet.

In der folgenden Abhandlung habe ich erstens versucht, die eigentliche Quelle aufzudecken, aus der Jacobi seine Resultate schöpfte, und

zweitens die Jacobi'sche Transformation der zweiten Variation auf die Spitzer'sche Form zurückgeführt. Zur Erreichung des ersten Zweckes dienen die Eigenschaften der homogenen Functionen zweiter Ordnung. Die Theorie der Determinanten bildet die Brücke, welche die Jacobi'sche Transformation der zweiten Variation mit der Spitzer'schen verbindet.

1.

Es ist die Aufgabe der Variations-Rechnung, y als Function von x dergestalt zu bestimmen, dass ein Integralausdruck von der Form:

$$1. \qquad \Delta = \int_a^b f(x, y, y', \dots y^{(n)})\, dx$$

in welchem man $f(x, y, y', \dots y^{(n)})$ als eine gegebene Function, sowohl der unabhängigen Variabeln x, als der zu bestimmenden Function y und ihrer Differentialquotienten $y', \dots y^{(n)}$ zu betrachten hat, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Lagrange giebt in dem 12. Capitel seiner „Théorie des fonctions analytiques“ folgenden Weg an zur Lösung des Problems.

Man denke sich y als Function von x den Bedingungen der Aufgabe gemäss bestimmt. Unter dieser Voraussetzung muss für y eine jede andere, von ihr unendlich wenig verschiedene Function von x gesetzt den obigen Integralausdruck verkleinern im Falle des Maximums, oder vergrössern im Falle des Minimums. Jede beliebige, unendlich wenig von der Function y verschiedene Function kann man sich aber unter der Form vorstellen $y + z$, wo z das Product ist aus einer unendlich kleinen bald positiven, bald negativen Grösse ε und einer beliebigen Function von x, welche der einzigen Bedingung unterworfen ist, zwischen und in den Grenzen der Integration nicht unendlich zu werden.

Setzt man also $y + z$ für y, also auch $y' + z'$ für y' etc. und entwickelt den auf diese Weise geänderten Integralausdruck Δ nach aufsteigenden Potenzen der unendlich kleinen Grösse ε, indem man die unter dem Integralzeichen stehende Function f nach der Aenderung nach dem Taylor'schen Satze entwickelt; so wird der von ε unabhängige Term der Entwickelung der obige Integralausdruck Δ selber.

Die Summe der Terme der ersten Ordnung, das sind die mit der ersten Potenz von ε multiplicirten Terme, welche man die erste Variation des gegebenen Integralausdrucks Δ nennt, lässt sich also darstellen:

$$2. \qquad \Delta_1 = \int_a^b \varphi\, dx,$$

wenn man der Kürze wegen setzt $\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}} = a_p$ und:

$$3. \qquad \varphi = a_0 z + a_1 z' + \cdots + a_n z^{(n)},$$

während die Summe der Terme zweiter Ordnung, welche den Factor ε^2 enthalten, die halbe zweite Variation des Integralausdruckes, die Gestalt annimmt:

$$4. \qquad \tfrac{1}{2}\Delta_2 = \int_a^b \psi\, dx,$$

wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)}\partial y^{(q)}} = a_{pq}$ und:

$$5. \qquad 2\psi = a_{00} zz + 2 a_{01} zz' + a_{11} z'z' + \cdots + 2 a_{n-1,n} z^{(n-1)} z^{(n)} + a_{n,n} z^{(n)} z^{(n)}.$$

Man hat daher den geänderten Integralausdruck Δ

$$6. \qquad \int_a^b f(x, y+z, \ldots y^{(n)} + z^{(n)})\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b \varphi\, dx + \int_a^b \psi\, dx + \cdots$$

gleich einer nach aufsteigenden Potenzen der unendlich kleinen Grösse ε geordneten Reihe. Der Werth dieser Reihe kann aber für alle unendlich kleinen, bald positiven, bald negativen Werthe von ε nicht entweder immer kleiner sein als ihr erstes Glied Δ, oder auch nicht immer grösser sein, wenn nicht das zweite Glied, die erste Variation, verschwindet. Da dasselbe auch noch zutreffen soll, welches auch die Function z sei, so muss auch das doppelte dritte Glied, die zweite Variation, ihr Vorzeichen nicht ändern.

Die Function y, welche den Integralausdruck Δ zu einem Maximum oder Minimum macht, erfüllt also zwei Bedingungen. Sie macht die erste Variation Δ_1 des Integralausdruckes Δ verschwinden und zugleich das Vorzeichen der zweiten Variation Δ_2 unveränderlich, welches auch die unbestimmte Function z sei.

Aus der ersten Bedingung entspringt die Differentialgleichung $2n$ter Ordnung zwischen x und der zu bestimmenden Function y. Die Integration dieser Differentialgleichung führt $2n$ willkürliche Constanten mit sich. Um nun eine ganz bestimmte Aufgabe vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dass für $x=a$ und $x=b$ die gesuchte Function y und die $n-1$ ersten Differentialquotienten derselben gegebene Werthe annehmen, wodurch eben die Werthe der $2n$ Constanten der Integration sich bestimmen. Unter dieser Annahme ist aber die Willkürlichkeit der Function z noch in der Weise zu beschränken, dass für $x=a$ und für $x=b$ diese Function zugleich mit ihren $n-1$ ersten Differentialquotienten verschwindet.

Die Willkürlichkeit der zweiten Variation beruht hiernach allein auf der unbestimmten Function z.

Man kann die zweite Variation auf die Form zurückführen:

$$7. \qquad \Delta_2 = \int_a^b a_{n,n} \{m_0 z + m_1 z' + \cdots + m_{n-1} z^{(n-1)} + z^{(n)}\}^2 \, dx.$$

In dieser Form erkennt man leicht die Criterien für die Unveränderlichkeit des Vorzeichens darin, dass weder $a_{n,n}$ sein Vorzeichen innerhalb der Grenzen der Integration a und b ändert, noch der Ausdruck unter dem Integralzeichen innerhalb dieser Grenzen unendlich gross wird. Denn wenn $a_{n,n}$ innerhalb der Grenzen der Integration sein Vorzeichen ändert, so zeigt Lagrange am angeführten Orte, dass durch passende Annahme von z auch die ganze zweite Variation bald positiv bald negativ gemacht werden kann.

Wenn durch Integration der genannten Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung die Function y mit ihren $2n$ willkürlichen Constanten gefunden ist, so bedarf es nunmehr keiner weiteren Integration, um die zweite Variation auf die Form (7) zurückzuführen. Vielmehr ergeben sich die Integrale der linearen Differentialgleichungen, auf welche frühere Mathematiker das Problem zurückführten, ganz von selber. Diese Entdeckung verdanken wir Jacobi.

Es gehen, wie man sieht, in die vorliegende Untersuchung nur die beiden in Rücksicht auf $z, z', \ldots$ homogenen Functionen φ und ψ ein, die erste vom ersten, die andere vom zweiten Grade. Wir wollen dieselben, als die Elemente der Untersuchung, einer ausführlichen Diskussion unterwerfen.

2.

Es sei ein Differentialausdruck von der Form gegeben:

$$\varphi = a_0 z + a_1 z' + a_2 z'' + \cdots + a_n z^{(n)}, \tag{8}$$

in welchem die Grössen a gegebene Functionen der unabhängigen Variabeln x bedeuten, z eine unbekannte Function dieser Variabeln, $z', z'', \ldots z^{(n)}$ die auf einander folgenden Differentialquotienten der unbekannten Function z. Ein beliebiges Glied der Reihe, woraus die Function φ zusammengesetzt ist, kann man also darstellen:

$$a_p z^{(p)} = (-1)^p \left\{ a_p^{(p)} z - \frac{p}{1} \frac{d a_p^{(p-1)} z}{dx} + \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{d^2 a_p^{(p-2)} z}{dx^2} - \cdots \right\}. \tag{9}$$

Setzt man in dieser Gleichung für p nach einander die Zahlen 0, 1, ... n und addirt, so erhält man folgende neue Form der Function φ:

$$\varphi = A_0 z - \frac{d A_1 z}{dx} + \frac{d^2 A_2 z}{dx^2} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n A_n z}{dx^n}, \tag{10}$$

in welcher die Grössen A die Bedeutung haben:

$$A_0 = a_0 - a_1' + a_2'' - \cdots + (-1)^n a_n^{(n)}, \tag{11}$$

$$A_q = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q} a_p^{(p-q)}. \tag{12}$$

Setzt man ferner:

$$\pi = + A_1 z - \frac{d A_2 z}{dx} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} A_n z}{dx^{n-1}},$$

also gleich einem in Rücksicht auf $z, z', \ldots z^{(n-1)}$ linearen Differentialausdruck, in welchem der Differentialquotient $z^{(n)}$ nicht vorkommt, so hat man:

$$\varphi = A_0 z - \frac{d\pi}{dx}. \tag{13}$$

Diese Gleichung dient zur Transformation der ersten Variation Δ_1, wenn φ die Function (3) bedeutet. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\Delta_1 = \int_a^b \varphi\, dx = \int_a^b A_0 z\, dx - [\pi]_a^b.$$

Da aber z mit seinen $n-1$ ersten Differentialquotienten für die Grenzen a und b verschwindet, so verschwindet auch das letzte Glied der angegebenen Gleichung, und man hat:

$$\Delta_1 = \int_a^b A_0 z \, dx.$$

Dieser Integralausdruck kann aber für jede beliebige Function z nicht verschwinden, wenn nicht A_0 verschwindet. $A_0 = 0$ ist also die Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation. Setzt man in dieser Gleichung für A_0 seinen Werth aus (11) und ebenso die Werthe der Grössen

$$a_p = \frac{\partial f}{\partial y^{(p)}} = f'(y^{(p)}),$$

so erhält man die Gleichung:

14. $$f'(y) - \frac{d f'(y')}{dx} + \frac{d^2 f'(y'')}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n f'(y^{(n)})}{dx^n} = 0,$$

die Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung, von welcher in dem vorhergehenden Paragraphen die Rede war. Man muss sich diese Differentialgleichung integrirt, oder y als Function von x mit den $2n$ willkürlichen Constanten dargestellt denken, wenn man sich an die Untersuchung der zweiten Variation machen will. Wir kehren jedoch nach dieser Nutzanwendung der Gleichung (13) zu der angefangenen Untersuchung der Function φ (8) zurück.

Es ist bekanntlich:

15. $$\frac{d^p a_p z}{dx^p} = a_p^{(p)} z + \frac{p}{1} a_p^{(p-1)} z' + \frac{p(p-1)}{1.2} a_p^{(p-2)} z'' + \cdots$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(-1)^p$ und setzt:

16. $$\Phi = a_0 z - \frac{d a_1 z}{dx} + \frac{d^2 a_2 z}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n a_n z}{dx^n},$$

so erhält man, wenn man für p nach einander die Zahlen $0, 1, \ldots n$ setzt und die Gleichungen addirt, unter Berücksichtigung von (12):

$$\Phi = A_0 z + A_1 z' + A_2 z'' + \cdots + A_n z^{(n)}.$$

Den Differentialausdruck Φ in (16) wollen wir das *Complement* des Differentialausdruckes φ in (8) nennen. Die letzte Gleichung giebt die Entwicklung des Complementes. Das Complement des Complementes:

$$A_0 z - \frac{d A_1 z}{dx} + \frac{d^2 A_2 z}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n A_n z}{dx^n}$$

ist aber nach (10) der Differentialausdruck φ, von dem wir ausgegangen sind. Demnach haben wir folgenden Satz (Crelle's Journal Bd. 32, p. 189):

Das Complement vom Complemente eines gegebenen linearen homogenen Differentialausdruckes ist der gegebene Differentialausdruck selber.

Um diesem Satze eine andere Fassung zu geben, wollen wir daran erinnern, dass $\Phi = 0$ die Multiplicatorgleichung ist für die Differentialgleichung $\varphi = 0$. Umgekehrt ist auch $\varphi = 0$ die Multiplicatorgleichung für die Differentialgleichung $\Phi = 0$; was wir so ausdrücken können:

Die Multiplicatorgleichung von der Multiplicatorgleichung einer gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln ist die gegebene Differentialgleichung selber.

Aus der Definition des Complementes folgt:

Dass das Complement der Summe oder der Differenz mehrerer linearen homogenen Differentialausdrücke gleich ist der Summe oder der Differenz der Complemente dieser Differentialausdrücke;

ein Satz, von dem in der folgenden Untersuchung Gebrauch gemacht werden soll.

Wir wollen noch auf eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft eines linearen homogenen Differentialausdruckes und seines Complementes aufmerksam machen, welcher wir folgenden Ausdruck geben:

Wenn $\varphi(z)$ einen linearen homogenen Differentialausdruck der unbestimmten Function z und ihrer Differentialquotienten $z', z'', \ldots z^{(n)}$ bezeichnet, dagegen $\Phi(z)$ das Complement desselben und u eine beliebige andere unbestimmte Function, so ist die Differenz

$$17. \qquad u\,\varphi(z) - z\,\Phi(u)$$

ein vollständiger Differentialquotient.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Angabe, wenn man die Bedingung der Integrabilität des genannten Ausdruckes aufstellt, welche von selber erfüllt wird.

3.

Unter den linearen homogenen Differentialausdrücken von der Form (8) verdienen eine besondere Beachtung diejenigen, deren Complement ihnen gleich ist.

Das Complement eines linearen homogenen Differentialausdruckes von ungerader Ordnung kann niemals dem Differentialausdrucke selber gleich sein,

weil der Coëfficient von $z^{(n)}$ in (8) gleich a_n, und in der Entwickelung von (16) $(-1)^n a_n$ ist. Dagegen kann das Complement eines Differentialausdruckes von ungerader Ordnung wohl dem negativen Differentialausdrucke selber gleich sein. Doch auf die Untersuchung dieser Differentialausdrücke gehen wir nicht weiter ein.

Es ist $\frac{d^p a_p z^{(p)}}{dx^p}$ ein linearer homogener Differentialausdruck von der $2p$ten Ordnung, dessen Complement ihm gleich ist.

In der That, setzt man in (15) $z^{(p)}$ statt z, so hat man:

$$\frac{d^p a_p z^{(p)}}{dx^p} = a_p^{(p)} z^{(p)} + \frac{p}{1} a_p^{(p-1)} z^{(p+1)} + \frac{p(p-1)}{1.2} a_p^{(p-2)} z^{(p+2)} + \cdots$$

während man aus der Gleichung (9) durch $p$malige Differentiation erhält:

$$\frac{d^p a_p z^{(p)}}{dx^p} = (-1)^p \left\{ \frac{d^p a_p^{(p)} z}{dx^p} - \frac{p}{1} \frac{d^{p+1} a_p^{(p-1)} z}{dx^{p+1}} + \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{d^{p+2} a_p^{(p-2)} z}{dx^{p+2}} - \cdots \right\}.$$

Der rechte Theil dieser Gleichung ist aber nach der Definition das Complement des rechten Theiles der vorhergehenden Gleichung.

Hieraus geht nun mit Berücksichtigung des letzten Satzes in dem vorhergehenden Paragraphen folgender allgemeine Satz hervor:

Das Complement eines jeden Differentialausdruckes von der Form:

$$A = a_0 z - \frac{d a_1 z'}{dx} + \frac{d^2 a_2 z''}{dx^2} - \cdots + (-1)^p \frac{d^p a_p z^{(p)}}{dx^p}$$

ist dem Differentialausdrucke selber gleich.

Dieses ist zugleich die allgemeinste Form eines linearen Differentialausdruckes von der $2p$ten Ordnung, welcher seinem Complemente gleich ist; was wir in Form eines Satzes so ausdrücken:

Jeder lineare homogene Differentialausdruck von der 2pten Ordnung, welcher seinem Complemente gleich ist, lässt sich auf die Form zurückführen:

$$A = a_0 z - \frac{d\, a_1 z'}{d x} + \frac{d^2 a_2 z''}{d x^2} - \cdots + (-1)^p \frac{d^p a_p z^{(p)}}{d x^p}.$$

Denn es sei:

$$B = b_0 z + b_1 z' + \cdots + b_{2p} z^{(2p)}$$

ein Differentialausdruck von der genannten Eigenschaft. Da aber auch der Differentialausdruck A dieselbe Eigenschaft hat, so wird nach dem letzten Satze des vorhergehenden Paragraphen auch das Complement des Differentialausdruckes $B - A$ diesem Differentialausdrucke gleich sein. Der Differentialausdruck A führt aber $p + 1$ unbestimmte Functionen a mit sich, welche dazu verwendet werden können, in dem nach den Differentialquotienten von z geordneten Ausdrucke $B - A$ die Coëfficienten der $p + 1$ Differentialquotienten von gerader Ordnung verschwinden zu machen. Man hätte dann einen Differentialausdruck $B - A$ von ungerader Ordnung, dessen Complement ihm gleich ist; was aber nach dem ersten Satze dieses Paragraphen nicht statt haben kann. Daher ist: $B - A = 0$, oder B von der Form A. Hierdurch ist zugleich der Weg angedeutet, den gegebenen Differentialausdruck B auf die Form A zurückzuführen.

Um dem Differentialausdrucke A eine andere Gestalt zu geben, wollen wir setzen:

$$2\psi = a_0 z^2 + a_1 z'^2 + a_2 z''^2 + \cdots + a_p z^{(p)2}.$$

Alsdann wird A gleich:

$$\psi'(z) - \frac{d\,\psi'(z')}{d x} + \frac{d^2 \psi'(z'')}{d x^2} - \cdots + (-1)^p \frac{d^p \psi'(z^{(p)})}{d x^p},$$

ein Ausdruck, welcher bekanntlich identisch verschwindet, wenn die Functionen a der Art sind, dass sie den Ausdruck ψ zu einem vollständigen Differentialquotienten machen (13. Cap. der Théorie des fonct.). Man kann daher für die Function ψ, die nur die Quadrate von z und ihrer Differentialquotienten enthält, auch eine andere Function des zweiten

Grades in Rücksicht auf $z, z', \ldots$ setzen, ohne dadurch diesen Ausdruck seinem Werthe nach zu ändern, wenn der Unterschied beider Functionen ein vollständiger Differentialquotient ist. Diese Bemerkung führt zu dem allgemeineren Satze:

Wenn

$$18.\quad 2\psi = a_{00}zz + 2a_{01}zz' + a_{11}z'z' + \cdots + a_{n-1,n}z^{(n-1)}z^{(n)} + a_{n,n}z^{(n)}z^{(n)},$$

so ist das Complement des Differentialausdruckes:

$$19.\quad \Psi = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \frac{d^2\psi'(z'')}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n\psi'(z^{(n)})}{dx^n}$$

diesem Ausdruck selber gleich.

Diesen Satz wird man zugleich mit dem folgenden bewiesen haben, der für die Transformation der zweiten Variation von besonderer Wichtigkeit ist:

Der Differentialausdruck:

$$19.\quad \Psi = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \frac{d^2\psi'(z'')}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n\psi'(z^{(n)})}{dx^n}$$

lässt sich auf die Form zurückführen.

$$20.\quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 z - \frac{d\mathfrak{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{A}_2 z''}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n\mathfrak{A}_n z^{(n)}}{dx^n}.$$

Denn da das Complement von $\mathfrak{A}$ nach dem Vorhergehenden gleich $\mathfrak{A}$ ist, so wird, wenn $\Psi = \mathfrak{A}$, auch das Complement von Ψ gleich Ψ sein. Der Beweis des letzten Satzes beruht aber darauf, dass man einen vollständigen Differentialquotienten $\frac{d\pi}{dx}$ vom zweiten Grade in Rücksicht auf $z, z' \ldots$, und von der $n$ten Ordnung dergestalt bestimmen kann, dass die Produkte $z^{(\varkappa)}z^{(\lambda)}$ aus der Summe $\left(\psi + \frac{d\pi}{dx}\right)$ ganz herausgehen und nur die Quadrate $(z^{(\varkappa)})^2$ übrig bleiben. Denn setzt man in Ψ diese Summe für ψ, so bleibt der Ausdruck Ψ seinem Werthe nach ungeändert, nimmt aber die Form $\mathfrak{A}$ an.

Der gesuchte Differentialausdruck π kann nur von der Form sein:

$$2\pi = b_{00}zz + 2b_{01}zz' + b_{11}z'z' + \cdots + 2b_{n-2,n-1}z^{(n-2)}z^{(n-1)} + b_{n-1,n-1}z^{(n-1)}z^{(n-1)}.$$

Da derselbe aber $\frac{n(n+1)}{2}$ unbestimmte Functionen b enthält, so lassen sich dieselben immer so bestimmen, dass in dem Ausdrucke $\psi + \frac{d\pi}{dx}$ die Coefficienten der $\frac{n(n+1)}{2}$ Produkte $z^{(\varkappa)} z^{(\lambda)}$ verschwinden und nur die Quadrate $(z^{(\varkappa)})^2$ übrig bleiben, so dass man hat:

$$21. \qquad 2\left(\psi + \frac{d\pi}{dx}\right) = \mathfrak{A}_0 z^2 + \mathfrak{A}_1 z'^2 + \mathfrak{A}_2 z''^2 + \cdots + \mathfrak{A}_n z^{(n)2}.$$

Wenn man die Coëfficienten der $\frac{n(n+1)}{2}$ Producte $z^{(\varkappa)} z^{(\lambda)}$ in dem Ausdrucke $\psi + \frac{d\pi}{dx}$ verschwinden lässt, so erhält man eben so viele Differentialgleichungen zwischen den als bekannt vorausgesetzten Functionen a und den $\frac{n(n+1)}{2}$ zu bestimmenden Functionen b, von welchen die $n+1$ Functionen $\mathfrak{A}$ abhängen. Auf diese Differentialgleichungen, welche die Functionen b ohne Integration ergeben, gehen wir nicht weiter ein, weil die Zurückführung der gegebenen Function 2ψ durch Hinzufügung eines vollständigen Differentialquotienten $2\frac{d\pi}{dx}$ auf die Form (21) sich durch einfachere Operationen ermöglicht, die in den folgenden Paragraphen entwickelt werden sollen.

4.

Aufgabe.

Es ist gegeben eine homogene Function des zweiten Grades und der nten Ordnung von der Form:

$$18. \quad 2\psi = a_{00} zz + 2a_{01} zz' + a_{11} z'z' + \cdots + 2a_{n-1,n} z^{(n-1)} z^{(n)} + a_{n,n} z^{(n)} z^{(n)},$$

es soll dieselbe durch Hinzufügung eines vollständigen Differentialquotienten $2\frac{d\pi}{dx}$ *auf die Form gebracht werden:*

$$21. \qquad 2\left(\psi + \frac{d\pi}{dx}\right) = \mathfrak{A}_0 z^2 + \mathfrak{A}_1 z'^2 + \mathfrak{A}_2 z''^2 + \cdots + \mathfrak{A}_n z^{(n)2}.$$

Da es Schwierigkeit macht, eine Function π zu bestimmen dergestalt, dass in der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi}{dx}\right)$ alle Produkte $z^{(\varkappa)} z^{(\lambda)}$ zugleich verschwinden, so wollen wir eine Function π_0 suchen, welche in der angegebenen Summe die Producte $zz^{(n)}, z'z^{(n)}, \ldots, z^{(n-1)} z^{(n)}$ verschwinden macht. Dieses wird erreicht, indem wir setzen:

$$2\pi_0 = -(2a_{n,0}z + 2a_{n,1}z' + \cdots + 2a_{n,n-2}z^{(n-2)} + a_{n,n-1}z^{(n-1)})z^{(n-1)}.$$

Alsdann wird in der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx}\right)$ der Coëfficient von $z^{(n)2}$ gleich $a_{n,n}$ und der Coëfficient von $(z^{(n-1)})^2$ gleich $a_{n-1,n-1} - a'_{n,n-1} - 2a_{n,n-2}$. Zu dieser Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx}\right)$ werden wir wieder einen Differentialquotienten $2\frac{d\pi_1}{dx}$ addiren, der in der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx} + \frac{d\pi_1}{dx}\right)$ die Producte $zz^{(n-1)}, z'z^{(n-1)}, \ldots, z^{(n-2)}z^{(n-1)}$ verschwinden macht. Fahren wir in der beschriebenen Weise fort, die Producte verschwinden zu machen, so kommen wir, wenn wir setzen $\pi = \pi_0 + \pi_1 + \ldots$, schliesslich auf die Gleichung (21). Da die Bildung der Function π keine Integrationen verlangt, so rechtfertigt sich die in dem vorhergehenden Paragraphen gemachte Bemerkung, dass die dort erwähnten $\frac{n(n+1)}{2}$ Differentialgleichungen die Functionen b ohne Integration ergeben. Die Werthe der Functionen $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n-1}, \ldots$ erhält man hierdurch der Reihe nach:

$$22. \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_n = a_{n,n} \\ \mathfrak{A}_{n-1} = a_{n-1,n-1} - a'_{n,n-1} - 2a_{n,n-2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Auf der andern Seite kann man aber auch eine Function

$$2\pi_0 = -(\alpha_{00}z + 2\alpha_{01}z' + \cdots + 2\alpha_{0,n-1}z^{(n-1)})z$$

bestimmen derart, dass aus der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx}\right)$ die Producte zz', $zz'', \ldots zz^{(n)}$ sämmtlich herausgehen. Dieses wird zutreffen, wenn man den Functionen α die Werthe zuertheilt:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_{00} & = + a_{01} - a'_{02} + a''_{03} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{0,n}^{(n-1)} \\
\alpha_{01} & = \quad + a_{02} - a'_{03} + \cdots + (-1)^{n-2} a_{0,n}^{(n-2)} \\
\alpha_{02} & = \quad\quad + a_{03} - \cdots + (-1)^{n-3} a_{0,n}^{(n-3)} \\
\cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\alpha_{0,n-1} & = \quad\quad\quad + a_{0,n}.
\end{array}$$

Der Coëfficient $\mathfrak{A}_0$ von z^2 in der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx}\right)$ wird hiernach:

$$\mathfrak{A}_0 = a_{00} - a'_{01} + a''_{02} - \cdots + (-1)^n a_{0,n}^{(n)}, \tag{23.}$$

während die Coëfficienten b_{11}, $2b_{12}$, $2b_{13}$, ... $2b_{1,n}$ der Producte $z'z'$, $z'z''$, $z'z'''$, ... $z'z^{(n)}$ die Werthe erhalten:

$$\begin{array}{lll}
b_{11} & = a_{11} & - 2\alpha_{01} \\
2b_{12} & = 2a_{12} & - 2\alpha_{02} \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\
2b_{1,n-1} & = 2a_{1,n-1} & - 2\alpha_{0,n-1} \\
2b_{1,n} & = 2a_{1,n},
\end{array}$$

die übrigen Coëfficienten aber dieselben wie in 2ψ bleiben.

Auf dieselbe Weise wird man wieder eine Function:

$$2\pi_1 = -(\beta_{11} z' + 2\beta_{12} z'' + \cdots + 2\beta_{1,n-1} z^{(n-1)}) z'$$

bestimmen können dergestalt, dass aus der Summe $2\left(\psi + \frac{d\pi_0}{dx} + \frac{d\pi_1}{dx}\right)$ die Producte $z'z''$, $z'z'''$, ... $z'z^{(n)}$ herausgehen etc. Der Coëfficient von z'^2 wird hiernach:

$$\mathfrak{A}_1 = b_{11} - b'_{12} + b''_{13} - \cdots + (-1)^{n-1} b_{1,n}^{(n-1)},$$

oder wenn man für die Functionen b ihre Werthe setzt:

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{cases} a_{11} - a'_{12} + a''_{13} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{1,n}^{(n-1)} \\ \quad - 2a_{02} + 3a'_{03} - 4a''_{04} + \cdots + (-1)^{n-1} n a_{0,n}^{(n-2)}. \end{cases} \tag{24.}$$

. . . .

Mag man nun mit der Bildung der Functionen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_{n-1}$, ... oder mit der Bildung der Functionen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, ... den Anfang machen, das allgemeine Bildungsgesetz derselben wird schwer zu erkennen sein. Dieses Bildungsgesetz wird sich aber herausstellen, wenn man untersucht, welche

Terme zur Bildung der Functionen $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_n$ jedes einzelne Glied der Function ψ hergiebt. Hierzu dient folgende Gleichung:

$$25.\quad \begin{aligned} 2\,zz^{(p)} &= (z^2)^{(p)} - \frac{p}{1}(z'^2)^{(p-2)} + \frac{p}{2}\cdot\frac{p-3}{1}(z''^2)^{(p-4)} \\ &\quad - \frac{p}{3}\,\frac{(p-4)(p-5)}{1.2}(z'''^2)^{(p-6)} + \cdots \\ &\cdots + (-1)^q\frac{p}{q}\,\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-2q+1)}{1.2.3\ldots(q-1)}\big((z^{(q)})^2\big)^{(p-2q)} + \cdots, \end{aligned}$$

in welcher die Bezeichnungen gebraucht sind:

$$z^{(p)} = \frac{d^p z}{dx^p};\qquad (z^2)^{(p)} = \frac{d^p(z^2)}{dx^p};\qquad (z'^2)^{(p-2)} = \frac{d^{p-2}\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}{dx^{p-2}};$$

$$\big((z^{(q)})^2\big)^{(p-2q)} = \frac{d^{p-2q}\left(\left(\frac{d^q z}{dx^q}\right)^2\right)}{dx^{p-2q}}.$$

Es muss noch bemerkt werden, dass diese für $2\,zz^{(p)}$ gegebene Reihe nicht in's Unbegrenzte fortläuft, sondern mit demjenigen Gliede abzubrechen ist, welches aufhört, einen Sinn zu haben, das ist, wenn $p-2q$ negativ wird.

Man kann den Beweis dieser Entwicklung von $2\,zz^{(p)}$ in derselben Weise führen, wie man die allgemeine Gültigkeit solcher durch Induction gefundenen Gleichungen darzuthun pflegt. Denn differentiirt man die Gleichung (25), deren rechten Theil wir der Kürze wegen mit R bezeichnen, nach x, so erhält man:

$$2\,zz^{(p+1)} + 2\,z'z'^{(p-1)} = \frac{dR}{dx},$$

woraus

$$2\,zz^{(p+1)} = \frac{dR}{dx} - 2\,z'z'^{(p-1)}.$$

Setzt man nun in (25) z' für z und $p-1$ für p, so erhält man die Entwicklung von $2\,z'z'^{(p-1)}$. Die Differenz $\frac{dR}{dx} - 2\,z'z'^{(p-1)}$ wird aber gerade die Reihe ergeben, die man aus (25) erhält, wenn man $p+1$ für p setzt.

Die Gleichung (25) lässt sich noch dadurch verallgemeinern, dass man $z^{(r)}$ setzt für z, wodurch sie übergeht in:

$$2\, z^{(r)}\, z^{(r+p)} = \left((z^{(r)})^2\right)^{(p)} - \frac{p}{1}\left((z^{(r+1)})^2\right)^{(p-2)} + \frac{p}{2}\,\frac{(p-3)}{1}\left((z^{(r+2)})^2\right)^{(p-4)}$$

$$26. \qquad - \frac{p}{3}\,\frac{(p-4)(p-5)}{1.2}\left((z^{(r+3)})^2\right)^{(p-6)} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^q \frac{p}{q}\,\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-2q+1)}{1.2.3\ldots(q-1)}\left((z^{(r+q)})^2\right)^{(p-2q)} + \cdots$$

Hiernach wird irgend ein Glied der Function $2\,\psi$ in (18):

$$2\, a_{r,r+p}\, z^{(r)}\, z^{(r+p)}$$

sich in mehrere Glieder zerlegen lassen von der Form:

$$C\,.\, a_{r,r+p}\left((z^{(r+q)})^2\right)^{(p-2q)},$$

wo C eine Constante bedeutet. Dieser Differentialausdruck ist aber nach (9) gleich:

$$(-1)^{p-2q}\, C\, a^{(p-2q)}_{r,r+p}\,(z^{(r+q)})^2 - 2\,\frac{d\pi}{dx}\,.$$

Vereinigt man wieder alle diese einzelnen Glieder, sowie auch die verschiedenen Functionen π zu einer einzigen, so erhält man:

$$27. \qquad 2\,.\, a_{r,r+p}\, z^{(r)}\, z^{(r+p)} + 2\cdot\frac{d\pi}{dx}$$

$$= (-1)^p\,.\, a^{(p)}_{r,r+p}(z^{(r)})^2 + (-1)^{p+1}\frac{p}{1}\, a^{(p-2)}_{r,r+p}(z^{(r+1)})^2 + (-1)^{p+2}\frac{p}{2}\cdot\frac{(p-3)}{1}\, a^{(p-4)}_{r,r+p}(z^{(r+2)})^2$$

$$+ (-1)^{p+3}\frac{p}{3}\cdot\frac{(p-4)(p-5)}{1.2}\, a^{(p-6)}_{r,r+p}(z^{(r+3)})^2 + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{p+q}\frac{p}{q}\cdot\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-2q+1)}{1.2.3\ldots(q-1)}\, a^{(p-2q)}_{r,r+p}(z^{(r+q)})^2 + \cdots$$

Diese Reihe ist ebenfalls mit demjenigen Gliede abzubrechen, welches aufhört, eine Bedeutung zu haben, das ist, wenn $p - 2q$ negativ wird. Sie führt durch Hinzufügung eines vollständigen Differentialquotienten ein beliebiges Glied der Function $2\,\psi$, welches nicht schon die Form (21) hat, auf diese Form zurück. Die Function $2\,\psi$ nimmt hiernach mit Hinzufügung eines passenden Differentialquotienten selbst die Form (21) an, und man erkennt das Gesetz, nach welchem in der Gleichung (21) die Functionen $\mathfrak{A}$ aus den Coëfficienten a der Function $2\,\psi$ und deren Differentialquotienten sich zusammensetzen.

5.

Den letzten Satz im dritten Paragraphen können wir nunmehr auch so ausdrücken:

Der Differentialausdruck:

$$\Psi = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n \psi'(z^{(n)})}{dx^n}$$

bleibt ungeändert, wenn man für die Function 2ψ *setzt:*

$$\mathfrak{A}_0 z^2 + \mathfrak{A}_1 z'^2 + \cdots + \mathfrak{A}_{n-1} (z^{(n-1)})^2 + a_{n,n} (z^{(n)})^2. \tag{28}$$

Denn nach (22) ist $\mathfrak{A}_n = a_{n,n}$, und die Ausdrücke der anderen Functionen $\mathfrak{A}$ sind nach dem in dem vorhergehenden Paragraphen entwickelten Gesetze leicht aufzustellen.

Mag man nun für 2ψ entweder den gegebenen Ausdruck (18) wählen oder die durch Hinzufügung eines vollständigen Differentialquotienten zur gegebenen Function 2ψ transformirte Function (28), so entdeckt man leicht eine zweite merkwürdige Eigenschaft des Differentialausdruckes Ψ, die sich in Form eines Satzes also ausdrücken lässt:

Wenn die Function 2ψ *der Variabeln* $z, z', \ldots z^{(n)}$ *durch die Substitution* $z = u \,.\, z_1$ *übergeht in eine Function* $2 \,.\, \psi_1$ *der Variabeln* $z_1, z_1', \ldots z_1^{(n)}$, *so geht der Differentialausdruck:*

$$\Psi = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n \psi'(z^{(n)})}{dx^n}$$

durch dieselbe Substitution über in:

$$\Psi = \frac{1}{u} \left\{ \psi_1'(z_1) - \frac{d\psi_1'(z_1')}{dx} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n \psi_1'(z_1^{(n)})}{dx^n} \right\}.$$

Die Function ψ der Variabeln $z, z', \ldots z^{(n)}$ geht durch die Substitution:

$$\begin{cases} z = u z_1 \\ z' = u' z_1 + u z_1' \\ z'' = u'' z_1 + 2u' z_1' + u z_1'' \\ z^{(3)} = u^{(3)} z_1 + 3u'' z_1' + 3u' z_1'' + u z_1^{(3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{29}$$

in eine Function ψ_1 der Variabeln $z_1, z_1', z_1'' \ldots$ über. Differentiirt man nun die Function ψ unter dieser Hypothese nach den neuen Variabeln und setzt der Kürze wegen:

$$\frac{d\psi}{dz_1^{(q)}} = \psi_1'(z_1^{(q)}) \qquad \text{und} \qquad \psi'(z^{(r)}) = a_r,$$

so erhält man:

$$30. \quad \begin{cases} \psi_1'(z_1) &= u a_0 + u' a_1 + \;\; u'' a_2 + \;\; u^{(3)} a_3 + \cdots \\ \psi_1'(z_1') &= \qquad\quad u a_1 + 2u' a_2 + 3u'' a_3 + \cdots \\ \psi_1'(z_1'') &= \qquad\qquad\qquad u a_2 + 3u' a_3 + \cdots \\ \psi_1'(z_1^{(3)}) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad u a_3 + \cdots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Differentiirt man diese Gleichungen abwechselnd mit dem positiven und negativen Zeichen genommen nach der unabhängigen Variabeln x, die zweite einmal, die dritte zweimal und so weiter und addirt die unter einander stehenden Glieder der rechten Theile aller Gleichungen, so wird das $(p+1)$te Glied der Summe:

$$u^{(p)} a_p - \frac{p}{1} \frac{du^{(p-1)} a_p}{dx} + \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{d^2 u^{(p-2)} a_p}{dx^2} - \cdots,$$

ein Ausdruck, welcher aus (9) hervorgeht, wenn man daselbst für a_p setzt u und für z setzt a_p. Dieser Ausdruck wird also gleich:

$$(-1)^p u \,.\, a_p^{(p)} = (-1)^p u \cdot \frac{d^p \psi'(z^{(p)})}{dx^p}.$$

Es ist daher die Summe aller jener Gleichungen:

$$31. \quad \begin{aligned} &\psi_1'(z_1) - \frac{d\psi_1'(z_1')}{dx} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n \psi_1'(z_1^{(n)})}{dx^n} \\ &= u\left\{\psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n \psi'(z^{(n)})}{dx^n}\right\}. \end{aligned}$$

Die Function $2\psi_1$ ist in Rücksicht auf $z_1, z_1', \ldots$ von derselben Form, als die Function 2ψ in Rücksicht auf $z, z', \ldots$, aus welcher sie durch die genannten Substitutionen (29) hervorgegangen. Die Coëfficienten der Quadrate und Producte von $z_1, z_1', \ldots$ in ihr sind aber homogene Functionen des zweiten Grades von $u, u' \ldots$, und zwar ist der Coëfficient von $(z_1^{(n)})^2$ gleich $u^2 a_{n,n}$. Es hat demnach die Function $2\psi_1$ die Form:

$$32. \quad 2\psi_1 = b_{00} z_1^2 + 2b_{01} z_1 z_1' + \cdots + u^2 a_{n,n} (z_1^{(n)})^2.$$

Aber auch die anderen Coëfficienten b in dieser Function, welche den Index 0 haben, sind leicht zu bestimmende Functionen von $u, u', \ldots$

In der That, differentiirt man die durch die Substitutionen (29) identische Gleichung $\psi_1 = \psi$ nach z_1, so erhält man:

$$\psi_1'(z_1) = u\psi'(z) + u'\psi'(z') + \cdots + u^{(n)}\psi'(z^{(n)}),$$

ein Ausdruck, welcher ungeändert bleibt, wenn man u mit z vertauscht, wie folgt:

$$\psi_1'(z_1) = z\psi'(u) + z'\psi'(u') + \cdots + z^{(n)}\psi'(u^{(n)}).$$

Es ist aber auch nach (32)

$$\psi_1'(z_1) = b_{00}z_1 + b_{01}z_1' + \cdots + b_{0,n}z_1^{(n)}.$$

Aus dem Vergleich dieser beiden durch die Substitutionen (29) identischen Ausdrücke für $\psi_1'(z_1)$ ergiebt sich nun:

$$33.\quad \begin{cases} b_{00} = u\psi'(u) + u'\psi'(u') + u''\psi'(u'') + u^{(3)}\psi'(u^{(3)}) + \cdots \\ b_{01} = \phantom{u\psi'(u) + {}} u\psi'(u') + 2u'\psi'(u'') + 3u''\psi'(u^{(3)}) + \cdots \\ b_{02} = \phantom{u\psi'(u) + u'\psi'(u') + {}} u\psi'(u'') + 3u'\psi'(u^{(3)}) + \cdots \\ b_{03} = \phantom{u\psi'(u) + u'\psi'(u') + u''\psi'(u'') + {}} u\psi'(u^{(3)}) + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

ein System von Gleichungen, welches analog den Gleichungen (30) gebildet ist, und aus welchen durch eine gleiche Behandlung folgende der Gleichung (31) entsprechende Gleichung hervorgeht:

$$34.\quad b_{00} - b_{01}' + b_{02}'' - \cdots + (-1)^n b_{0,n}^{(n)} = u\left\{\psi'(u) - \frac{d\psi'(u')}{dx} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n\psi'(u^{(n)})}{dx^n}\right\}.$$

Wie sich nun der rechte Theil der Gleichung (31) vereinfacht, ohne seinen Werth zu ändern, wenn man für 2ψ die Function (28) setzt, ebenso kann man auch den linken Theil derselben Gleichung vereinfachen. Denn bestimmt man einen vollständigen Differentialquotienten $\frac{d\omega}{dx}$ dergestalt, dass die Summe $2\psi_1 + 2\frac{d\omega}{dx}$ von der Form wird:

$$35.\quad \mathfrak{B}_0(z_1)^2 + \mathfrak{B}_1(z_1')^2 + \cdots + \mathfrak{B}_n(z_1^{(n)})^2,$$

so ändert auch der rechte Theil der Gleichung (31) seinen Werth nicht, wenn man für die Function $2\psi_1$ die Function (35) setzt. In dieser letzteren Function bedeuten die Coëfficienten $\mathfrak{B}$ dieselben Functionen der

Coëfficienten in $2\psi_1$, als die entsprechenden Grössen $\mathfrak{A}$ Functionen der Coëfficienten in 2ψ sind. Es ist daher nach (23) und (22)

$$36.\qquad \begin{aligned}\mathfrak{B}_0 &= b_{00} - b'_{01} + b''_{02} \cdots + (-1)^n b^{(n)}_{0,n}\\ \mathfrak{B}_n &= u^2 a_{n,n}.\end{aligned}$$

Die durch die Substitutionen (29) identische Gleichung (31) nimmt hiernach, wenn man für die Function $2\psi_1$ die Function (35) setzt, die Gestalt an:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{B}_0 z_1 - \frac{d\mathfrak{B}_1 z'_1}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{B}_2 z''_1}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n u^2 a_{n,n} z_1^{(n)}}{dx^n}\\ &= u\left\{\psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \frac{d^2\psi'(z'')}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n\psi'(z^{(n)})}{dx^n}\right\},\end{aligned}$$

woraus, wenn man das Glied $\mathfrak{B}_0 z_1 = \mathfrak{B}_0 \frac{z}{u}$ auf die andere Seite der Gleichung bringt, für $\mathfrak{B}_0$ den Werth aus (36) und (34) setzt, und für die Function Ψ in (19) der Kürze wegen das Zeichen braucht $\Psi(z)$, man erhält

$$37.\qquad \begin{aligned}-\frac{d}{dx}\left\{\mathfrak{B}_1 z'_1 - \frac{d\mathfrak{B}_2 z''_1}{dx} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} u^2 a_{n,n} z_1^{(n)}}{dx^{n-1}}\right\}\\ = u\,.\,\Psi(z) - z\,\Psi(u).\end{aligned}$$

Es stellt sich also der Ausdruck $u\,.\,\Psi(z) - z\,\Psi(u)$ als ein vollständiger Differentialquotient dar. Dieses war vorauszusehen. Denn nach dem vorletzten Satze des § 3 ist das Complement des Differentialausdruckes $\Psi(z)$ diesem Differentialausdrucke selber gleich, unter welcher Voraussetzung eben der letzte Satz des § 2 auf den angegebenen Differentialausdruck anwendbar ist. Was aber nicht vorauszusehen war, ist die Form des Integrals jenes vollständigen Differentialausdruckes, welche aus der Gleichung (37) hervorleuchtet. Sie ist dieselbe in Rücksicht auf die Grössen $z'_1, z''_1, \ldots z_1^{(n)}$, welche die Function Ψ nach dem letzten Satze des § 3 in Rücksicht auf die Grössen $z, z', \ldots z^{(n)}$ annimmt. Diese Bemerkung führt mit Berücksichtigung der vorhergehenden Sätze zu folgendem sehr merkwürdigen Satz:

Wenn $\Psi(z)$ einen in Rücksicht auf die unbestimmte Function z und ihre Differentialquotienten $z', z'', \ldots z^{(p)}$ linearen homogenen Differentialausdruck bedeutet, dessen Complement ihm selber gleich ist, so ist der Differentialausdruck

$$u\,\Psi(z) - z\,\Psi(u)$$

ein vollständiger Differentialquotient, was auch u für eine Function sei der unabhängigen Variabeln, und das Integral dieses Differentialausdruckes geht durch die Substitution $z = u z_1$, indem z_1 ganz daraus verschwindet, in einen in Rücksicht auf z_1', z_1'', ... $z_1^{(p-1)}$ linearen homogenen Differentialausdruck über von der Eigenschaft, dass, wenn man in demselben z_1' als die unbestimmte Function betrachtet mit ihren Differentialquotienten z_1'', z_1''', ... $z_1^{(p-1)}$, das Complement ihm selber gleich ist.

Setzt man nun, um abzukürzen,

38. $$\Psi_1(z_1') = \mathfrak{B}_1 z_1' - \frac{d\,\mathfrak{B}_2 z_1''}{dx} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1} u^2 a_{n,n} z_1^{(n)}}{dx^{n-1}},$$

so erhält man durch Integration von (37)

39. $$\int \{u\,\Psi(z) - z\,\Psi(u)\}\,dx = -\Psi_1(z_1').$$

Wenn aber u ein Werth von z ist, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt, so geht (39) über in:

40. $$\int u\,\Psi(z)\,dx = -\Psi_1(z_1').$$

Diese Gleichung ist der analytische Ausdruck des Satzes von Jacobi (Crelle's Journal Bd. 17, pag. 71), den wir als Corollar des vorhergehenden Satzes also wiedergeben:

Wenn $\Psi(z)$ einen in Rücksicht auf die unbestimmte Function z und ihre Differentialquotienten z', z'', ... $z^{(p)}$ linearen homogenen Ausdruck bedeutet, dessen Complement ihm selber gleich ist, und u einen Werth von z, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt, so ist der Differentialausdruck $u\,\Psi(z)$ ein vollständiger Differentialquotient. Das Integral desselben geht durch die Substitution $z = u z_1$, indem z_1 daraus verschwindet, in einen in Rücksicht auf z_1', z_1'', ... $z_1^{(p-1)}$ linearen homogenen Differentialausdruck über, dessen Complement ihm selber gleich ist, wenn man darin z_1' als die neue unbestimmte Function betrachtet und demnach z_1'', z_1''', ... $z_1^{(p-1)}$ als die Differentialquotienten dieser Function.

Diese Sätze erscheinen wichtig genug, um sie noch durch einen zweiten Beweis zu begründen.

6.

Die Function Ψ lässt sich nach dem letzten Satze des § 3 auf die Form zurückführen:

$$\mathfrak{A}_0 z - \frac{d\mathfrak{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2 \mathfrak{A}_2 z''}{dx^2} - \cdots$$

Jeder Term derselben hat die Eigenschaft, dass er seinem Complemente gleich ist. Es wird also der zuletzt angegebene allgemeine Satz auch stattfinden müssen, wenn man für die Function Ψ die Function wählt:

$$\frac{d^p \mathfrak{A}_p z^{(p)}}{dx^p}.$$

Und umgekehrt, wenn jener Satz für diese Function erwiesen ist, so wird er auch auf die Summe oder Differenz solcher Functionen, aus welchen die allgemeine Function Ψ zusammengesetzt ist, sich ausdehnen lassen.

Um für den vorliegenden Fall den Ausdruck $u\,\Psi(z) - z\,\Psi(u)$ darzustellen, setze man in Gleichung (9) für a_p und z respective u und $\mathfrak{A}_p z^{(p)}$. Dadurch geht die genannte Gleichung über in:

$$u\,\frac{d^p \mathfrak{A}_p z^{(p)}}{dx^p} = (-1)^p \left\{ \mathfrak{A}_p z^{(p)} u^{(p)} - \frac{p}{1}\,\frac{d\mathfrak{A}_p z^{(p)} u^{(p-1)}}{dx} + \cdots \right\},$$

und wenn man in dieser Gleichung u mit z vertauscht:

$$z\,\frac{d^p \mathfrak{A}_p u^{(p)}}{dx^p} = (-1)^p \left\{ \mathfrak{A}_p u^{(p)} z^{(p)} - \frac{p}{1}\,\frac{d\mathfrak{A}_p u^{(p)} z^{(p-1)}}{dx} + \cdots \right\}.$$

Zieht man nun die letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man den gesuchten Ausdruck:

$$\begin{aligned} &u\,\frac{d^p \mathfrak{A}_p z^{(p)}}{dx^p} - z\,\frac{d^p \mathfrak{A}_p u^{(p)}}{dx^p} \\ 41.\quad &= (-1)^p \frac{d}{dx} \left\{ U_1 - \frac{dU_2}{dx} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{d^{p-1} U_p}{dx^{p-1}} \right\}, \end{aligned}$$

wenn man setzt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_p(u^{(p)}z^{(p)} - u^{(p)}z^{(p)}) &= 0\\
\frac{p}{1}\mathfrak{A}_p(u^{(p)}z^{(p-1)} - u^{(p-1)}z^{(p)}) &= U_1\\
\dots\dots\dots\dots &\\
\frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{1.2\dots r}\mathfrak{A}_p(u^{(p)}z^{(p-r)} - u^{(p-r)}z^{(p)}) &= U_r\\
\dots\dots\dots\dots &\\
\mathfrak{A}_p(u^{(p)}z - uz^{(p)}) &= U_p.
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke werden lineare homogene Functionen der Grössen $z_1', z_1'', \dots z_1^{(p)}$, wenn man in ihnen für z setzt uz_1 und entwickelt. Bezeichnet man den Coëfficienten von $z_1^{(q)}$ in der Entwickelung von U_r mit (r, q), so wird derselbe:

$$(r, q) = \frac{\mathfrak{A}_p}{1.2\dots r.1.2\dots q}\{p(p-1)\dots(p-r-q+1)u^{(p)}u^{(p-r-q)}$$
$$-p(p-1)\dots(p-r+1)p(p-1)\dots(p-q+1)u^{(p-r)}u^{(p-q)}\},$$

ein Ausdruck, welcher ungeändert bleibt, wenn man r mit q vertauscht.

Jenes System von Gleichungen, welche, wie bemerkt wurde, in Rücksicht auf $z_1', z_1'', \dots z_1^{(p)}$ linear sind, hat demnach noch die Eigenschaft, dass die Horizontalreihen der Coëfficienten von $z_1', z_1'', \dots z_1^{(p)}$ den entsprechenden Verticalreihen gleich sind. Mithin lassen sich die linearen Ausdrücke links von den Gleichheitszeichen als die partiellen Differentialquotienten einer homogenen Function X_p der zweiten Ordnung in Rücksicht auf $z_1', z_1'', \dots z_1^{(p)}$ dergestalt darstellen, dass:

$$X_p'(z_1') = U_1, \qquad X_p'(z_1'') = U_2, \qquad \dots \qquad X_p'(z_1^{(p)}) = U_p.$$

Multiplicirt man nun das obige System von linearen Gleichungen der Reihe nach mit $z_1, z_1', \dots z_1^{(p)}$ und addirt, so erhält man die doppelte Function X_p. Addirt man aber sämmtliche positiven unter einander stehenden Glieder in der nicht entwickelten Form und dann sämmtliche negativen Glieder, und bemerkt, dass

$$z^{(p)}z_1 + \frac{p}{1}z^{(p-1)}z_1' + \dots = \frac{d^p zz_1}{dx^p} \text{ und } u^{(p)}z_1 + \frac{p}{1}u^{(p-1)}z_1' + \dots = \frac{d^p uz_1}{dx^p},$$

so wird:

$$\mathfrak{A}_p\left\{u^{(p)}\frac{d^p zz_1}{dx^p} - z^{(p)}\frac{d^p uz_1}{dx^p}\right\} = 2X_p$$

oder, wenn man für z seinen Werth uz_1 setzt:

$$42. \qquad \mathfrak{A}_p \left\{ u^{(p)} \frac{d^p u z_1^2}{d x^p} - \frac{d^p u z_1}{d x^p} \cdot \frac{d^p u z_1}{d x^p} \right\} = 2\, X_p.$$

Dieses ist der symbolische Ausdruck für die in Rücksicht auf z_1', z_1'', ... $z_1^{(p)}$ homogene Function des zweiten Grades X_p, deren partielle Differentialquotienten eben die in (41) mit U bezeichneten Grössen sind. Hiernach nimmt die Gleichung (41) die Gestalt an:

$$u \frac{d^p \mathfrak{A}_p z^{(p)}}{d x^p} - z \frac{d^p \mathfrak{A}_p u^{(p)}}{d x^p}$$

$$= (-1)^p \frac{d}{d x} \left\{ X_p'(z_1') - \frac{d X_p'(z_1'')}{d x} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{d^{p-1} X_p'(z_1^{(p)})}{d x^{p-1}} \right\}.$$

Diese Gleichung liefert den Beweis, dass der behandelte Differentialausdruck ein vollständiger Differentialquotient ist, und dass zugleich das Integral durch die Substitution $z = u z_1$ in eine lineare homogene Function von z_1', z_1'', ... übergeht, deren Complement ihm selber gleich ist.

Setzt man nun:

$$43. \qquad X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

so folgt aus der letzten Gleichung, da:

$$\Psi(z) = \Sigma(-1)^p \frac{d^p \mathfrak{A}_p z^{(p)}}{d x^p} \quad \text{und} \quad \Psi(u) = \Sigma(-1)^p \frac{d^p \mathfrak{A}_p u^{(p)}}{d x^p},$$

wenn man jene Gleichung mit $(-1)^p$ multiplicirt, für p nach einander die Zahlen 0, 1, ... n setzt und addirt:

$$44. \quad u\,\Psi(z) - z\,\Psi(u) = \frac{d}{d x} \left\{ X'(z_1') - \frac{d X'(z_1'')}{d x} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} X'(z_1^{(n)})}{d x^{n-1}} \right\}.$$

Das Integral hiervon ist ebenfalls seinem Complemente gleich.

Wenn aber u ein Werth von z ist, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt, und man setzt:

$$45. \qquad -\Psi_1(z_1') = X'(z_1') - \frac{d X'(z_1'')}{d x} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} X'(z_1^n)}{d x^{n-1}},$$

so erhält man durch Integration von (44)

$$46. \qquad \int u \,.\, \Psi(z)\, d x = -\Psi_1(z_1'),$$

ein Integral von allgemeinerer Form als das in (39), (38), dessen nachzuweisende Eigenschaft aber nach dem vorletzten Satze des dritten Paragraphen aus seiner Form ebenfalls hervorleuchtet.

7.

Die vorangegangenen Untersuchungen dienen dazu, die zweite Variation (4) des Integralausdruckes (1)

47. $$\Delta_2 = \int_a^b 2\,\psi\,dx$$

auf die Form (7) zurückzuführen. Diese Transformation wird den Gegenstand dieses Abschnittes bilden.

Da 2ψ, wie aus (5) erhellt, eine homogene Function der zweiten Ordnung ist in Rücksicht auf $z, z', \ldots z^{(n)}$, so hat man, wenn man der Kürze wegen setzt $\psi'(z^{(p)}) = a_p$,

$$2\,\psi = a_0 z + a_1 z' + \cdots + a_n z^{(n)}.$$

Ein Ausdruck, der, wie (8) auf die Form (13), auf gleiche Weise auf die Form gebracht werden kann:

$$2\,\psi = A_0 z - \frac{d\pi}{dx},$$

wo $A_0 = a_0 - a_1' + \cdots + (-1)^n a_n^{(n)}$. Da aber π für die Grenzen des Integrals verschwindet, weil jedes Glied eine der Functionen $z, z', \ldots z^{(n-1)}$ als Factor enthält, welche der Annahme nach in den Grenzen des Integrals verschwinden, so erhält man durch Integration, wenn man für die eingeführten Grössen a wieder ihre Werthe setzt, mit Berücksichtigung von (19), und dass Ψ und $\Psi(z)$ gleichbedeutend sind:

48. $$\Delta_2 = \int_a^b z\,\Psi(z)\,dx.$$

Es ist hier, wie in der ganzen Untersuchung, stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass kein Glied der Function 2ψ (5) innerhalb der Grenzen der Integration unendlich wird.

Durch die Substitution $z = u z_1$, wo u einen Werth von z bedeutet, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt, und durch theilweise Integration geht die zweite Variation, wenn man ferner beachtet, dass auch z_1 für die Grenzen des Integrals verschwindet, mit Zuziehung der Gleichung (40) über in:

49. $$\Delta_2 = \int_a^b z_1' \Psi_1(z_1') \, dx.$$

Dieser Integralausdruck ist von ganz ähnlicher Form als der vorhergehende. Man wird ihn daher wieder ebenso behandeln können, indem man setzt $z_1' = v_1' z_2'$ und annimmt, dass v_1' ein Werth von z_1' sei, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z_1') = 0$ genügt. Durch diese Substitution nimmt die zweite Variation die Gestalt an:

50. $$\Delta_2 = \int_a^b z_2'' \Psi_2(z_2'') \, dx,$$

worin $\Psi(z_2'') = -\int v_1' \Psi_1(z_1') \, dx$ von der Form ist:

51. $$\Psi_2(z_2'') = \mathfrak{C}_2 z_2'' - \frac{d \mathfrak{C}_3 z_2'''}{dx} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} u^2 v_1'^2 a_{n,n} z_2^{(n)}}{dx^{n-2}}.$$

Indem man dieses Verfahren nun fortsetzt, gelangt man endlich zu dem folgenden Ausdrucke für die zweite Variation:

52. $$\Delta_2 = \int_a^b z_n^{(n)} \Psi_n(z_n^{(n)}) \, dx,$$

wo $\Psi_n(z_n^{(n)})$ den Werth hat:

53. $$\Psi_n(z_n^{(n)}) = u^2 v_1'^2 w_2''^2 \cdots a_{n,n} z_n^{(n)}.$$

Setzt man aber diesen Werth in (52), so erhält man die gesuchte Form der zweiten Variation:

54. $$\Delta_2 = \int_a^b a_{n,n} (u v_1' w_2'' \cdots z_n^{(n)})^2 \, dx.$$

Um dieses Integral weiter zu behandeln, muss man sich die Substitutionen vergegenwärtigen, welche auf dasselbe geführt haben. Sie sind folgende:

55. $$z = u z_1, \qquad z_1' = v_1' z_2', \qquad z_2'' = w_2'' z_3'', \quad \ldots$$

wo u, v_1', w_2'', ... Werthe respective der unbekannten Functionen z, z_1', z_2'', ... bedeuten, welche den n Differentialgleichungen genügen:

56. $$\Psi(z) = 0, \quad \Psi_1(z_1') = 0, \quad \Psi_2(z_2'') = 0, \quad \ldots,$$

die durch folgende Relationen ihre Bedeutung erlangen:

57. $$\int u\,\Psi(z)\,dx = -\,\Psi_1(z_1'), \quad \int v_1'\,\Psi_1(z_1')\,dx = -\,\Psi_2(z_2''), \quad \ldots$$

Die Differentialgleichungen (56) lassen sich durch die angegebenen Substitutionen (55) zurückführen auf Differentialgleichungen zwischen der einen unbekannten Function z und ihren Differentialquotienten. Die erste Gleichung (56) ist von der gewünschten Form. Man erreicht dieses bei der zweiten Gleichung, wenn man setzt:

$$z_1' = \frac{d\left(\frac{z}{u}\right)}{dx},$$

bei der dritten, wenn man setzt:

$$z_2'' = \frac{d\left(\frac{1}{v_1'} \cdot \frac{d\left(\frac{z}{u}\right)}{dx}\right)}{dx} \cdots.$$

Es werden demnach den Werthen $u, v_1', w_2'', \ldots$ von $z, z_1', z_2'', \ldots$, welche jenen Differentialgleichungen (56) genügen, Werthe von z entsprechen, welche den umgeformten Differentialgleichungen und auf Grund der Relationen (57) auch der einen Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügen. Diese entsprechenden Werthe von z seien:

$$u, \qquad v, \qquad w, \qquad \ldots$$

Alsdann hat man folgende Relationen, welche aus (55) hervorgehen:

58. $$\begin{cases} v = u v_1, & w = u w_1, & \ldots & z = u z_1, \\ & w_1' = v_1' w_2', & \ldots & z_1' = v_1' z_2', \\ & & \ldots & z_2'' = w_2'' z_3'', \\ & & & \ldots\ldots \end{cases}$$

Diese Relationen werden dazu dienen, das Product

59. $$u\, v_1'\, w_2'' \ldots z_n^{(n)},$$

dessen Quadrat in das Integral (54) eingeht, durch $u, v, w, \ldots z$ und die Differentialquotienten dieser Grössen auszudrücken. Bei dieser Gelegenheit kommt ein Satz von den Determinanten in Anwendung, den ich gelesen zu haben mich nicht erinnere. Er lautet also:

Wenn $a, b, c, \ldots$ $(n+1)$ Functionen einer einzigen Variabeln und $a', a'', \ldots a^{(n)}$ die auf einander folgenden Differentialquotienten der ersten, $b', b'', \ldots b^{(n)}$ der zweiten $\ldots$ Function bedeuten, so ist.

$$\begin{vmatrix} (\lambda a) & (\lambda a)' & \ldots & (\lambda a)^{(n)} \\ (\lambda b) & (\lambda b)' & \ldots & (\lambda b)^{(n)} \\ (\lambda c) & (\lambda c)' & \ldots & (\lambda c)^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \lambda^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} a & a' & \ldots & a^{(n)} \\ b & b' & \ldots & b^{(n)} \\ c & c' & \ldots & c^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

mag λ eine Constante oder eine Function der unabhängigen Variabeln sein.

Betrachten wir nun die Determinante:

$$60. \qquad \nabla = \begin{vmatrix} u & u' & \ldots & u^{(n)} \\ v & v' & \ldots & v^{(n)} \\ w & w' & \ldots & w^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & z' & \ldots & z^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Dieselbe geht, wenn man für $u, v, w, \ldots z$ die Werthe setzt aus der ersten Horizontalreihe (58)

$$u.1, \quad uv_1, \quad uw_1, \quad \ldots \quad uz_1,$$

nach dem angegebenen Determinantensatze über in

$$\nabla = u^{n+1} \begin{vmatrix} v_1' & v_1'' & \ldots & v_1^{(n)} \\ w_1' & w_1'' & \ldots & w_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1' & z_1'' & \ldots & z_1^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Setzt man wieder für $v_1', w_1', \ldots z_1'$ die aus der zweiten Horizontalreihe (58) genommenen Werthe:

$$v_1'.1, \quad v_1' w_2', \quad \ldots \quad v_1' z_2',$$

so erhält man auf gleiche Weise:

$$\nabla = u^{n+1} v_1'^{n} \begin{vmatrix} w_2'' & \dots & w_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_2'' & \dots & z_2^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Diese Operation, fortgesetzt, ergiebt endlich folgenden Werth der Determinante:

61. $$\nabla = u^{n+1} v_1'^{n} w_2''^{n-1} \dots z_n^{(n)}.$$

Ebenso wird sich die Determinante:

62. $$\nabla_n = \begin{vmatrix} u & u' & \dots & u^{(n-1)} \\ v & v' & \dots & v^{(n-1)} \\ w & w' & \dots & w^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

welche sich von der Determinante ∇ nur dadurch unterscheidet, dass die letzte Horizontal- und die letzte Verticalreihe darin fehlen, wie folgt darstellen lassen:

63. $$\nabla_n = u^n v'^{n-1} w''^{n-2} \dots$$

Dividirt man nun (63) in (61), so erhält man das gesuchte Product:

64. $$\frac{\nabla}{\nabla_n} = u v_1' w_2'' \dots z_n^{(n)}.$$

Setzt man endlich diesen Werth des Productes in (54), so hat man die gewünschte Form (7) der zweiten Variation:

65. $$\Delta_2 = \int_a^b a_{n,n} \frac{\nabla^2}{\nabla_n^2} dx,$$

in welcher $a_{n,n} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ und ∇ und ∇_n durch (60) und (62) als Determinanten gegeben sind.

Die Bestimmung der Functionen $u, v, w, \dots$ und die Untersuchung der willkürlichen Constanten in dieser Form der zweiten Variation soll dem folgenden Abschnitte vorbehalten bleiben.

8.

Wir kehren zu der Differentialgleichung (14) zurück:

$$f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n f'(y^{(n)})}{dx^n} = 0,$$

durch welche dem Maximum oder Minimum von Δ entsprechend y als Function von x sich bestimmt. Angenommen, man habe y als Function von x mit den $2n$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$ gefunden, welche Function der angegebenen Differentialgleichung identisch genügt. Alsdann steht es frei, die Differentialgleichung nach irgend einer der willkürlichen Constanten zu differentiiren. Differentiirt man aber den linken Theil jener Gleichung nach α_λ, so erhält man gerade den Ausdruck Ψ, in welchem für z steht $\frac{\partial y}{\partial \alpha_\lambda}$. Aus der angegebenen Differentiation der genannten Differentialgleichung sehen wir daher folgende Gleichung hervorgehen:

$$\Psi\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_\lambda}\right) = 0, \tag{66}$$

welche den Beweis liefert, dass $\frac{\partial y}{\partial \alpha_\lambda}$ ein Werth von z ist, welcher der linearen homogenen Differentialgleichung der $2n$ten Ordnung $\Psi(z) = 0$ genügt. Solcher Werthe giebt es aber $2n$, weil jeder der $2n$ Constanten α ein Werth von z entspricht. Man kann daher den vollständigen Werth von z, welcher der Differentialgleichung genügt, mit $2n$ neuen willkürlichen Constanten aus jenen $2n$ Werthen zusammensetzen. Die alten willkürlichen Constanten α sind so zu bestimmen, dass y mit seinen $n-1$ ersten Differentialquotienten für die Grenzen der Integration verschwindet. — Da aber $u, v, w, \ldots$ Werthe von z sind, welche sämmtlich der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügen, so haben diese Functionen die Form:

$$\left\{\begin{array}{l} u = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_{2n} r_{2n} \\ v = b_1 r_1 + b_2 r_2 + \cdots + b_{2n} r_{2n} \\ w = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots + c_{2n} r_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right. \tag{67}$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$68. \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha_\lambda} = r_\lambda$$

und mit den Buchstaben $a, b, c, \ldots$ mit ihren angehängten Indices Constanten bezeichnet.

Diese Constanten sind jedoch nicht alle willkürlich. Vielmehr existiren gewisse Relationen zwischen ihnen, welche wohl zu berücksichtigen sind.

Es sind zwar $u, v, w, \ldots$ Werthe von z, welche der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügen, allein diese Werthe sind noch vermöge der Relationen (58) abhängig von den Werthen $u, v_1', w_2'', \ldots$, welche respective für $z, z_1', z_2'', \ldots$ gesetzt, wie in dem vorhergehenden Paragraphen hervorgehoben wurde, den Differentialgleichungen (56) genügen müssen. Wir haben demnach folgende Bedingungsgleichungen:

$$69. \qquad \Psi(u) = 0, \qquad \Psi_1(v_1') = 0, \qquad \Psi_2(w_2'') = 0, \qquad \ldots$$

welche mit Zuziehung von (58) und (67) sich auf Gleichungen zwischen den Constanten $a, b, c, \ldots$ und den Functionen r zurückführen lassen.

In der That, bezeichnet man mit $D_0, D_1, D_2, \ldots$ die Determinanten:

$$70. \qquad D_0 = 1, \quad D_1 = u, \quad D_2 = \begin{vmatrix} u & u' \\ v & v' \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

so kann man mit Anwendung des angegebenen Determinantensatzes diese Grössen also darstellen:

$$D_0 = 1, \quad D_1 = u, \quad D_2 = u^2 v_1', \quad D_3 = u^3 v_1'^2 w_2'', \quad \ldots;$$

woraus sich ergiebt:

$$71. \qquad v_1' = \frac{D_2 D_0}{D_1^2}, \qquad w_2'' = \frac{D_3 D_1}{D_2^2}, \quad \ldots,$$

welche Gleichungen das Bildungsgesetz der Multiplicatoren $u, v_1', w_2'', \ldots$ veranschaulichen. Diese Werthe hat man nun in die Gleichungen (69) und dann für $u, v, w, \ldots$ die Werthe aus (67) einzusetzen, um die gesuchten Gleichungen zwischen den Constanten $a, b, c, \ldots$ und den Functionen r zu erhalten.

Die erste von den Gleichungen (69), welche nur die Constanten a und die Functionen r enthält, wird von selber erfüllt. Die zweite führt auf eine Gleichung zwischen den Constanten a, b und den Functionen r, welche, da $\Psi_1(z_1') = 0$ die erste Integralgleichung von $\Psi(z) = 0$ ist, durch *eine* Bedingungsgleichung zwischen den Constanten a, b identisch erfüllt wird. Die dritte Gleichung führt auf eine Gleichung zwischen den Constanten a, b, c und den Functionen r zurück, welche, da $\Psi_2(z_2'') = 0$ die zweite Integralgleichung von $\Psi(z) = 0$ ist, durch *zwei* Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten a, b, c identisch erfüllt wird, wenn die vorhergehende schon identisch erfüllt wurde etc. ... Die Indices von Ψ in den Gleichungen (69) geben demnach zugleich die Zahlen der Bedingungsgleichungen an, welche zwischen den Constanten a, b, c, ... existiren. Es ist also die Zahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten a, b, c, ... gleich $\frac{n(n-1)}{2}$.

Es lassen sich aber auch $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen angeben, die durch jene $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten a, b, c, ... identisch erfüllt werden. Es sind dieses folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \Psi(u) = 0, & & \\ \Psi(v) = 0, & \Psi_1(v_1') = 0, & \\ \Psi(w) = 0, & \Psi_1(w_1') = 0, & \Psi_2(w_2'') = 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

mit Ausnahme der in der ersten Verticalreihe stehenden Gleichungen, welche von selber erfüllt werden und nur der Uebersicht wegen hinzugefügt worden sind.

Wenn nun jene $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten a, b, c, ... sämmtlich erfüllt sind, so wird die letzte Gleichung (69)

$$72. \qquad \Psi_{n-1}(t_{n-1}^{(n-1)}) = 0$$

eine identische Gleichung. Erinnert man sich aber des Bildungsgesetzes des Function Ψ_{n-1} durch successive Anwendung der Gleichung (39), so wird man auch umgekehrt die Behauptung gerechtfertigt finden, dass die

identische Gleichung (72) jene $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coëfficienten $a, b, c, \ldots$ in sich einschliesse.

Durch diese $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den $2n^2$ Constanten $a, b, c, \ldots$ lassen sich eben so viele Constanten als Functionen der übrigen ausdrücken. Die letzteren bleiben willkürlich.

Soll daher ein wirkliches Maximum oder Minimum stattfinden, so darf erstens, wie schon erwähnt wurde, der Ausdruck

$$a_{n,n} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$$

innerhalb der Integrationsgrenzen sein Vorzeichen nicht ändern, und zweitens müssen die willkürlichen Constanten sich so bestimmen lassen, dass der Quotient $\frac{\nabla}{\nabla_n}$ innerhalb der Integrationsgrenzen a und b nicht unendlich wird.

Gehen wir aber auf die Form jenes Quotienten näher ein, so bemerken wir auf den ersten Blick, dass, wenn man den Differentialquotienten $\frac{\partial \nabla}{\partial z^{(p)}}$, welcher wieder eine Determinante ist, mit ∇_p bezeichnet, man ihn aus Determinanten zusammensetzen kann wie folgt:

$$73. \qquad \frac{\nabla}{\nabla_n} = \frac{\nabla_0 z + \nabla_1 z' + \cdots + \nabla_n z^{(n)}}{\nabla_n}.$$

Setzt man in diese Determinanten nun für $u, v, w, \ldots$ die Werthe (67), so übersieht man auch leicht die Verbindung der Constanten zu neuen Functionen der Constanten, und der Functionen r mit ihren Differentialquotienten zu neuen Functionen. Es zerfällt nämlich jede der angegebenen Determinanten in die Summe von Producten von zwei Factoren, von denen der eine Factor durch eine Determinante dargestellt wird, welche sich nur aus den Constanten $a, b, c, \ldots$ zusammensetzt, während der andere Factor eine Determinante ist aus den Functionen r und ihren Differentialquotienten. Diese Determinantenconstanten sowohl als diese Determinantenfunctionen kommen im Nenner und Zähler des Quotienten (73)

nur in linearer Weise vor. Es kann daher dieser Quotient nur unendlich werden dadurch, dass der Nenner ∇_n durch 0 hindurchgeht.

Die zweite oben angegebene Bedingung des Maximums oder Minimums vereinfacht sich hiernach dahin, dass die willkürlichen Constanten in ∇_n sich so bestimmen lassen müssen, dass dieser Ausdruck innerhalb der Integrationsgrenzen nicht verschwindet.

Die bezeichneten Determinantenconstanten gehen aber in den zu untersuchenden Ausdruck ∇_n nur in linearer Weise ein. Es ist daher natürlich, diese Determinantenconstanten als neue Constanten einzuführen und die Bedingungen zu suchen, welchen diese neuen Constanten unterworfen sind. Diese sind zweifacher Art. Erstens finden schon Relationen statt zwischen diesen neuen Constanten als Determinanten, gebildet aus den alten Constanten. Doch auch diese Relationen sind nicht unabhängig von einander, indem die einen die andern bedingen. Zweitens aber sind sie noch $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen unterworfen, weil zwischen den alten Constanten eben so viele Bedingungsgleichungen stattfinden, welche aus der identischen Gleichung (72) hervorgehen. Wenn es sich nun zeigt, dass auch in diese Gleichung nur die Determinantenconstanten eingehen, und wir werden in den folgenden speciellen Fällen sehen, dass es daselbst zutrifft, so ist die zweite Art der Bedingungen leicht hergestellt. Die Untersuchung der ersten Art der Bedingungen zwischen den Determinantenconstanten ist eine würdige Aufgabe der Determinantentheorie, die ihrer allgemeinen Lösung harrt. In den angedeuteten speciellen Fällen jedoch soll sie vollständig durchgeführt werden.

Wir brechen hiermit die allgemeine Untersuchung der zweiten Variation eines Integralausdruckes ab, indem wir uns begnügen, sie auf die Form (65) zurückgeführt, die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen zwischen den willkürlichen Constanten $a, b, c, \ldots$ angegeben und die Schwierigkeit der weiteren Behandlung der zweiten Variation hervorgehoben zu haben. Die folgenden mehr ins Einzelne gehenden Untersuchungen der Fälle, wenn $n = 1, 2, 3$, werden dazu dienen, die hier gemachten kurzen Andeutungen im Speciellen zu verdeutlichen.

9.

Es handle sich um das Maximum oder Minimum des Integrals:

$$\Delta = \int_a^b f(x, y, y')\,dx.$$

In dieser Voraussetzung bestimmt sich die unbekannte Function y durch die Differentialgleichung:

$$f'(y) - \frac{d f'(y')}{dx} = 0.$$

Gesetzt, man habe durch Integration y als Function von x mit ihren beiden willkürlichen Constanten α_1, α_2 gefunden. Alsdann hat man letztere so zu bestimmen, dass y für die Grenzen a und b die gegebenen Werthe annehme.

Hierdurch ist in der zweiten Variation:

$$\Delta_2 = \int_a^b 2\,\psi\,dx,$$

in welcher:

$$2\,\psi = a_{00}\,z z + 2\,a_{01}\,z z' + a_{11}\,z' z',$$

Alles bestimmt mit Ausnahme der unbestimmten Function z und ihrer Differentialquotienten. Setzt man nun

$$\Psi(z) = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx},$$

so erhält man durch theilweise Integration:

$$\Delta_2 = \int_a^b z\,\Psi(z)\,dx.$$

Der Ausdruck $\Psi(z)$ lässt sich aber auf die Form bringen:

$$\Psi(z) = \mathfrak{A}_0\,z - \frac{d a_{11} z'}{dx}.$$

Es ist hiernach:

$$u\,\Psi(z) - z\,\Psi(u) = -\frac{d\{a_{11}(u z' - z u')\}}{dx},$$

woraus man durch Integration erhält:

$$\int\{u\,\Psi(z) - z\,\Psi(u)\}\,dx = -\,a_{11}\,(u z' - z u').$$

Wenn man nun setzt:

$$u = a_1 r_1 + a_2 r_2, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} = r_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} = r_2,$$

so verschwindet $\Psi(u)$ und man erhält:

$$\int u\,\Psi(z)\,dx = -\,a_{11}\,(u z' - z u'),$$

mit Hülfe welcher Gleichung der vorhin gegebene Ausdruck von Δ_2 durch theilweise Integration übergeht in:

$$\Delta_2 = \int_a^b a_{11}\,\frac{d\left(\frac{z}{u}\right)}{dx}\,(u z' - z u')\,dx$$

oder

$$\Delta_2 = \int_a^b a_{11}\,\frac{(u z' - z u')^2}{u^2}\,dx.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen, in welchen, wie man sieht, nur das Verhältniss der willkürlichen Constanten a_1, a_2 eingeht, darf innerhalb der Grenzen der Integration nicht unendlich werden, wenn ein wirkliches Maximum oder Minimum statt haben soll. Er wird aber unendlich, wenn der Nenner u^2 für einen zwischen a und b liegenden Werth von x verschwindet. Wenn man also setzt:

$$m = -\,\frac{a_1}{a_2},$$

so ist es eines der Criterien des Maximums oder Minimums, dass in dem Ausdrucke:

$$\frac{u}{a_2} = r_2 - m\,r_1$$

die Constante m so bestimmt werden könne, dass derselbe für keinen zwischen a und b liegenden Werth von x verschwindet. Sehen wir zu, wie Jacobi dieses Criterium weiter behandelt.

Wenn es einen Werth giebt, den der Bruch $\frac{r_2}{r_1}$ innerhalb der Grenzen a und b für x nicht annimmt, so wird man der willkürlichen Constanten m immer einen solchen Werth zuertheilen können, dass der Ausdruck:

$$\frac{u}{a_2} = r_1\left(\frac{r_2}{r_1} - m\right)$$

innerhalb der genannten Grenzen für x niemals verschwindet. Man braucht der Constanten nur jenen Werth zu geben. Wenn dagegen jener Bruch innerhalb derselben Grenzen für x alle Werthe durchläuft von $-\infty$ bis $+\infty$, so muss jener Ausdruck nothwendiger Weise einmal verschwinden, welchen Werth auch die willkürliche Constante m habe. Untersuchen wir daher die Natur des Bruches $\frac{r_2}{r_1}$.

Der Zähler r_2 und der Nenner r_1 genügen der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$. Man hat daher:

$$\Psi(r_2) = 0, \qquad \Psi(r_1) = 0,$$

woraus hervorgeht:

$$r_1\,\Psi(r_2) - r_2\,\Psi(r_1) = 0,$$

eine vollständige Differentialgleichung, durch deren Integration man erhält:

$$\int \{r_1\,\Psi(r_2) - r_2\,\Psi(r_1)\}\,dx = C.$$

Der linke Theil dieser Gleichung wird aber aus der oben angegebenen Integralformel erhalten, wenn man für u und z respective setzt r_1 und r_2. Setzt man seinen Werth, so erhält man:

$$-\,a_{11}(r_1 r_2' - r_2 r_1') = C$$

oder

$$\frac{d\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{dx} = -\frac{C}{a_{11} r_1^2}.$$

Der rechte Theil der Gleichung ändert sein Vorzeichen nicht, weil C eine Constante, r_1^2 ein Quadrat und a_{11} sein Vorzeichen nicht ändern darf, wenn ein wirkliches Maximum oder Minimum statt haben soll. Daraus folgt, dass der Bruch $\frac{r_2}{r_1}$ fortwährend wächst, wenn er einmal wächst,

und, wenn er die Grenze $+\infty$ des Wachsens erreicht hat, zu $-\infty$ überspringt und dann wieder wächst über 0 hinaus bis $+\infty$ etc. . . .: oder, dass er in eben derselben Weise abnimmt. Der Bruch $\frac{r_2}{r_1}$ wird also alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen, wenn er für zwei verschiedene Werthe von x ein und denselben Werth hat. Hieraus ersieht man, wie wesentlich es ist, die Grenzen der Integration zu beschränken. Denn wenn man die Grenzen des Integrals Δ nur nicht so weit ausdehnt, dass der Bruch $\frac{r_2}{r_1}$ innerhalb der Grenzen der Integration noch einmal den ursprünglichen Werth annimmt, so wird man der willkürlichen Constanten m immer einen solchen Werth zuertheilen können, dass der Ausdruck $\frac{u}{\alpha_2}$ innerhalb der Grenzen der Integration nicht verschwindet. Die Grenzen des Integrals dürfen also nur bis zu der Grenze erweitert werden, für welche zum erstenmale die Gleichung statt hat:

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_a = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_b,$$

und selbst diese Grenze muss schon ausgeschlossen bleiben.

Um diese Gleichung geometrisch zu deuten, nehme man an, dass

$$y = F(x, \alpha_1, \alpha_2)$$

das Integral sei der Differentialgleichung:

$$f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} = 0$$

mit den beiden willkürlichen Constanten α_1, α_2. Jene Integralgleichung stellt die gesuchte Curve des Maximums oder Minimums dar, wenn die willkürlichen Constanten den Grenzbedingungen gemäss bestimmt sind. Die erste Grenzbedingung:

$$y_a = F(a, \alpha_1, \alpha_2)$$

drückt aus, dass die Curve des Maximums oder Minimums ausgehe von einem durch die Coordinaten a und y_a gegebenen Punkte. Durch sie wird α_2 als Function von α_1 bestimmt, und die Gleichung der Curve des Maximums oder Minimums enthält nunmehr nur noch eine willkürliche

Constante α_1. Man hat daher eine ganze Schaar von Curven des Maximums oder Minimums, welche alle von demselben Punkte ausgehen.

Betrachten wir nun zwei von diesen Curven, deren Parameter α_1 sich nur um die unendlich kleine Grösse ε von einander unterscheiden, so stellen sich ihre Gleichungen also dar:

$$y = F(x, \alpha_1, \alpha_2),$$
$$y = F(x, \alpha_1, \alpha_2) + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right)\varepsilon.$$

Diese beiden von demselben Punkte ausgehenden Curven werden sich im Allgemeinen in einem zweiten Punkte schneiden. Setzt man nun für x und y die Coordinaten b und y_b des Schnittpunktes und zieht die erste Gleichung von der folgenden ab, so erhält man für den Schnittpunkt:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)_b + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\right)_b \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 0.$$

Differentiirt man nun die obige Gleichung, durch welche α_2 als Function von α_1 definirt wurde, nach α_1, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)_a + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\right)_a \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 0,$$

und durch Elimination von $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$ aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\right)_a}{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)_a} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\right)_b}{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)_b}.$$

Dieses ist aber gerade dieselbe Gleichung, in welche die zu deutende Gleichung übergeht, wenn man dort für r_1 und r_2 ihre Werthe $\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}$ und $\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}$ setzt. Sie beweist, dass für die von einem gegebenen Punkte ausgehende Curve des Maximums oder Minimums, wenn man auf ihr continuirlich fortschreitet, die zweite Grenze des Integrals, welches ein Maximum oder ein Minimum sein soll, nur bis zu demjenigen Punkte ausgedehnt werden dürfe, in welchem die Curve von der ihr zunächst liegenden Curve des Maximums oder Minimums geschnitten wird. Es ist dieses derselbe Punkt, in welchem die Enveloppe aller von dem gegebenen Punkte aus-

gehenden Curven des Maximums oder Minimums die in Rede stehende Curve berührt.

Zu der oben angegebenen Grenzengleichung gelangt man auch durch folgende ebenfalls von Jacobi angestellte Betrachtung:

Wenn der Integralausdruck Δ ein Maximum oder Minimum sein soll, so darf die zweite Variation

$$\Delta_2 = \int_a^b z\,\Psi(z)\,dx$$

für alle Functionen z ihr Vorzeichen nicht ändern. Es ist aber noch zulässig, dass sie für eine bestimmte Function z verschwinde. Das Verschwinden der zweiten Variation für eine bestimmte Function von z ist jedoch die Grenze für die Ausdehnung der Grenzen des Integrals Δ. Denn dehnt man die Grenzen dieses Integrals noch weiter aus, so bietet das Princip der Continuität wenigstens eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Variation auch ihr Vorzeichen ändere.

Die zweite Variation verschwindet aber für einen Werth von z, welcher der Differentialgleichung genügt:

$$\Psi(z) = 0,$$

und der allgemeinste Werth von z, welcher dieser Differentialgleichung genügt, ist, wenn man mit a_1 und a_2 zwei willkürliche Constanten bezeichnet

$$z = a_1 r_1 + a_2 r_2.$$

Hiernach scheint es, dass diese Grenze, für welche Δ_2 verschwindet, unter allen Umständen erreicht werden könne. Allein es ist zu beachten, dass die Function z noch der Beschränkung unterworfen ist, zu verschwinden für die Grenzen des Integrals Δ. Man hat daher:

$$0 = a_1 (r_1)_a + a_2 (r_2)_a,$$
$$0 = a_1 (r_1)_b + a_2 (r_2)_b,$$

woraus durch Elimination der willkürlichen Constanten a_1, a_2 eben jene Grenzengleichung hervorgeht:

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_a = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_b.$$

10.

Die Bestimmung des Maximums oder Minimums des Integralausdruckes:

$$\Delta = \int_a^b f(x, y, y', y'')\, dx$$

verlangt die Integration der Differentialgleichung:

$$f'(y) - \frac{d f'(y')}{dx} + \frac{d^2 f'(y'')}{dx^2} = 0.$$

Sie giebt y als Function von x mit vier willkürlichen Constanten. Letztere hat man so zu bestimmen, dass y und y' für die Grenzen a, b des Integrales gegebene Werthe erhalten.

Ob die auf diese Weise bestimmte Function y jenen Integralausdruck Δ zu einem wirklichen Maximum oder Minimum macht, hängt von der zweiten Variation ab:

$$\Delta_2 = \int_a^b 2\,\psi\, dx,$$

wo

$$2\,\psi = a_{00}\, z z + a_{11}\, z' z' + a_{22}\, z'' z'' + 2\, a_{12}\, z' z'' + 2\, a_{02}\, z z'' + 2\, a_{01}\, z z'.$$

Durch theilweise Integration führt man nun Δ_2 auf die Form zurück:

$$\Delta_2 = \int_a^b z\, \Psi(z)\, dx,$$

wo

$$\Psi(z) = \psi'(z) - \frac{d\, \psi'(z')}{dx} + \frac{d^2\, \psi'(z'')}{dx^2}.$$

Dieser letztere Ausdruck vereinfacht sich aber nach (20) in:

$$\Psi(z) = \mathfrak{A}_0\, z - \frac{d\, \mathfrak{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2\, \mathfrak{A}_2 z''}{dx^2},$$

indem man hat:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= a_{00} - a_{01}' + a_{02}'', \\ \mathfrak{A}_1 &= a_{11} - a_{12}' - 2\, a_{02}, \\ \mathfrak{A}_2 &= a_{22}. \end{aligned}$$

Es ist nun nach (41)

$$u \mathfrak{A}_0 z - z \mathfrak{A}_0 u = 0,$$

$$-\left(u \frac{d \mathfrak{A}_1 z'}{dx} - z \frac{d \mathfrak{A}_1 u'}{dx}\right) = \frac{d \mathfrak{A}_1 (u' z - z' u)}{dx},$$

$$u \frac{d^2 \mathfrak{A}_2 z''}{dx^2} - z \frac{d^2 \mathfrak{A}_2 u''}{dx^2} = 2 \frac{d \mathfrak{A}_2 (u'' z' - z'' u')}{dx} - \frac{d^2 \mathfrak{A}_2 (u'' z - z'' u)}{dx^2},$$

woraus man durch Addition erhält:

$$u \Psi(z) - z \Psi(u) = - \frac{d \Psi_1 (z_1')}{dx},$$

wenn man setzt:

$$- \Psi_1 (z_1') = \mathfrak{A}_1 (u' z - z' u) + 2 \mathfrak{A}_2 (u'' z' - z'' u') - \frac{d \mathfrak{A}_2 (u'' z - z'' u)}{dx}.$$

Wenn nun u ein Werth von z ist, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt, so verschwindet das Glied $z \Psi(u)$ aus der vorhergehenden Gleichung und man erhält durch Integration:

$$\int u \Psi(z)\, dx = - \Psi_1 (z_1').$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und durch die Substitution $z = u z_1$ geht nun die zweite Variation über in:

$$\varDelta_2 = \int_a^b z_1' \Psi_1 (z_1')\, dx,$$

welcher Ausdruck nur die unbestimmte Function z_1' mit ihren Differentialquotienten enthält, weil aus dem mit $\Psi_1 (z_1')$ bezeichneten Ausdrucke z_1 verschwindet und nur die Differentialquotienten dieser Function zurückbleiben.

Man kann nun die Function $\Psi_1 (z_1')$ einfacher durch die partiellen Differentialquotienten ein und derselben Determinante ausdrücken. Denn setzt man:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix},$$

so wird:

$$- \Psi_1 (z_1') = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \varDelta}{\partial v''} + 2 \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \varDelta}{\partial v} + \frac{d \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \varDelta}{\partial v'}}{dx}.$$

Man weiss nun a priori, dass die Differenz:

$$v_1' \Psi_1(z_1') - z_1' \Psi_1(v_1')$$

der vollständige Differentialquotient einer Function $\Psi_2(z_2'')$ ist. Wir werden dieses jedoch noch besonders beweisen, indem wir das Integral desselben darstellen.

Die Function $\Psi_1(z_1')$ geht über in $\Psi_1(v_1')$, wenn man für z setzt v. Daher ist:

$$\Psi_1(v_1') = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z''} + 2\,\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{d\,\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z'}}{dx}.$$

Ferner hat man:

$$z_1' = \frac{d\,\frac{z}{u}}{dx} = \frac{uz' - u'z}{u^2} = -\frac{\partial \Delta}{\partial v''} \cdot \frac{1}{u^2},$$

$$v_1' = \frac{d\,\frac{v}{u}}{dx} = \frac{uv' - u'v}{u^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial z''} \cdot \frac{1}{u^2}.$$

Um nun jene Differenz gleich in der einfachsten Gestalt zu erhalten, bemerken wir, dass:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z''} \frac{\partial \Delta}{\partial v} - \frac{\partial \Delta}{\partial v''} \frac{\partial \Delta}{\partial z} = -u'\Delta,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z''} \frac{\partial \Delta}{\partial v'} - \frac{\partial \Delta}{\partial v''} \frac{\partial \Delta}{\partial v''} = u\Delta,$$

$$\frac{d\,\frac{\partial \Delta}{\partial z''}}{dx} = -\frac{\partial \Delta}{\partial z'}; \qquad \frac{d\,\frac{\partial \Delta}{\partial v''}}{dx} = -\frac{\partial \Delta}{\partial v'}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichungen nimmt die angegebene Differenz die Gestalt an:

$$v_1' \Psi_1(z_1') - z_1' \Psi_1(v_1') = -\frac{d\,\frac{\mathfrak{A}_2 \Delta}{u}}{dx} = -\frac{d\,\Psi_2(z_2'')}{dx}.$$

Wenn nun v ein Werth von z ist, welcher der Differentialgleichung $\Psi_1(z_1') = 0$ genügt, so verschwindet der Term $z_1' \Psi_1(v_1')$ und man erhält durch Integration:

$$\int v_1' \Psi_1(z_1')\,dx = -\frac{\mathfrak{A}_2 \Delta}{u} = -\Psi_2(z_2'').$$

Diese Gleichung dient dazu, die zweite Variation weiter zu transformiren. Denn setzt man $z_1' = v_1' z_2'$, so erhält man durch theilweise Integration:

$$\Delta_2 = \int_a^b z_2'' \Psi_2(z_2'')\, dx.$$

Setzt man nun hierin für $\Psi_2(z_2'')$ den angegebenen Werth, ebenso für z_2'' seinen Werth:

$$z_2'' = \frac{u\Delta}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z''}\right)^2},$$

der am einfachsten aus dem in (71) angegebenen Werthe von w_2'' dadurch hervorgeht, dass man für w setzt z, so erhält man die gewünschte Form (65) der zweiten Variation:

$$\Delta_2 = \int_a^b a_{22} \frac{\Delta^2}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z''}\right)^2}\, dx.$$

In dieselbe gehen die Werthe von u und v ein:

$$u = a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + a_4 r_4,$$
$$v = b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3 + b_4 r_4,$$

mit den vier willkürlichen Constanten a und den vier willkürlichen Constanten b, welche aber noch der Gleichung $\Psi_1(v_1') = 0$ identisch zu genügen haben. Von dieser Gleichung weiss man, dass sie identisch erfüllt wird durch *eine* Relation der Constanten, die man etwa dadurch erhält, dass man der unabhängigen Variabeln x in jener Gleichung einen bestimmten Werth zuertheilt.

Bezeichnet man nun die Determinante $a_\varkappa b_\lambda - a_\lambda b_\varkappa$ mit $[\varkappa\lambda]$, so wird man bemerken, dass in den zuletzt angegebenen Ausdruck von Δ_2 nur die Verhältnisse der sechs Determinanten-Constanten eingehen:

$$[12] \quad [13] \quad [14] \quad [23] \quad [24] \quad [34],$$

was auch bei der Gleichung $\Psi_1(v_1') = 0$ zutrifft. Führt man also die sechs Determinanten-Constanten als neue Constanten ein, welche, weil es sich nur um die Verhältnisse derselben handelt, fünf Constanten vertreten,

so hat man zwischen diesen fünf neuen Constanten zwei Bedingungsgleichungen. Die erste:

$$[12] \cdot [34] + [23] \cdot [14] - [13] \cdot [24] = 0$$

ist eine identische Gleichung der Determinanten, woraus sie besteht; die zweite macht folgende Gleichung auf die angegebene Art zu einer identischen:

$$\Psi_1(v_1') = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z''} + 2\,\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{d\,\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z'}}{dx} = 0.$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \Delta}{\partial z''}$ enthält demnach nur noch drei vollkommen willkürliche Constanten. Diese drei willkürlichen Constanten müssen sich so bestimmen lassen, dass der genannte Ausdruck $\frac{\partial \Delta}{\partial z''}$ innerhalb der Grenzen a, b der Integration nicht verschwindet, wenn Δ ein wirkliches Maximum oder Minimum sein soll.

11.

Es sei ein Integralausdruck gegeben von der Form:

$$\Delta = \int_a^b f(x, y, y', y'', y''')\,dx;$$

es soll y als Function von x so bestimmt werden, dass jenes Integral ein Maximum oder Minimum werde.

Diese Aufgabe verlangt die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$f'(y) - \frac{d f'(y')}{dx} + \frac{d^2 f'(y'')}{dx^2} - \frac{d^3 f'(y''')}{dx^3} = 0$$

mit ihren sechs willkürlichen Constanten. Letztere hat man so zu bestimmen, dass y, y', y'' für die Grenzen $x = a$ und $x = b$ des Integrals gegebene Werthe erhalten. Die Beantwortung der Frage, ob auf diese Weise ein Maximum oder ein Minimum erreicht wird, oder keines von beiden, hängt von der zweiten Variation Δ_2 ab:

$$\Delta_2 = \int_a^b 2\,\psi\,dx,$$

in welcher:

$$2\psi = a_{00}z^2 + a_{11}z'^2 + a_{22}z''^2 + a_{33}z'''^2 + 2a_{01}zz' + 2a_{02}zz'' + 2a_{03}zz''' + 2a_{12}z'z'' + 2a_{13}z'z''' + 2a_{23}z''z'''.$$

Man transformirt dieses Integral durch theilweise Integration in:

$$\varDelta_2 = \int_a^b z\,\varPsi(z)\,dx,$$

indem man setzt:

$$\varPsi(z) = \psi'(z) - \frac{d\psi'(z')}{dx} + \frac{d^2\psi'(z'')}{dx^2} - \frac{d^3\psi'(z''')}{dx^3}.$$

Dieser letztere Ausdruck lässt sich nach (20) einfacher also darstellen:

$$\varPsi(z) = \mathfrak{A}_0 z - \frac{d\,\mathfrak{A}_1 z'}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{A}_2 z''}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{A}_3 z'''}{dx^3},$$

indem man nach (23), (24) und (22) hat:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0 &= a_{00} - a'_{01} + a''_{02} - a'''_{03},\\
\mathfrak{A}_1 &= a_{11} - a'_{12} + a''_{13} - 2a_{02} + 3a'_{03},\\
\mathfrak{A}_2 &= a_{22} - a'_{23} - 2a_{13},\\
\mathfrak{A}_3 &= a_{33}.
\end{aligned}$$

Es ist nun nach (41):

$$\begin{aligned}
&u\,\mathfrak{A}_0 z - z\,\mathfrak{A}_0 u = 0,\\
&-\left(u\frac{d\,\mathfrak{A}_1 z'}{dx} - z\frac{d\,\mathfrak{A}_1 u'}{dx}\right) = \frac{d\,\mathfrak{A}_1(u'z - z'u)}{dx},\\
&u\frac{d^2\mathfrak{A}_2 z''}{dx^2} - z\frac{d^2\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2} = 2\frac{d\,\mathfrak{A}_2(u''z' - z''u')}{dx} - \frac{d^2\mathfrak{A}_2(u''z - z''u)}{dx^2},\\
&-\left(u\frac{d^3\mathfrak{A}_3 z'''}{dx^3} - z\frac{d^3\mathfrak{A}_3 u'''}{dx^3}\right) = 3\frac{d\,\mathfrak{A}_3(u'''z'' - z'''u'')}{dx} - 3\frac{d^2\mathfrak{A}_3(u'''z' - z'''u')}{dx^2}\\
&\qquad + \frac{d^3\mathfrak{A}_3(u'''z - z'''u)}{dx^3}.
\end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man:

$$u\,\varPsi(z) - z\,\varPsi(u) = -\frac{d\,\varPsi_1(z'_1)}{dx},$$

wenn man setzt:

$$-\Psi_1(z_1') = \mathfrak{A}_1(u'z - z'u) + 2\,\mathfrak{A}_2(u''z' - z''u') - \frac{d\,\mathfrak{A}_2(u''z - z''u)}{dx}$$
$$+ 3\,\mathfrak{A}_3(u'''z'' - z'''u'') - 3\,\frac{d\,\mathfrak{A}_3(u'''z' - z'''u')}{dx} + \frac{d^2\,\mathfrak{A}_3(u'''z - z'''u)}{dx^2}.$$

Es sei nun u ein Werth von z, welcher der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügt. Unter dieser Annahme verschwindet das Glied $z\,\Psi(u)$ der vorhergehenden Gleichung, und man erhält durch Integration:

$$\int u\,\Psi(z)\,dx = -\Psi_1(z_1'),$$

eine Gleichung, deren rechter Theil durch die Substitution $z = u z_1$ in eine Function von z_1' und deren Differentialquotienten übergeht, indem z_1 ganz daraus verschwindet. Durch dieselbe Substitution geht aber die zweite Variation, wenn man die letzte Gleichung zu Hülfe nimmt, über in:

$$\varDelta_2 = \int_a^b z_1'\,\Psi_1(z_1')\,dx.$$

Es wird nun darauf ankommen, die Differenz:

$$v_1'\,\Psi_1(z_1') - z_1'\,\Psi_1(v_1')$$

als einen vollständigen Differentialquotienten darzustellen, indem man hat

$$z_1' = \frac{d\,\frac{z}{u}}{dx} = \frac{u z' - u' z}{u^2},$$

$$v_1' = \frac{d\,\frac{v}{u}}{dx} = \frac{u v' - u' v}{u^2}.$$

Zu diesem Zwecke wollen wir den oben angegebenen Ausdruck von $\Psi_1(z_1')$ in zwei andere zerlegen, indem wir setzen:

$$-\Psi_1^0(z_1') = \mathfrak{A}_1(u'z - z'u) + 2\,\mathfrak{A}_2(u''z' - z''u') - \frac{d\,\mathfrak{A}_2(u''z - z''u)}{dx},$$
$$-\Psi_1^I(z_1') = 3\,\mathfrak{A}_3(u'''z'' - z'''u'') - 3\,\frac{d\,\mathfrak{A}_3(u'''z' - z'''u')}{dx} + \frac{d^2\,\mathfrak{A}_3(u'''z - z'''u)}{dx^2},$$

wodurch man hat:

$$\Psi_1(z_1') = \Psi_1^0(z_1') + \Psi_1^I(z_1').$$

Der erste von diesen Ausdrücken ist derselbe, der im vorhergehenden Paragraphen mit $\Psi_1(z_1')$ bezeichnet wurde, und wir entnehmen von dort den Werth der Differenz:

$$v_1'\,\Psi_1^0(z_1') - z_1'\,\Psi_1^0(v_1') = -\frac{d\,\frac{1}{u}\,\mathfrak{A}_2\,\Delta}{dx}.$$

Was den zweiten Ausdruck anbetrifft, so wollen wir denselben ordnen nach den Differentialquotienten von $\mathfrak{A}_3$, indem wir setzen:

$$\Psi_1^I(z_1') = \mathfrak{A}_3\,F_0(z_1') + \mathfrak{A}_3'\,F_1(z_1') + \mathfrak{A}_3''\,F_2(z_1').$$

Alsdann ist:

$$\begin{aligned}
-F_0(z_1') &= (u^{(5)}z - z^{(5)}u) - (u^{(4)}z' - z^{(4)}u') + (u'''z'' - z'''u'')\\
-F_1(z_1') &= 2\,(u^{(4)}z - z^{(4)}u) - (u'''z' - z'''u')\\
-F_2(z_1') &= (u'''z - z'''u).
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke lassen sich einzeln leichter behandeln, als die aus ihnen zusammengesetzte Function $\Psi_1^I(z_1')$. Ohne grosse Mühe wird man finden, dass:

$$\begin{aligned}
v_1'\,F_0(z_1') - z_1'\,F_0(v_1') &= \frac{1}{u^2}\{\,u\,\Delta_{015} - u'\,\Delta_{014} + u''\,\Delta_{013} - u'''\,\Delta_{012}\},\\
v_1'\,F_1(z_1') - z_1'\,F_1(v_1') &= \frac{1}{u^2}\{2\,u\,\Delta_{014} - u'\,\Delta_{013}\},\\
v_1'\,F_2(z_1') - z_1'\,F_2(v_1') &= \frac{1}{u^2}\quad u\,\Delta_{013},
\end{aligned}$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\Delta = \Delta_{012} = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{\varkappa\lambda\mu} = \begin{vmatrix} u^{(\varkappa)} & u^{(\lambda)} & u^{(\mu)} \\ v^{(\varkappa)} & v^{(\lambda)} & v^{(\mu)} \\ z^{(\varkappa)} & z^{(\lambda)} & z^{(\mu)} \end{vmatrix}.$$

Um den rechten Theil der ersten von jenen drei Gleichungen zu transformiren, benutzen wir die identische Gleichung:

$$u\,\Delta_{123} - u'\,\Delta_{023} + u''\,\Delta_{013} - u'''\,\Delta_{012} = 0,$$

mit deren Hülfe der rechte Theil der genannten Gleichung sich also darstellt:

$$\frac{1}{u^2}\{u\,(\Delta_{015} - \Delta_{123}) + u'\,(\Delta_{023} - \Delta_{014})\} = \frac{d\,\frac{1}{u}\,(\Delta_{014} - \Delta_{023})}{dx},$$

wie auch der rechte Theil der zweiten Gleichung auf die Form zurückgeführt wird:

$$\frac{d\frac{1}{u}\Delta_{013}}{dx}+\frac{1}{u}(\Delta_{014}-\Delta_{023}),$$

wenn man erwägt, dass:

$$\frac{d\Delta_{013}}{dx}=\Delta_{023}+\Delta_{014};\quad \frac{d\Delta_{014}}{dx}=\Delta_{024}+\Delta_{015};\quad \frac{d\Delta_{023}}{dx}=\Delta_{123}+\Delta_{024}.$$

Die obigen Differenzen werden hiernach:

$$v_1' F_0(z_1')-z_1' F_0(v_1')=\frac{d\frac{1}{u}(\Delta_{014}-\Delta_{023})}{dx},$$

$$v_1' F_1(z_1')-z_1' F_1(v_1')=\frac{d\frac{1}{u}\Delta_{013}}{dx}+\frac{1}{u}(\Delta_{014}-\Delta_{023}),$$

$$v_1' F_2(z_1')-z_1' F_2(v_1')=\frac{1}{u}\Delta_{013}.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man sie vorher der Reihe nach multiplicirt hat mit $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{A}_3''$, so erhält man:

$$v_1'\Psi_1^I(z_1')-z_1'\Psi_1^I(v_1')=\frac{d}{dx}\left\{\mathfrak{A}_3'\frac{1}{u}\Delta_{013}+\mathfrak{A}_3\frac{1}{u}(\Delta_{014}-\Delta_{023})\right\}.$$

Addirt man endlich diese Gleichung zu der obigen, aus dem vorhergehenden Paragraphen genommenen Gleichung, so erhält man die gesuchte Differenz:

$$v_1'\Psi_1(z_1')-z_1'\Psi_1(v_1')=-\frac{d\Psi_2(z_2'')}{dx},$$

worin:

$$\Psi_2(z_2'')=\frac{1}{u}\{\mathfrak{A}_2\Delta_{012}+\mathfrak{A}_3(\Delta_{023}-\Delta_{014})-\mathfrak{A}_3'\Delta_{013}\}.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommenden Determinanten lassen sich sämmtlich durch eine einzige ausdrücken. Denn setzt man:

$$\nabla=\begin{vmatrix} u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \\ z & z' & z'' & z''' \end{vmatrix} \quad\text{und}\quad \frac{d\nabla}{dx}=\nabla'=\begin{vmatrix} u & u' & u'' & u^{(4)} \\ v & v' & v'' & v^{(4)} \\ w & w' & w'' & w^{(4)} \\ z & z' & z'' & z^{(4)} \end{vmatrix},$$

so ist:

$$\varDelta_{012} = -\frac{\partial \nabla}{\partial w'''}, \qquad \varDelta_{023} = -\frac{\partial \nabla}{\partial w'}, \qquad \varDelta_{014} = \frac{\partial \nabla'}{\partial w''}, \qquad \varDelta_{013} = \frac{\partial \nabla}{\partial w''}.$$

Man hat daher:

$$-\Psi_2(z_2'') = \frac{1}{u}\left\{\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \nabla}{\partial w'''} + \mathfrak{A}_3\left(\frac{\partial \nabla}{\partial w'} + \frac{\partial \nabla'}{\partial w''}\right) + \mathfrak{A}_3' \frac{\partial \nabla}{\partial w''}\right\},$$

und wenn man in dieser Gleichung z mit w vertauscht:

$$\Psi_2(w_2'') = \frac{1}{u}\left\{\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \nabla}{\partial z'''} + \mathfrak{A}_3\left(\frac{\partial \nabla}{\partial z'} + \frac{\partial \nabla'}{\partial z''}\right) + \mathfrak{A}_3' \frac{\partial \nabla}{\partial z''}\right\}.$$

Kehren wir aber zu der angegebenen Differenz zurück, und nehmen an, dass v ein Werth von z sei, welcher der Differentialgleichung $\Psi_1(z_1) = 0$ genügt, so verschwindet daraus das Glied $z_1' \Psi_1(v_1')$, und man erhält durch Integration:

$$\int v_1' \Psi_1(z_1')\, dx = -\Psi_2(z_2''),$$

mit Hülfe welcher Gleichung der zuletzt angegebene Ausdruck der zweiten Variation, wenn man setzt: $z_1' = v_1' z_2'$, übergeht in:

$$\varDelta_2 = \int_a^b z_2'' \Psi_2(z_2'')\, dx.$$

Um diesen Integralausdruck wieder zu transformiren, bilden wir die Differenz:

$$w_2'' \Psi_2(z_2'') - z_2'' \Psi_2(w_2'') = -\frac{d\Psi_3(z_3''')}{dx},$$

in welcher:

$$w_2'' = \frac{u \frac{\partial \nabla}{\partial z'''}}{\left(\frac{\partial^2 \nabla}{\partial w'' \partial z'''}\right)^2}, \qquad z_2'' = -\frac{u \frac{\partial \nabla}{\partial w'''}}{\left(\frac{\partial^2 \nabla}{\partial w'' \partial z'''}\right)^2},$$

und $\Psi_2(z_2'')$ und $\Psi_2''(w_2'')$ die vorhin entwickelten Ausdrücke bedeuten. Man wird den Werth jener Differenz in einer einfachen Gestalt erhalten, wenn man sich folgender Relationen bedient:

$$\frac{\partial\nabla}{\partial w'''}\frac{\partial\nabla}{\partial z'} - \frac{\partial\nabla}{\partial z'''}\frac{\partial\nabla}{\partial w'} = \nabla\frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z'},$$

$$\frac{\partial\nabla}{\partial w'''}\frac{\partial\nabla'}{\partial z''} - \frac{\partial\nabla}{\partial z'''}\frac{\partial\nabla'}{\partial w''} = \frac{\partial\nabla'}{\partial w^{(4)}}\frac{\partial\nabla'}{\partial z''} - \frac{\partial\nabla'}{\partial z^{(4)}}\frac{\partial\nabla'}{\partial w''} = \nabla'\frac{\partial^2\nabla'}{\partial w^{(4)}\partial z''} = \nabla'\frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z''},$$

$$\frac{\partial\nabla}{\partial w'''}\frac{\partial\nabla}{\partial z''} - \frac{\partial\nabla}{\partial z'''}\frac{\partial\nabla}{\partial w''} = \nabla\frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z''},$$

$$\frac{d\frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z''}}{dx} = -\frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z'}, \qquad \frac{\partial^2\nabla}{\partial w'''\partial z''} = -\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}.$$

Sie wird hierdurch gleich:

$$\frac{\mathfrak{A}_3\left(\nabla\frac{d\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}}{dx} - \nabla'\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}\right) - \mathfrak{A}_3'\nabla\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z''}}{\left(\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}\right)^2} = -\frac{d\mathfrak{A}_3\frac{\nabla}{\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}}}{dx}.$$

Man hat daher, wenn man für $\mathfrak{A}_3$ seinen Werth setzt $a_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'''\partial y'''}$:

$$\Psi_3(z_3''') = a_{33}\frac{\nabla}{\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'''\partial y'''}\,\frac{\nabla}{\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}}.$$

Lässt man nun w einen Werth von z bedeuten, welcher der Differentialgleichung $\Psi_2(z_2'') = 0$ genügt, so verschwindet das Glied $z_2''\Psi_2(w_2'')$ aus der letzten Differenz, und man erhält durch Integration:

$$\int w_2''\Psi_2(z_2'')\,dx = -\Psi_3(z_3''').$$

Mit Hülfe dieser Gleichung geht endlich der zuletzt angegebene Werth der zweiten Variation, wenn man setzt $z_2'' = w_2'' z_3'''$, über in:

$$\Delta_2 = \int_a^b z_3'''\,\Psi_3(z_3''')\,dx.$$

Setzt man hierin für $\Psi_3(z_3''')$ den vorhin angegebenen Werth, ebenso für z_3''' seinen Werth:

$$z_3''' = \frac{\nabla\frac{\partial^2\nabla}{\partial w''\partial z'''}}{\left(\frac{\partial\nabla}{\partial z'''}\right)^2},$$

so erhält man die gewünschte Form der zweiten Variation:

$$\varDelta_2 = \int_a^b a_{33} \frac{\nabla^2}{\left(\frac{\partial \nabla}{\partial z'''}\right)^2} dx.$$

Um die zweite Variation auf diese Form zurückzuführen, bedurfte es nicht der weiten Rechnung, die man jedoch als eine Controlle betrachten kann der vorgetragenen allgemeinen Theorie, welche jenes Resultat ohne Weiteres ergiebt. Es sind vielmehr die Relationen zwischen den in den Ausdruck $\frac{\nabla}{\frac{\partial \nabla}{\partial z'''}}$ eingehenden willkürlichen Constanten, welche wenigstens einen Theil dieser Rechnung nothwendig machen. Werfen wir also einen Blick auf die Art und Weise des Eingehens der willkürlichen Constanten in den genannten Ausdruck.

Da u, v, w Werthe von z bedeuten, welche sämmtlich der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ genügen, so haben sie die Form (67)

$$\begin{aligned} u &= a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_6 r_6, \\ v &= b_1 r_1 + b_2 r_2 + \cdots + b_6 r_6, \\ w &= c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots + c_6 r_6. \end{aligned}$$

Die achtzehn in diese Ausdrücke eingehenden Constanten a, b, c sind jedoch nicht ganz willkürlich, sondern v ist ein Werth von z, welcher der Differentialgleichung $\Psi_1(z_1') = 0$, und w ein Werth von z, welcher der Differentialgleichung $\Psi_2(z_2'') = 0$ genügt. Der ersteren Gleichung, v für z gesetzt, wird durch *eine* Relation zwischen den Constanten identisch genügt, weil $\Psi_1(z_1') = 0$ das erste Integral ist der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$. Der zweiten Gleichung, w für z gesetzt, wie auch der Gleichung $\Psi_1(z_1') = 0$, wird durch *zwei* Relationen zwischen den Constanten identisch genügt, weil $\Psi_2(z_2'') = 0$ das zweite Integral ebenderselben Differentialgleichung ist. Diese drei Relationen machen also folgende drei Gleichungen zu identischen:

$$\Psi_1(v_1') = 0, \qquad \Psi_1(w_1') = 0, \qquad \Psi_2(w_2'') = 0,$$

und man erhält diese Relationen etwa dadurch, dass man der Variabeln x einen bestimmten Werth zuertheilt. Aber es braucht auch nur die letzte

Gleichung identisch erfüllt zu werden; die beiden anderen werden dann von selber identisch erfüllt.

In der That, differentiirt man die Gleichung $\Psi_2(w_2'') = 0$ zweimal nach x, so erhält man

$$\frac{d\Psi_2(w_2'')}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2\Psi_2(w_2'')}{dx^2} = 0,$$

zwei Gleichungen, welche ebenfalls identisch erfüllt werden. Diese beiden Gleichungen bedingen aber die genannten $\Psi_1(v_1') = 0$, $\Psi_1(w_1') = 0$, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die linken Theile der beiden ersten Gleichungen darstellt. Man hat nämlich mit Rücksicht auf die früher aufgestellten Gleichungen, wenn man in ihnen w oder v für z setzt:

$$v_1'\Psi_1(w_1') - w_1'\Psi_1(v_1') = -\frac{d\Psi_2(w_2'')}{dx}$$

und:

$$\frac{dv_1'}{dx}\cdot\Psi_1(w_1') - \frac{dw_1'}{dx}\cdot\Psi_1(v_1') = -\cdot\frac{d^2\Psi_2(w_2'')}{dx^2};$$

denn es fallen die noch hinzukommenden Glieder

$$w_1'\big(u\Psi(v) - v\Psi(u)\big) - v_1'\big(u\Psi(w) - w\Psi(u)\big)$$

fort, weil $u, v, w,$ der Annahme nach Werthe von z bedeuten, welche der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$ identisch genügen.

Um nun statt der genannten achtzehn Constanten a, b, c die bequemeren neuen Determinantenconstanten einzuführen, wollen wir mit dem Zeichen $(\varkappa\lambda\mu)$ die Determinante bezeichnen:

$$(\varkappa\lambda\mu) = \begin{vmatrix} a_\varkappa & a_\lambda & a_\mu \\ b_\varkappa & b_\lambda & b_\mu \\ c_\varkappa & c_\lambda & c_\mu \end{vmatrix}.$$

Da $\varkappa, \lambda, \mu$ irgend welche von den Zahlen 1, 2, ... 6 bedeuten, so wird man zwanzig verschiedene Determinantenconstanten haben, deren Verhältnisse allein in den zuletzt angegebenen Werth der zweiten Variation Δ_2 eingehen. Sie repräsentiren daher nur neunzehn Constanten. Zwischen diesen Determinantenconstanten haben wir aber die Gleichung:

$$u\Psi_2(w_2'') = \mathfrak{A}_2\frac{\partial\nabla}{\partial z'''} + \mathfrak{A}_3\left(\frac{\partial\nabla}{\partial z'} + \frac{\partial\nabla'}{\partial z''}\right) + \mathfrak{A}_3'\frac{\partial\nabla}{\partial z''} = 0,$$

in welche auch nur die Verhältnisse jener Determinantenconstanten eingehen, und von welcher Gleichung man weiss, dass ihr durch drei Relationen identisch genügt wird. Diese drei Relationen wird man daher aus den drei Gleichungen:

$$u\Psi_2(w_2'') = 0, \qquad \frac{du\Psi_2(w_2'')}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2u\Psi_2(w_2'')}{dx^2} = 0$$

erhalten können, indem man der unabhängigen Variabeln x bestimmte Werthe zuertheilt. Da aber in diese drei Gleichungen auch nur die Verhältnisse der Determinantenconstanten in linearer Weise eingehen, so bleiben von den neunzehn Constanten nur noch sechzehn willkürlich.

Andererseits hat man aber zwischen den zwanzig Determinantenconstanten folgende dreissig Gleichungen, in welche ebenfalls nur ihre Verhältnisse eingehen:

$$\begin{aligned}
(123)\cdot(145) - (124)\cdot(135) + (125)\cdot(134) &= 0\\
(123)\cdot(146) - (124)\cdot(136) + (126)\cdot(134) &= 0\\
(123)\cdot(156) - (125)\cdot(136) + (126)\cdot(135) &= 0\\
(124)\cdot(156) - (125)\cdot(146) + (126)\cdot(145) &= 0\\
(134)\cdot(156) - (135)\cdot(146) + (136)\cdot(145) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(213)\cdot(245) - (214)\cdot(235) + (215)\cdot(234) &= 0\\
(213)\cdot(246) - (214)\cdot(236) + (216)\cdot(234) &= 0\\
(213)\cdot(256) - (215)\cdot(236) + (216)\cdot(235) &= 0\\
(214)\cdot(256) - (215)\cdot(246) + (216)\cdot(245) &= 0\\
(234)\cdot(256) - (235)\cdot(246) + (236)\cdot(245) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(321)\cdot(345) - (324)\cdot(315) + (325)\cdot(314) &= 0\\
(321)\cdot(346) - (324)\cdot(316) + (326)\cdot(314) &= 0\\
(321)\cdot(356) - (325)\cdot(316) + (326)\cdot(315) &= 0\\
(324)\cdot(356) - (325)\cdot(346) + (326)\cdot(345) &= 0\\
(314)\cdot(356) - (315)\cdot(346) + (316)\cdot(345) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(423)\cdot(415) - (421)\cdot(435) + (425)\cdot(431) &= 0\\
(423)\cdot(416) - (421)\cdot(436) + (426)\cdot(431) &= 0\\
(423)\cdot(456) - (425)\cdot(436) + (426)\cdot(435) &= 0\\
(421)\cdot(456) - (425)\cdot(416) + (426)\cdot(415) &= 0\\
(431)\cdot(456) - (435)\cdot(416) + (436)\cdot(415) &= 0
\end{aligned}$$

$$(523)\cdot(541)-(524)\cdot(531)+(521)\cdot(534)=0$$
$$(523)\cdot(546)-(524)\cdot(536)+(526)\cdot(534)=0$$
$$(523)\cdot(516)-(521)\cdot(536)+(526)\cdot(531)=0$$
$$(524)\cdot(516)-(521)\cdot(546)+(526)\cdot(541)=0$$
$$(534)\cdot(516)-(531)\cdot(546)+(536)\cdot(541)=0$$

$$(623)\cdot(645)-(624)\cdot(635)+(625)\cdot(634)=0$$
$$(623)\cdot(641)-(624)\cdot(631)+(621)\cdot(634)=0$$
$$(623)\cdot(651)-(625)\cdot(631)+(621)\cdot(635)=0$$
$$(624)\cdot(651)-(625)\cdot(641)+(621)\cdot(645)=0$$
$$(634)\cdot(651)-(635)\cdot(641)+(631)\cdot(645)=0.$$

Von diesen dreissig Gleichungen, welche sich alle aus einer von ihnen durch Vertauschung der Elemente ableiten lassen, sind jedoch nur zehn von einander unabhängig. Denn es lassen sich die zehn Determinanten:

$$(123)\quad(124)\quad(356)\quad(456)\quad(156)\quad(245)\quad(246)\quad(235)\quad(236)\quad(256)$$

durch die übrigen

$$(125)\quad(126)\quad(134)\quad(135)\quad(136)\quad(145)\quad(146)\quad(345)\quad(346)\quad(234)$$

ausdrücken wie folgt:

$$(123)=\frac{(134)}{N}[(126)\cdot(135)-(125)\cdot(136)]$$
$$(124)=\frac{(134)}{N}[(126)\cdot(145)-(125)\cdot(146)]$$
$$(356)=\frac{(346)\cdot(135)-(345)\cdot(136)}{(134)}$$
$$(456)=\frac{(346)\cdot(145)-(345)\cdot(146)}{(134)}$$
$$(156)=-\frac{N}{(134)}$$
$$(245)=\frac{(345)}{N}[(126)\cdot(145)-(125)\cdot(146)]+\frac{(145)\cdot(234)}{(134)}$$
$$(246)=\frac{(346)}{N}[(126)\cdot(145)-(125)\cdot(146)]+\frac{(146)\cdot(234)}{(134)}$$
$$(235)=\frac{(345)}{N}[(126)\cdot(135)-(125)\cdot(136)]+\frac{(135)\cdot(234)}{(134)}$$
$$(236)=\frac{(346)}{N}[(126)\cdot(135)-(125)\cdot(136)]+\frac{(136)\cdot(234)}{(134)}$$
$$(256)=\frac{(125)\cdot(346)-(126)\cdot(345)}{(134)}-\frac{(234)\cdot N}{(134)\cdot(134)}$$
$$N=(145)\cdot(136)-(146)\cdot(135);$$

und diese Ausdrücke genügen allen jenen dreissig Gleichungen. Die beiden ersten Ausdrücke ergeben sich aus den Gleichungen (1) und (2). Die drei folgenden aus den Gleichungen (15), (20), (5). Hierauf die Ausdrücke 6 und 7 aus den Gleichungen (16), (17). Die drei letzten Ausdrücke der Determinanten endlich aus den Gleichungen (11), (12), (29).

Da hiernach zwischen den Verhältnissen der Determinantenconstanten noch die zehn zuletzt angegebenen von einander unabhängigen Gleichungen bestehen, so reducirt sich die angegebene Zahl 16 der willkürlichen Constanten, welche in die transformirte zweite Variation eingehen, auf 6.

Diese sechs willkürlichen Constanten müssen sich nun so bestimmen lassen, dass der Ausdruck $\frac{\partial \nabla}{\partial z'''}$ für keinen Werth der unabhängigen Variabeln x zwischen den Grenzen der Integration a und b verschwindet, wenn das Integral Δ ein Maximum oder Minimum sein soll.

Heidelberg, im Mai 1857.

28.

Zu den Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 55, Seite 83—88.]

In der Abhandlung „Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung“, Crelle's Journal Bd. 49, liest man p. 324 und p. 326 [1]) die Sätze:

Es giebt 1008 *verschiedene Curven dritter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung hindurchgehen, unter denen nicht drei Doppeltangenten enthalten sind, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.*

Es giebt 5040 *verschiedene Curven dritter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung hindurchgehen. Durch die zwölf Berührungspunkte dieser sechs Doppeltangenten lassen sich vier Paare Kegelschnitte legen. . . .*

Diese beiden Sätze widersprechen dem Steiner'schen Satze desselben Bandes p. 270 keineswegs, welcher also lautet:

Unter den 28 *Doppeltangenten einer Curve vierten Grades giebt es, im Allgemeinen,* 6048 *mal sechs solche, deren zwölf Berührungspunkte zusammen in irgend einer eigentlichen, nicht in Theile zerfallenden Curve dritten Grades liegen.*

---

1) [No. 25, Seite 395 und 398 dieser Ausgabe.]

Denn man erhält die von Steiner gefundene Zahl der genannten Curven dritter Ordnung, wenn man die in den beiden ersten Sätzen hervorgehobenen Zahlen addirt. Diese Uebereinstimmung mag als eine neue Bestätigung der auf den verschiedensten Wegen gefundenen Resultate dienen.

Es ist aber wichtig, die beiden Gattungen von 1008 und von 5040 Curven dritter Ordnung von einander zu trennen wegen der Folgerungen, die sich aus ihnen ziehen lassen, wenn man die Lage der sechs Doppeltangenten näher ins Auge fasst, welche ihnen entsprechen.

Ich werde im Folgenden die Betrachtungen in Kürze andeuten, welche auf die genannten beiden Gattungen von Curven dritter Ordnung führen, um daraus neue Sätze über die Lage der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung zu entwickeln.

Wenn man mit $\varDelta$ die symmetrische Determinante bezeichnet:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix},$$

in welcher $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$, so stellt unter der Voraussetzung, dass die Componenten $u_{\varkappa\lambda}$ dieser Determinante lineare Ausdrücke seien der variablen Coordinaten eines Punktes in der Ebene, die Gleichung:

$$\varDelta = 0$$

eine beliebige Curve vierter Ordnung dar.

Diese Gleichungsform der Curven vierter Ordnung ist für die Untersuchung der Doppeltangenten dieser Curven von grosser Bedeutung. — Die wirkliche Zurückführung der Gleichung auf die genannte Form bleibt freilich ein schwieriges und bis jetzt noch nicht gelöstes Problem. (Das entsprechende Problem bei den Curven dritter Ordnung führt auf das der Wendepunkte und ist mit diesem zugleich gelöst, Bd. 28 p. 89).[1]) — Doch lassen sich schon aus der genannten Gleichungsform Schlüsse ziehen, die von geometrischem Interesse sind.

---

1) [S. 113 dieser Ausgabe.]

Setzt man nämlich:

$$a = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \gamma_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \gamma_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix},$$

so hat man die identische Gleichung:

$$\varDelta U = a c - b^2,$$

in welcher U eine ganze homogene Function des zweiten Grades bedeutet, sowohl in Rücksicht auf die Grössen α, als auf γ und u, Bd. 49 p. 251.[1])

Aus der Form dieser identischen Gleichung ersieht man, dass $a = 0$ die Gleichung einer Curve dritter Ordnung ist, welche die gegebene Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ in jedem Schnittpunkte beider Curven zugleich berührt. Ebenso ist $U = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes, der von der Curve $a = 0$ in jedem Schnittpunkte beider Curven zugleich auch berührt wird, während $b = 0$ eine Curve dritter Ordnung darstellt, welche durch alle jene Berührungspunkte hindurchgeht.

Dasselbe, was von der Curve $a = 0$, gilt auch von der Curve dritter Ordnung $c = 0$.

Jede dieser Curven dritter Ordnung $a = 0$ und $c = 0$ berührt also die gegebene Curve $\varDelta = 0$ in sechs Punkten, und die Curve dritter Ordnung $b = 0$ geht durch diese zwölf Berührungspunkte hindurch.

Die vier willkürlichen Constanten α, deren Verhältnisse in die Gleichung $a = 0$ eingehen, lassen sich nun so bestimmen, dass der Ausdruck a in drei lineare Factoren $a_1\ a_2\ a_3$ zerfällt, so dass $a = a_1 . a_2 . a_3$. In dieser Voraussetzung werden $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ die Gleichungen von drei Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$, weil die in drei gerade Linien zerfallende Curve dritter Ordnung $a = 0$ nicht aufhört, die gegebene Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ in sechs Punkten zu berühren.

Bestimmt man auch die vier Constanten γ so, dass c ebenfalls in drei lineare Factoren zerfällt $c = c_1 . c_2 . c_3$, so hat man sechs Doppel-

---

1) [Seite 328 dieser Ausgabe.]

tangenten a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3 der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$, durch deren Berührungspunkte die Curve dritter Ordnung $b = 0$ hindurchgeht. Dieses ist eine von den 1008 Curven dritter Ordnung, von denen der oben angegebene erste Satz handelt.

Da aber jede der Curven dritter Ordnung $a = 0$ und $c = 0$ auch den Kegelschnitt $U = 0$ in drei verschiedenen Punkten berührt, so berühren die genannten sechs Doppeltangenten einzeln denselben Kegelschnitt, was auch aus der identischen Gleichung erhellt:

$$\Delta U = a_1 a_2 a_3 c_1 c_2 c_3 - b^2.$$

Jeder dieser, durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ gehenden Curven $b = 0$ entspricht also ein Kegelschnitt, den die sechs Doppeltangenten berühren. Daher hat man, gestützt auf den ersten oben angegebenen Satz, folgenden:

Unter den 28 *Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung giebt es,* 1008 *mal, sechs solcher Doppeltangenten, welche einen Kegelschnitt berühren.*

Um zu der zweiten Gattung von Curven dritter Ordnung zu gelangen, welche durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung hindurchgehen, muss man von einer anderen Gleichungsform der Curven vierter Ordnung ausgehen.

Setzt man zu diesem Zwecke:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

und lässt u_{11}, $u_{12} = u_{21}$, u_{22} beliebig gegebene Ausdrücke zweier Coordinaten, respective der ersten, zweiten und dritten Ordnung bedeuten, so hat man die allgemeine Gleichung einer Curve vierter Ordnung:

$$\Delta = 0.$$

Die Zurückführung der vorigen Gleichungsform der Curven vierter Ordnung auf diese ist Bd. 49 p. 305 [1]) kurz angedeutet worden. Man hat nun die identische Gleichung Bd. 49 p. 305:

1) [Seite 375 dieser Ausgabe.]

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix}^2$$

oder:
$$\varDelta = ac - b^2,$$
wenn man setzt: $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = m,$

und: $\quad -a = u_{11}, \quad -b = u_{12} - u_{11} m, \quad -c = u_{22} - 2 u_{12} m + u_{11} m^2.$

Die zuletzt angegebenen Ausdrücke bleiben respective von der ersten, zweiten, dritten Ordnung, wenn man m einen beliebigen linearen Ausdruck der Coordinaten bedeuten lässt. Ihre geometrische Bedeutung erhellt aus der zuletzt angegebenen identischen Gleichung. Es ist nämlich $a = 0$ die Gleichung einer Doppeltangente der Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$, $b = 0$ ist die Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes, welcher durch die Berührungspunkte der genannten Doppeltangente hindurchgeht, und $c = 0$ ist eine Curve dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung in den übrigen sechs Punkten berührt, in welchen der Kegelschnitt die Curve vierter Ordnung schneidet.

Die Gleichung $c = 0$ repräsentirt ein ganzes System von Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung $\varDelta = 0$ in sechs verschiedenen Punkten berühren, weil den drei in dem linearen Ausdrucke m enthaltenen Constanten beliebige Werthe zuertheilt werden können.

Verändert man nun m in den ebenfalls linearen Ausdruck m', so gehe b in b', c in c' über, und man hat wieder eine identische Gleichung:
$$\varDelta = ac' - b'^2,$$
die eine gleiche Interpretation als die vorige zulässt.

Zieht man aber diese identische Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man die ebenfalls identische Gleichung:
$$0 = a(c - c') - (b + b')(b - b'),$$
aus welcher ersichtlich ist, dass a ein Factor von $b + b'$ oder von $b - b'$ ist. Da es nun gleichgültig ist, welche von diesen Grössen das Product von a und einem anderen linearen Factor A ist, so wollen wir setzen:
$$b - b' = aA,$$
wodurch aus der vorhergehenden Gleichung folgende identische Gleichung hervorgeht:
$$0 = (c - c') - A(b + b').$$

Diese Gleichung liefert den Beweis, „dass die beiden Curven dritter Ordnung $c = 0$, $c' = 0$, von denen jede die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ in sechs Punkten berührt, sich gegenseitig in neun Punkten schneiden, wovon sechs in einem Kegelschnitt und die drei übrigen in einer geraden Linie liegen.“

Bezeichnet man den Ausdruck dritter Ordnung $c - Ab$ mit d, so hat man nach der letzten identischen Gleichung:

$$d = c - Ab = c' + Ab';$$

daher:

$$d^2 = (c - Ab)(c' + Ab')$$

oder

$$cc' - d^2 = A(bc' - b'c + Abb'),$$

woraus endlich mit Berücksichtigung der früheren Gleichungen folgende identische Gleichung hervorgeht:

$$\Delta A^2 = cc' - d^2.$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass die zwölf Punkte, in welchen die beiden Curven dritter Ordnung $c = 0$ und $c' = 0$ die Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ berühren, auf einer Curve dritter Ordnung $d = 0$ liegen.

Die Ausdrücke c und c' enthalten aber jeder drei willkürliche Constanten, welche respective mit m und m' eingehen. Bestimmt man diese Constanten nun so, dass ebensowohl c in das Product von drei linearen Factoren zerfällt, als c', so werden aus den beiden Curven $c = 0$ und $c' = 0$ sechs Doppeltangenten der Curve $\Delta = 0$, durch deren Berührungspunkte eine Curve dritter Ordnung $d = 0$ hindurchgeht. Dieses ist aber gerade eine von den 5040 Curven dritter Ordnung, von denen der zweite oben angegebene Satz handelt. Da sich im Allgemeinen die Curven $c = 0$ und $c' = 0$ in neun Punkten schneiden, von denen sechs in einem Kegelschnitt und die drei anderen in einer geraden Linie liegen, so werden auch die drei Doppeltangenten $c = 0$ die drei Doppeltangenten $c' = 0$ in neun solchen Punkten schneiden. Mit anderen Worten, die sechs Doppeltangenten bilden die Seiten eines Pascal'schen Sechsecks. Auf diese Weise entspricht jeder der 5040 Curven dritter Ordnung ein Pascal'sches Sechseck. Man hat demnach den Satz:

Unter den 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung giebt es, 5040 mal, sechs solche Doppeltangenten, welche ein Pascal'sches Sechseck bilden.

Heidelberg, im December 1857.

29.

Bemerkungen zu: „Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig. 1857."

[Erschienen in der Kritischen Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik. Herausgegeben in Heidelberg von A. Kekulé, G. Lewinstein, F. Eisenlohr und M. Cantor. 1858. Seite 483—488. — Eine italienische Bearbeitung findet sich unter dem Titel: Il determinante di Sylvester ed il risultante di Eulero, in: Tortolini, Annali di matematica 1859, T. II, p. 5—8.]

Wer die „Theorie und Anwendung der Determinanten von Baltzer" gelesen hat, wird dieses Werk nicht ohne Befriedigung aus der Hand gelegt haben. Dem einen wird sie eine reiche Quelle der Belehrung gewesen sein, dem anderen eine kunstreiche Verbindung zerstreuter Resultate mit einem Hinweis auf die Lücken, die diese, wie jede noch in der Bearbeitung begriffene Theorie hat.

Ich weise auf den § 11 hin, welcher mit dem Beweise beginnt, dass die Euler'sche Resultante zweier algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten gerade die Bézout-Sylvester'sche Determinante ist. Mit dem Beweise allein begnügt man sich nicht mehr; man verlangt vielmehr eine wirkliche Ueberführung des einen Ausdruckes in den anderen. Wie diese Ueberführung mit Hilfe der Determinanten zu Stande gebracht wird, sollen die folgenden Zeilen lehren.

Wenn

$$1. \qquad \begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 0 \\ \varphi(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n = 0 \end{aligned}$$

zwei Gleichungen sind, die für irgend einen Werth der Unbekannten x zu gleicher Zeit bestehen, so hat man mit ihnen auch folgende Gleichungen:

$$2.\quad \begin{array}{lllll} f(x)=0, & x\,f(x)=0, & x^2 f(x)=0, & \ldots & x^{n-1} f(x)=0, \\ \varphi(x)=0, & x\,\varphi(x)=0, & x^2\varphi(x)=0, & \ldots & x^{m-1}\varphi(x)=0. \end{array}$$

Betrachtet man in diesen, nach Potenzen der Unbekannten entwickelten Gleichungen die verschiedenen Potenzen der einen Unbekannten als eben so viele neue Unbekannte, so hat man lineäre Gleichungen, deren Zahl die Zahl der Unbekannten um eine Einheit übersteigt. Das Resultat der Elimination der neuen Unbekannten wird eine Gleichung:

$$3.\qquad S=0$$

sein zwischen den Coëfficienten in den Gleichungen (1), welche mit den beiden Gleichungen (1) zugleich besteht.

Der linke Theil dieser Gleichung, die Sylvester'sche Determinante, ist hiernach componirt aus den Coëfficienten der 0ten, ersten etc. Potenzen der Unbekannten x in den $m+n$ Gleichungen (2). Er ist eine Determinante der $(m+n)$ten Ordnung von der Form:

$$4.\qquad S=\Sigma\pm a_0^0\,a_1^1\,a_2^2\,\ldots\,a_{m+n-1}^{m+n-1},$$

welche in den linken Theil der Gleichung (3) selbst übergeht, wenn man festsetzt, dass

$$5.\qquad a_\varkappa^\lambda=a_{\varkappa-\lambda}\quad \text{für } \lambda=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

$$6.\qquad a_\varkappa^\lambda=b_{n+\varkappa-\lambda}\quad \text{für } \lambda=n,\ n+1,\ \ldots,\ m+n-1,$$

und dass alle Componenten $a_\varkappa^\lambda$ verschwinden, welche durch (5) und (6) nicht die Bezeichnungen der Coëfficienten in den Gleichungen (1) erhalten.

Ich werde die so dargestellte Determinante in Verbindung bringen mit der von Borchardt vielfältig gebrauchten Determinante:

$$B=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

indem ich festsetze, dass s_k die Summe der $k$ten Potenzen der n Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ bedeute.

Auch diese Determinante betrachte ich als eine Determinante der $(m+n)$ten Ordnung

7. $$B = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \quad \ldots \quad b_{m+n-1}^{m+n-1},$$

indem ich festsetze, dass:

8. $b_{\varkappa'}^{\lambda'} = s_{\varkappa'+\lambda'}$ für $\lambda' = 0, 1, \ldots, n-1$,

9. $b_{\varkappa'}^{\lambda'} = 0\ (\varkappa' \lesseqgtr \lambda'),\quad b_{\lambda'}^{\lambda'} = 1$ für $\lambda' = n, n+1, \ldots, m+n-1$.

Setzt man nun:

10. $$c_{\lambda'}^{\lambda} = a_0^{\lambda} \cdot b_0^{\lambda'} + a_1^{\lambda} \cdot b_1^{\lambda'} + \ldots + a_{m+n-1}^{\lambda} \cdot b_{m+n-1}^{\lambda'},$$

so wird die Determinante:

11. $$C = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \ldots c_{m+n-1}^{m+n-1}$$

bekanntlich gleich dem Product der beiden vorhergehenden in der Art, dass man hat:

12. $$C = S \cdot B.$$

Die Componenten $c_{\lambda'}^{\lambda}$ dieser neuen Determinante C wollen wir nun wirklich darstellen.

Wir betrachten erstens die Componenten $c_{\lambda'}^{\lambda}$, in welchen λ und λ' die Werthe haben $0, 1, \ldots, n-1$. Für diese Werthe stellt sich (10), indem man (5) und (8) substituirt, also dar:

$$c_{\lambda'}^{\lambda} = a_{-\lambda} \cdot s_{\lambda'} + a_{1-\lambda} \cdot s_{1+\lambda'} + \ldots + a_{\lambda-\lambda} \cdot s_{\lambda+\lambda'} + a_{\lambda+1-\lambda} \cdot s_{\lambda+1+\lambda'} \\ + \ldots + a_{m+n-1-\lambda} \cdot s_{m+n-1+\lambda'}.$$

Da aber die Grössen $a_{-\lambda}, a_{1-\lambda} \ldots$ verschwinden und erst die Grössen $a_0, a_1 \ldots$ eine Geltung erlangen; da ferner alle Grössen $a_{m+1}, a_{m+2} \ldots$ ebenfalls verschwinden, so hat man:

$$c_{\lambda'}^{\lambda} = a_0\, s_{\lambda+\lambda'} + a_1\, s_{\lambda+\lambda'+1} + \ldots + a_m\, s_{\lambda+\lambda'+m};$$

welcher Ausdruck sich als Summe kürzer so darstellen lässt:

13. $$c_{\lambda'}^{\lambda} = \Sigma\, x^{\lambda+\lambda'} f(x),$$

indem das Summenzeichen sich bezieht auf die n Wurzeln x der Gleichung $\varphi(x) = 0$.

Wir stellen zweitens die Componenten $c_{\lambda'}^{\lambda}$ der Determinante C dar für den Fall, dass $\lambda' = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ und $\lambda = n, n+1, \ldots, m+n-1$. Hier gelten die Gleichungen (6) und (8), und man hat demnach:

$$c_{\lambda'}^{\lambda} = b_{n-\lambda} \cdot s_{\lambda'} + b_{n+1-\lambda} \cdot s_{1+\lambda'} + \cdots + b_{n-n} \cdot s_{\lambda'+\lambda-n} + \cdots + b_{2n+m-1-\lambda} \cdot s_{m+n-1+\lambda'}.$$

Da aber wieder alle b verschwinden mit negativem Index, sowie alle b, deren Index grösser ist als n, so hat man:

$$c_{\lambda'}^{\lambda} = b_0 \cdot s_{\lambda'+\lambda-n} + b_1 \cdot s_{\lambda'+\lambda-n+1} + \cdots + b_n \cdot s_{\lambda'+\lambda}.$$

Diesen Ausdruck kann man als Summe auch so darstellen:

$$c_{\lambda'}^{\lambda} = \Sigma\, x^{\lambda'+\lambda-n}\, \varphi(x).$$

Da das Summenzeichen aber bezüglich ist auf alle n Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, so verschwindet dieser Ausdruck.

Es verschwinden also alle Componenten $c_{\lambda'}^{\lambda}$ der Determinante (11) C, in welchen $\lambda' = 0, 1, \ldots, n-1$ und $\lambda = n, n+1, \ldots, m+n-1$. Auf Grund dieser Bemerkung zerfällt nach einem bekannten Determinantensatze die Determinante C in das Product zweier Determinanten:

$$14. \qquad C = \Sigma \pm c_0^0\, c_1^1 \cdots c_{n-1}^{n-1} \cdot \Sigma \pm c_n^n\, c_{n+1}^{n+1} \cdots c_{m+n-1}^{m+n-1}.$$

Es bleibt endlich drittens noch übrig, die Componenten $c_{\lambda'}^{\lambda}$ für den Fall zu untersuchen, wenn ebenso λ als λ' die Werthe haben: $n, n+1, \ldots, m+n-1$. Für diesen Fall verschwinden in dem Ausdrucke (10) alle b, mit Ausnahme des einen $b_{\lambda'}^{\lambda}$, welches gleich Eins ist. Man hat daher $c_{\lambda'}^{\lambda} = a_{\lambda'}^{\lambda}$, und wenn man aus (6) den Werth setzt:

$$c_{\lambda'}^{\lambda} = b_{n+\lambda'-\lambda}.$$

Dieser Ausdruck ist aber der Annahme nach gleich Null, wenn $\lambda' > \lambda$. Daher verschwinden in der Determinante $\Sigma \pm c_n^n\, c_{n+1}^{n+1} \cdots c_{m+n-1}^{m+n-1}$ alle Componenten auf der einen Seite der Diagonalcomponenten, und die Determinante selbst wird nach einem bekannten Determinantensatze das Product der Diagonalcomponenten, von denen jede $c_{\lambda'}^{\lambda'} = b_n$. Der Werth der genannten Determinante ist also $(b_n)^m$. Setzt man diesen Werth in (14), so hat man:

$$C = (b_n)^m \Sigma \pm c_0^0 \, c_1^1 \cdots c_{n-1}^{n-1}, \tag{15}$$

oder nach (12) und (13):

$$S \,.\, B = (b_n)^m \begin{vmatrix} \Sigma f(x) & \Sigma x f(x) & \ldots & \Sigma x^{n-1} f(x) \\ \Sigma x f(x) & \Sigma x^2 f(x) & \ldots & \Sigma x^n f(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma x^{n-1} f(x) & \Sigma x^n f(x) & \ldots & \Sigma x^{2n-2} f(x) \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Behandeln wir nun in ähnlicher Weise das Euler'sche Product:

$$\begin{aligned} E = \ & (y_1 - x_1) \ \ldots \ (y_m - x_1) \\ & .\,(y_1 - x_2) \ \ldots \ (y_m - x_2) \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & .\,(y_1 - x_n) \ \ldots \ (y_m - x_n), \end{aligned} \tag{17}$$

welches, unter der Voraussetzung, dass $y_1, y_2 \ldots y_m$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ und $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, gleich Null gesetzt ebenfalls die Bedingung gibt für das gleichzeitige Bestehen der genannten beiden Gleichungen.

Die Producte der Horizontalfactoren in E sind symmetrische Functionen der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. Ersetzt man dieselben durch die Coëfficienten dieser Gleichung, so erhält man aus (17):

$$E \cdot (a_m)^n = f(x_1) \cdot f(x_2) \ \ldots \ f(x_n). \tag{18}$$

Dieses Product betrachte ich als eine Determinante der $n$ten Ordnung, deren Diagonalcomponenten die Factoren $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)$, und deren übrige Componenten sämmtlich gleich Null sind. Diese Determinante multiplicire ich mit der Determinante

$$\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{19}$$

und erhalte das Product:

$$E \cdot (a_m)^n \cdot \beta = \begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \ldots & f(x_n) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & \ldots & x_n f(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} f(x_1) & x_2^{n-1} f(x_2) & \ldots & x_n^{n-1} f(x_n) \end{vmatrix}.$$

Dieses Product multiplicire ich nochmals mit der Determinante β und erhalte:

20. $$E \cdot (a_m)^n \cdot \beta^2 = \begin{vmatrix} \Sigma f(x) & \Sigma x f(x) & \ldots & \Sigma x^{n-1} f(x) \\ \Sigma x f(x) & \Sigma x^2 f(x) & \ldots & \Sigma x^n f(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma x^{n-1} f(x) & \Sigma x^n f(x) & \ldots & \Sigma x^{2n-2} f(x) \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (16) und bemerkt zugleich, dass $\beta^2 = B$, so sieht man, dass:

21. $$E \cdot (a_m)^n \cdot (b_n)^m = S.$$

Es ist also in der That das Euler'sche Product aus den Differenzen der Wurzeln zweier algebraischen Gleichungen gleich der Sylvester'schen Determinante, wenn die Coëfficienten der höchsten Potenzen der Unbekannten in den beiden Gleichungen gleich der Einheit sind.

Heidelberg, im Oktober 1858.

30.

Zur Theorie der ganzen homogenen Functionen.[1])

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 56, Seite 263—269.]

Lehrsatz.

Wenn die Determinante einer ganzen homogenen Function der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ identisch verschwindet, so lässt sich die Function durch bestimmte lineare Substitutionen von der Form:

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + \cdots + a_n^\varkappa y_n$$

auf eine Function der Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ zurückführen, in welcher eine dieser Variabeln fehlt.

Diesen in diesem Journal Bd. 42, p. 119 [2]) mitgetheilten Lehrsatz strenger zu begründen, ist der Zweck dieser Abhandlung.

Es sei u eine beliebige ganze homogene Function $m$ter Ordnung von den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$; ferner seien $u_1, u_2, \ldots u_n$ die ersten, $u_{11}, u_{12}, \ldots u_{nn}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function nach den Variabeln genommen. Die Determinante der letzteren, gebildet aus den Componenten:

$$\begin{matrix} u_{11} & u_{12} & \ldots \\ u_{21} & u_{22} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot, \end{matrix}$$

---

1) [Vgl. zu dieser Abhandlung die Note zu No. 21 und 30 am Schlusse des Bandes.]

2) [Seite 292 dieser Ausgabe.]

wird die Determinante der Function u genannt, und soll mit dem Zeichen Δ bezeichnet werden. Obwohl $u_{\varkappa\lambda}$ und $u_{\lambda\varkappa}$ dem Werthe nach einander gleich sind, so will ich doch bei der partiellen Differentiation von Δ nach diesen Componenten einen Unterschied machen, um die bekannten Determinantensätze ohne Weiteres in Anwendung bringen zu können.

Dieses vorausgesetzt, hat man bekanntlich

$$\Delta = \Delta_{\varkappa 1} u_{\varkappa 1} + \Delta_{\varkappa 2} u_{\varkappa 2} + \cdots + \Delta_{\varkappa n} u_{\varkappa n},$$
$$0 = \Delta_{\varkappa 1} u_{\lambda 1} + \Delta_{\varkappa 1} u_{\lambda 2} + \cdots + \Delta_{\varkappa n} u_{\lambda n},$$

wenn man der Kürze wegen setzt $\dfrac{\partial \Delta}{\partial u_{\varkappa\lambda}} = \Delta_{\varkappa\lambda}$.

Die Determinante Δ ist in Rücksicht auf die Variabeln von der Ordnung $n(m-2)$, während die partiellen Differentialquotienten $\Delta_{\varkappa\lambda}$ derselben sämmtlich von der Ordnung $(n-1)(m-2)$ sind.

Es habe aber die vorhin bezeichnete Function u die Eigenschaft, dass ihre Determinante Δ identisch verschwindet, d. h. für alle Werthe der Variabeln. Diese Annahme wollen wir auch im Folgenden festhalten und untersuchen, welche Folgerungen sich daraus ziehen lassen.

Zunächt bemerke man, dass die beiden aufgestellten Gleichungen in die eine identische Gleichung übergehen:

1. $$0 = \Delta_{\varkappa 1} u_{\lambda 1} + \Delta_{\varkappa 2} u_{\lambda 2} + \cdots + \Delta_{\varkappa n} u_{\lambda n},$$

in welcher der Index λ alle Zahlen $1, 2, \ldots n$, auch $\varkappa$, umfasst. Aus dieser Gleichung entspringt nun ein ganzes System in Rücksicht auf die n partiellen Differentialquotienten $\Delta_{\varkappa 1}, \Delta_{\varkappa 2}, \ldots \Delta_{\varkappa n}$ linearer Gleichungen, wenn man dem Index λ die bezeichneten Werthe zuertheilt, welches dazu dienen kann, die Verhältnisse der genannten n partiellen Differentialquotienten zu bestimmen.

Diese n partiellen Differentialquotienten, für welche der Index $\varkappa$ unveränderlich aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots n$, aber beliebig, gewählt ist, können einen allen gemeinsamen Factor M haben von der Ordnung μ in Rücksicht auf die Variabeln. Haben sie keinen solchen Factor, so ist $M = 1$. Wenn nun M der grösste gemeinsame Factor ist, so können wir setzen:

2. $$\Delta_{\varkappa 1} = a_1 M, \quad \Delta_{\varkappa 2} = a_2 M, \quad \ldots \quad \Delta_{\varkappa n} = a_n M,$$

indem wir $a_1, a_2, \ldots a_n$ ganze homogene Functionen bedeuten lassen sämmtlich von der Ordnung $(n-1)(m-2)-\mu$, welche keinen allen gemeinsamen Factor haben. Hiernach werden alle Functionen $a_1, a_2, \ldots a_n$ Constanten, wenn eine derselben eine Constante ist.

Eine Erwähnung verdient der Fall, dass einer der n Differentialquotienten $\Delta_{\varkappa\lambda}$ identisch verschwindet. In diesem Falle verschwinden sämmtliche Differentialquotienten $\Delta_{\varkappa\lambda}$, auch die, welche nicht unter den genannten Differentialquotienten enthalten sind, welches sich aus dem Vergleich des Systems der Gleichungen (1) mit dem folgenden:

$$0 = \Delta_{\nu 1} u_{\lambda 1} + \Delta_{\nu 2} u_{\lambda 2} + \cdots$$

sogleich ergiebt. Denn da dieses System ebenso zur Werthbestimmung der Verhältnisse von $\Delta_{\nu 1} : \Delta_{\nu 2} \ldots$ dient, als jenes zur Werthbestimmung der Verhältnisse von $\Delta_{\varkappa 1} : \Delta_{\varkappa 2} \ldots$, und beide Systeme abgesehen von der Bezeichnung der Unbekannten auf eines hinauskommen, so folgt hieraus:

$$\Delta_{\varkappa 1} : \Delta_{\varkappa 2} : \ldots : \Delta_{\varkappa\mu} \ldots = \Delta_{\nu 1} : \Delta_{\nu 2} : \ldots : \Delta_{\nu\mu} \ldots,$$

und wenn $\Delta_{\varkappa\mu}$ verschwindet, dass auch $\Delta_{\nu\mu} = \Delta_{\mu\nu}$ verschwindet. Wir haben also den Satz:

> *Wenn die Determinante einer homogenen ganzen Function von n Variabeln identisch verschwindet, und wenn ausserdem der partielle Differentialquotient der Determinante nach einer der Componenten genommen identisch verschwindet, so verschwinden auch die übrigen partiellen Differentialquotienten der Determinante nach den Componenten genommen identisch.*

Es ist dieses der Fall, in welchem die Function u durch lineare Substitutionen neuer Variabeln sich zurückführen lässt auf eine Function, welche *zwei* Variabeln weniger enthält. Dieser Fall verlangt eine besondere Untersuchung. Wir werden ihn daher hier unberücksichtigt lassen, indem wir festsetzen, dass weder M noch eine der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ identisch verschwinde.

Setzt man die Werthe von (2) in (1), so erhält man mit Unterdrückung des Factors M folgende identische Gleichung:

$$3. \qquad 0 = a_1 u_{\lambda 1} + a_2 u_{\lambda 2} + \cdots + a_n u_{\lambda n},$$

welche wieder ein ganzes System identischer Gleichungen repräsentirt, die aus ihr erhalten werden, wenn man dem Index λ die Werthe 1, 2, ... n zuertheilt.

Wenn man diese Gleichung mit x_λ multiplicirt und für λ nach einander die eben genannten Werthe setzt, so erhält man mit Berücksichtigung der identischen Gleichung: $u_{1\mu} x_1 + u_{2\mu} x_2 + \cdots + u_{n\mu} x_n = (m-1) u_\mu$ durch Addition folgende ebenfalls identische Gleichung:

$$4. \qquad 0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n .$$

Durch Differentiation nach x_λ erhält man hieraus mit Berücksichtigung der Gleichung (3):

$$5. \qquad 0 = \frac{\partial a_1}{\partial x_\lambda} u_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_\lambda} u_2 + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_\lambda} u_n .$$

Diese identische Gleichung repräsentirt ein ganzes System von n in Rücksicht auf $u_1, u_2, \ldots u_n$ linearen Gleichungen, da λ alle jene Werthe 1, 2, ... n annehmen kann. Bildet man daher aus den Coëfficienten

$$\begin{matrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \cdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

die Determinante D, so hat man die identische Gleichung

$$6. \qquad D = 0,$$

woraus wiederum, wenn man setzt:

$$\frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu}\right)} = D_{\nu\mu},$$

folgende identische Gleichung hervorgeht:

$$7. \qquad 0 = D_{\mu 1} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_1} + D_{\mu 2} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_2} + \cdots + D_{\mu n} \frac{\partial a_\nu}{\partial x_n},$$

in welcher μ und ν irgend welche Zahlen 1, 2, ... n bedeuten, selbst gleiche.

Durch Differentiation der Gleichung (3) nach x_ν erhält man:

$$0 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_\nu} u_{\lambda 1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_\nu} u_{\lambda 2} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_\nu} u_{\lambda n}\right) + (a_1 u_{\lambda 1 \nu} + a_2 u_{\lambda 2 \nu} + \cdots + a_n u_{\lambda n \nu}),$$

wenn man den dritten Differentialquotienten der Function u nach x_λ, x_μ, x_ν mit $u_{\lambda\mu\nu}$ bezeichnet. Setzt man der Kürze wegen:

$$8. \qquad a_1 u_{\lambda 1 \nu} + a_2 u_{\lambda 2 \nu} + \cdots + a_n u_{\lambda n \nu} = - w_{\lambda \nu},$$

wobei zu bemerken, dass $w_{\lambda\nu} = w_{\nu\lambda}$, so stellt sich die vorhergehende identische Gleichung also dar:

$$9. \qquad \frac{\partial a_1}{\partial x_\nu} u_{\lambda 1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_\nu} u_{\lambda 2} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_\nu} u_{\lambda n} = w_{\lambda \nu}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $D_{\mu\nu}$, setzt für ν nach einander die Zahlen 1, 2, ... n und addirt, so verschwindet nach (7) der linke Theil der Summe aller Gleichungen, und man erhält:

$$10. \qquad 0 = D_{\mu 1} w_{\lambda 1} + D_{\mu 2} w_{\lambda 2} + \cdots + D_{\mu n} w_{\lambda n}.$$

Die aufgestellten Gleichungen dienen nun dazu, nachzuweisen, dass die Functionen a_1, a_2, ... a_n Constanten sind.

Aus jeder von den Gleichungen (7) und (10) geht ein ganzes System linearer Gleichungen hervor, wenn man für μ die Zahlen 1, 2, ... n setzt. Das erste System dient zur Werthbestimmung der Verhältnisse $\frac{\partial a_\nu}{\partial x_1} : \frac{\partial a_\nu}{\partial x_2} \cdots$, das andere zur Werthbestimmung der Verhältnisse $w_{\lambda 1} : w_{\lambda 2} \ldots$. Da aber die Coëfficienten der Unbekannten in diesen beiden Systemen linearer Gleichungen übereinstimmen, so müssen die Differentialquotienten von a_ν den entsprechenden Grössen w proportional sein. Es ist mithin:

$$11. \qquad \varrho \frac{\partial a_\nu}{\partial x_1} = w_{\lambda 1}, \quad \varrho \frac{\partial a_\nu}{\partial x_2} = w_{\lambda 2}, \quad \ldots \quad \varrho \frac{\partial a_\nu}{\partial x_n} = w_{\lambda n}.$$

Es bedeutet hier ϱ einen nicht verschwindenden Factor für den Fall, dass nicht alle w verschwinden. Wenn es also ein λ giebt, für welches nicht alle w verschwinden, und wenn überdies nicht alle Differentialquotienten von a_ν verschwinden, so bestehen jene Gleichungen (11). Das Verschwinden sämmtlicher Differentialquotienten von a_ν werden wir

nicht voraussetzen, weil wir es eben beweisen wollen. Das Verschwinden aller w verlangt eine besondere Untersuchung, die wir nachfolgen lassen werden.

Multiplicirt man die Gleichungen (11) der Reihe nach mit x_1, x_2, $\dots x_n$ und addirt sämmtliche Gleichungen, so erhält man, da a_ν von der Ordnung $(n-1)(m-2)-\mu$,

$$\{(n-1)(m-2)-\mu\}\cdot\varrho\cdot a_\nu = w_{\lambda 1} x_1 + w_{\lambda 2} x_2 + \cdots + w_{\lambda n} x_n.$$

Der rechte Theil dieser Gleichung verschwindet aber, wenn man für die w die Werthe aus (8) setzt, wodurch er übergeht in den rechten, mit $-(m-2)$ multiplicirten Theil der Gleichung (3). Es muss also nothwendiger Weise auch einer der Factoren des linken Theiles verschwinden. Da aber weder ϱ noch a_ν verschwinden, so wird der Grad μ von M

$$\mu = (n-1)(m-2),$$

gleich dem Grade der Functionen $\Delta_{\varkappa\lambda}$ in (2). Mithin werden die Functionen a_1, a_2, $\dots a_n$ Constanten sein.

Wenn zweitens alle w verschwinden, so geht (9) über in:

$$12. \qquad 0 = \frac{\partial a_1}{\partial x_\nu} u_{\lambda 1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_\nu} u_{\lambda 2} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_\nu} u_{\lambda n}.$$

Diese Gleichung, gleich wie die Gleichung (3), repräsentirt ein ganzes System linearer Gleichungen, da λ die Zahlen 1, 2, ... n bedeutet. Aus dem Vergleich der beiden Systeme ergiebt sich nun durch eine schon angewendete Schlussfolge:

$$13. \qquad p\,a_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_\nu}, \quad p\,a_2 = \frac{\partial a_2}{\partial x_\nu}, \quad \dots \quad p\,a_n = \frac{\partial a_n}{\partial x_\nu},$$

wo p eine noch zu bestimmende Function der Variabeln $x_1, \dots x_n$ bedeutet. Durch Integration erhält man:

$$14. \qquad a_1 = e^{\int p\,dx_\nu} . C_1, \quad a_2 = e^{\int p\,dx_\nu} . C_2, \quad \dots \quad a_n = e^{\int p\,dx_\nu} . C_n.$$

Die Constanten der Integration C_1, C_2, $\dots C_n$ sind im Allgemeinen Functionen, welche die eine Variable x_ν nicht enthalten.

Die Functionen $a_1, a_2, \ldots a_n$ haben hiernach den gemeinsamen Factor $e^{\int p\,dx_\nu}$. Da sie aber der Annahme nach keinen solchen Factor haben, so muss $p = 0$ sein. Mithin verschwinden nach (13) die Differentialquotienten der genannten Functionen nach x_ν genommen, und da ν eine beliebige von den Zahlen $1, 2, \ldots n$ ist, so verschwinden auch die Differentialquotienten der Functionen $a_1, a_2, \ldots a_n$ nach irgend einer der Variabeln genommen. Sie sind mithin Constanten. Mit Rücksicht auf (4) hat man daher den Lehrsatz:

Wenn die Determinante einer homogenen ganzen Function von n Variabeln identisch verschwindet, so giebt es immer n Constanten, mit welchen die ersten partiellen Differentialquotienten der Function zu multipliciren sind, damit die Summe dieser Producte identisch verschwinde.

Wie die n Constanten bestimmt werden können, lehren die Gleichungen (2).

Ich behaupte nun, dass durch die Substitutionen:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + \lambda a_1, \\ x_2 &= z_2 + \lambda a_2, \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= z_n + \lambda a_n, \end{aligned}$$

wo $z_1, z_2, \ldots z_n$ beliebige lineare Functionen der $(n-1)$ neuen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ von der Form $z_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + \cdots + a_{n-1}^\varkappa y_{n-1}$ sind, und λ die $n$te neue Variable, aus der Function u die letzte Variable ganz verschwindet. In der That: macht man in der Function u die angegebenen Substitutionen, so erhält man durch Entwicklung nach Potenzen von λ:

$$u = w + \lambda w' + \frac{\lambda^2}{1.2} w'' + \cdots + \frac{\lambda^m}{1.2\ldots m} w^{(m)}.$$

In dieser Entwicklung bedeuten w und w' die Ausdrücke, in welche u und $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$ übergehen, wenn man in denselben $z_1, z_2, \ldots z_n$ statt $x_1, x_2, \ldots x_n$ setzt. Ferner ist:

$$w'' = \frac{\partial w'}{\partial z_1} a_1 + \frac{\partial w'}{\partial z_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial w'}{\partial z_n} a_n,$$

. . . .

$$w^{(m)} = \frac{\partial w^{(m-1)}}{\partial z_1} a_1 + \frac{\partial w^{(m-1)}}{\partial z_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial w^{(m-1)}}{\partial z_n} a_n.$$

Da aber der Ausdruck $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$ identisch verschwindet, so verschwindet auch w' identisch für alle Werthe von z_1, $z_2, \ldots z_n$. Verschwindet aber w' identisch, so verschwinden auch die partiellen Differentialquotienten dieser Function nach $z_1, z_2, \ldots z_n$ genommen identisch; mithin auch w'' etc. Es verschwinden alle Functionen $w', w'', \ldots w^{(m)}$, und die obige Entwicklung giebt:

$$u = w,$$

einen Ausdruck für u, welcher die $n$te neue Variable λ nicht mehr enthält.

Heidelberg, im December 1858.

31.

Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Functionen des zweiten Grades in andere transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 57, Seite 175 — 182.]

Durch eine Reihe sehr scharfsinniger Schlüsse ist es Kummer gelungen, den analytischen Ausdruck, welcher das Quadrat des Productes der Differenzen der Wurzeln der cubischen Gleichung darstellt, von welcher das Problem der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung abhängt, in die Summe von Quadraten zu zerlegen (Bd. 26, p. 268 des Crelle'schen Journals). Zu demselben Resultat und zugleich zu einer Ausdehnung desselben im Falle der Gleichung $n$ten Grades, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten findet, gelangt Borchardt durch eine sehr geschickte Behandlung der Determinanten (Bd. 30, p. 38), nachdem Jacobi im *Giornale Arcadico,* Tom. 99 durch ein System bis dahin noch ganz unbekannter Formeln das Kummer'sche Resultat hergeleitet hatte (Bd. 30, p. 46). Ein besonderes Gewicht ist zu legen auf die Formel, welche aus Jacobi's letzter hervorgeht, indem man die von ihm angegebenen Werthe derjenigen Grössen substituirt, aus welchen sie besteht. Dadurch erhält man die Einheit ausgedrückt durch eine Summe von Quadraten von Functionen der Coëfficienten in den Substitutionen, welche allein zur Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem dienen. Diese Formel erfreut sich einer gewissen Analogie mit der Kummer'schen, und die eine geht mit Hülfe der Jacobi'schen Formeln in die andere über. Die kunstlose Entwickelung dieser Jacobi'schen Formeln mit ihren Erweiterungen zur Verificirung der Borchardt'schen Entdeckung ist der Zweck dieser Note.

Wenn die n Variabeln $X_1, X_2, \ldots X_n$ mit den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die n linearen Gleichungen:

1. $$X_\varkappa = a_1^{(\varkappa)} x_1 + a_2^{(\varkappa)} x_2 + \cdots + a_n^{(\varkappa)} x_n,$$

in welchen $\varkappa$ die Bedeutung der Zahlen 1, 2, ... n hat, verbunden sind; und wenn diese Substitutionen die Summe der Quadrate der ersten Variabeln X transformiren in die Summe der Quadrate der anderen Variabeln x, so hat man bekanntlich:

2. $$x_\varkappa = a'_\varkappa X_1 + a''_\varkappa X_2 + \cdots + a_\varkappa^{(n)} X_n.$$

Entwickelt man unter dieser Voraussetzung das Product sämmtlicher Variabeln der ersten Gattung nach Potenzen und Producten der anderen Variabeln, so erhält man eine Gleichung von der Form:

3. $$X_1 X_2 \ldots X_n = \Sigma A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} . x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

in welcher Gleichung die Coëfficienten A ganze rationale Functionen der Coëfficienten a der Substitutionen bedeuten, und die Exponenten α irgend welche von den Zahlen 0, 1, ... n unter der Beschränkung, dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = n.$$

Setzt man in dem Product $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ für die Variabeln x die Werthe (2) und entwickelt nach Potenzen und Producten der Variabeln X, so wird der Coëfficient des Productes $X_1 X_2 \ldots X_n$, abgesehen von einem Zahlencoëfficienten, gleich $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$. Bezeichnet man demnach diesen Zahlencoëfficienten mit $C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ und entwickelt den ganzen zweiten Theil der Gleichung (3) nach Potenzen und Producten der Variabeln X, so folgt aus dem Vergleich des Coëfficienten von $X_1 X_2 \ldots X_n$ des rechten und linken Theiles der genannten Gleichung die merkwürdige Relation:

4. $$1 = \Sigma C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} . A^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}.$$

Die angegebenen Bedingungen, unter welchen diese Relation besteht, fasse ich zusammen in dem

Lehrsatz:

Wenn die Substitutionen (1) *die Summe der Quadrate der Variabeln* X *in die Summe der Quadrate der Variabeln* x *transformiren, und wenn* (3) *die Entwickelung des Products sämmtlicher*

Variabeln X nach Potenzen und Producten der Variabeln x darstellt, so findet zwischen den Coëfficienten A dieser Entwickelung die Gleichung (4) *statt.*

Die Substitutionen (1) oder die umgekehrten (2) haben die Eigenschaft, die Gleichung

$$5. \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

zu einer identischen zu machen. Es werde aber zweitens im Folgenden vorausgesetzt, dass sie überdies eine gegebene rationale homogene Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ des zweiten Grades der Variabeln x transformiren in die Form:

$$6. \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1 X_1^2 + g_2 X_2^2 + \cdots + g_n X_n^2.$$

Unter diesen Voraussetzungen sind die n Grössen g als die n Wurzeln der bekannten Gleichung $\Gamma = 0$ gegeben, welche als das Resultat der Elimination der Variabeln aus folgenden linearen Gleichungen hervorgeht:

$$\tfrac{1}{2} f'(x_1) - g x_1 = 0, \quad \tfrac{1}{2} f'(x_2) - g x_2 = 0, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2} f'(x_n) - g x_n = 0.$$

Denkt man sich nun diese Wurzelwerthe g eingesetzt in die Gleichung (6), so wird dieselbe durch die Substitutionen (1) eine identische, welche sich demnach auch nach einer der darin vorkommenden Variabeln $x_\varkappa$ differentiiren lässt. Durch diese Differentiation und Division durch 2 erhält man:

$$7. \qquad \tfrac{1}{2} f'(x_\varkappa) = a' \, g_1 X_1 + a''_\varkappa g_2 X_2 + \cdots + a_\varkappa^{(n)} g_n X_n,$$

eine Gleichung, welche ein ganzes System von n Gleichungen repräsentirt, gleich wie die Gleichung (2), da $\varkappa$ die Werthe annimmt 1, 2, ... n. Aus dem Vergleich dieser beiden Systeme von Gleichungen ergiebt sich nun, dass es erlaubt ist, sämmtliche variabeln Grössen X_λ zu verändern in die entsprechenden $g_\lambda X_\lambda$, wenn man gleichzeitig alle Variabeln $x_\varkappa$ verändert in $\frac{1}{2} f'(x_\varkappa)$. Denn das eine System (2) geht in das andere (7) dadurch über. Aber nicht allein in den Substitutionen (1) und (2) sind diese Aenderungen erlaubt, sondern auch in den Gleichungen (5) und (6), welchen der Annahme nach die Substitutionen genügen, oder welche, um mich anders auszudrücken, eine Folge sind der definirten Substitutionen. Durch diese erlaubten Aenderungen leitet Jacobi aus den Gleichungen (5) und (6) folgende her:

$$\left(\tfrac{1}{2} f'(x_1)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2} f'(x_2)\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2} f'(x_n)\right)^2 = g_1^2 X_1^2 + g_2^2 X_2^2 + \cdots + g_n^2 X_n^2,$$
$$f\left(\tfrac{1}{2} f'(x_1), \tfrac{1}{2} f'(x_2), \ldots \tfrac{1}{2} f'(x_n)\right) = g_1^3 X_1^2 + g_2^3 X_2^2 + \cdots + g_n^3 X_n^2,$$

welche, wenn man der Kürze wegen setzt:

8. $$f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = (\tfrac{1}{2}f'(x_1))^2 + (\tfrac{1}{2}f'(x_2))^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2}f'(x_n))^2,$$

9. $$f_3(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(\tfrac{1}{2}f'(x_1), \tfrac{1}{2}f'(x_2), \ldots \tfrac{1}{2}f'(x_n)),$$

übergehen in:

10. $$f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1^2 X_1^2 + g_2^2 X_2^2 + \cdots + g_n^2 X_n^2,$$

11. $$f_3(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1^3 X_1^2 + g_2^3 X_2^2 + \cdots + g_n^3 X_n^2.$$

Auch diese Gleichungen lassen sich als eine Folge der definirten Substitutionen betrachten, in denen ebenfalls die genannten Aenderungen erlaubt sind. Macht man auch in ihnen und in ihren abgeleiteten die genannten Aenderungen, so gelangt man nach Jacobi (Bd. 12, p. 12) schliesslich zu einer Gleichung:

12. $$f_p(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1^p X_1^2 + g_2^p X_2^2 + \cdots + g_n^p X_n^2,$$

in welcher p irgend eine ganze positive gerade oder ungerade Zahl bedeutet, und $f_p(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Function des zweiten Grades der Variabeln x, deren Coëfficienten als ganze rationale Functionen componirt sind aus den Coëfficienten in der ursprünglichen Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Differentiirt man diese durch die Substitutionen identische Gleichung partiell nach $x_\varkappa$ und dividirt durch 2, so erhält man:

13. $$\tfrac{1}{2}f'_p(x_\varkappa) = a'_\varkappa g_1^p X_1 + a''_\varkappa g_2^p X_2 + \cdots + a^{(n)}_\varkappa g_n^p X_n.$$

Man bilde nun aus den im Vorhergehenden definirten Functionen die Determinante:

14. $$\varDelta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \tfrac{1}{2}f'(x_1) & \tfrac{1}{2}f'(x_2) & \ldots & \tfrac{1}{2}f'(x_n) \\ \tfrac{1}{2}f'_2(x_1) & \tfrac{1}{2}f'_2(x_2) & \ldots & \tfrac{1}{2}f'_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tfrac{1}{2}f'_{n-1}(x_1) & \tfrac{1}{2}f'_{n-1}(x_2) & \ldots & \tfrac{1}{2}f'_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

Sie ist eine homogene ganze rationale Function des $n$ten Grades der in ihr enthaltenen Variabeln. Sie ist auch eine ganze rationale Function vom Grade $n\frac{(n-1)}{2}$ in Rücksicht auf die Coëfficienten in der gegebenen Function. Ausser diesen Grössen enthält sie keine, die der Veränderung unterworfen werden können.

Setzt man in dieser Determinante für die erste Horizontalreihe der Componenten die Werthe (2), für die zweite die Werthe (7) und für die

folgenden die Werthe (13), so sieht man sogleich, dass dieselbe in das Product zweier Determinanten zerfällt. Der eine Factor ist:

$$\Sigma \pm a'_1 a''_2 \ldots a^{(n)}_n = \pm 1.$$

Von der Gültigkeit dieser bekannten Gleichung überzeugt man sich leicht dadurch, dass man die Determinante, welche den linken Theil der Gleichung bildet, mit ihr selber multiplicirt und aus dem Product eine neue Determinante bildet, deren Werth gleich $+1$ wird. Was den zweiten Factor anbetrifft:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ g_1 X_1 & g_2 X_2 & \ldots & g_n X_n \\ g_1^2 X_1 & g_2^2 X_2 & \ldots & g_n^2 X_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_1^{n-1} X_1 & g_2^{n-1} X_2 & \ldots & g_n^{n-1} X_n \end{vmatrix},$$

so zerfällt dieser wieder in das Product sämmtlicher X und einer Determinante, welche, wie bekannt, gleich ist dem Product G der Differenzen sämmtlicher g. Setzt man daher:

15. $$G = (g_1 - g_2)(g_1 - g_3) \ldots (g_{n-1} - g_n),$$

so hat man folgenden

Lehrsatz:

Wenn die Substitutionen

$$x_\varkappa = a'_\varkappa X_1 + a''_\varkappa X_2 + \cdots + a^{(n)}_\varkappa X_n$$

die Summe der Quadrate

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

transformiren in

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

und ausserdem die beliebig gegebene homogene Function des zweiten Grades $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *in*

$$g_1 X_1^2 + g_2 X_2^2 + \cdots + g_n X_n^2;$$

so transformiren dieselben Substitutionen auch die in (14) *definirte Function* Δ *des* n*ten Grades in*

$$\pm G . X_1 . X_2 \ldots X_n\,^{1)}.$$

1) Die Priorität dieses Satzes für $n = 3$ kommt Weierstrass zu.

Man hat hiernach das Product sämmtlicher Variabeln X in folgender zweiten Darstellung:

16. $$X_1 X_2 \ldots X_n = \pm \frac{1}{G} \cdot \varDelta.$$

Entwickelt man aber die Function $\varDelta$ nach Potenzen und Producten der Variabeln x, indem man setzt:

17. $$\varDelta = \Sigma B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

so haben in dieser Entwickelung die Coëfficienten B die Bedeutung von ganzen rationalen Functionen, die sich allein aus den Coëfficienten der gegebenen Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zusammensetzen.

Aus dem Vergleich dieser Gleichung (16) mit (3) ergeben sich nun die erweiterten Jacobi'schen Formeln:

18. $$A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \pm \frac{1}{G} B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n},$$

welche besagen, dass gewissse ganze rationale Functionen der Coëfficienten in den Substitutionen, welche (5) und (6) identisch genügen, multiplicirt mit dem in (15) definirten G, sich darstellen lassen als ganze rationale Functionen der Coëfficienten in der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Setzt man endlich diese Werthe von A in die Gleichung (4), so erhält man das Borchardt'sche Resultat:

19. $$G^2 = \Sigma C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot B^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$$

in einer allerdings etwas anderen Form.

Der erste oben angegebene Lehrsatz lässt sich noch erweitern in der Voraussetzung, dass die linearen Substitutionen einer weniger beschränkten Bedingung unterworfen sind. Indem ich auf diese Erweiterung näher eingehe, beabsichtige ich zugleich, die Werthbestimmung des Zahlencoëfficienten C in der vorhergegangenen Untersuchung hier wieder aufzunehmen und einen möglichen Anstoss in der Entwickelung des genannten Lehrsatzes nachträglich zu beseitigen.

Es liege irgend ein System linearer Gleichungen vor von der Form:

20. $$X_\varkappa = a_1^{(\varkappa)} x_1 + a_2^{(\varkappa)} x_2 + \cdots + a_n^{(\varkappa)} x_n.$$

Durch Auflösung dieses Systems nach den Variabeln x erhält man ein System von Gleichungen von der Form:

21. $$x_\varkappa = e'_\varkappa X_1 + e''_\varkappa X_2 + \cdots + e^{(n)}_\varkappa X_n.$$

Bildet man mit Berücksichtigung dieser neuen Coëfficienten e das System linearer Gleichungen:

22. $$Y_\varkappa = e^{(\varkappa)}_1 y_1 + e^{(\varkappa)}_2 y_2 + \cdots + e^{(\varkappa)}_n y_n,$$

so weiss man nicht allein, dass die Auflösungen dieser Gleichungen nach den Variabeln y folgende sind:

23. $$y_\varkappa = a'_\varkappa Y_1 + a''_\varkappa Y_2 + \cdots + a^{(n)}_\varkappa Y_n,$$

sondern dass die Substitutionen (20) bis (23) auch die Gleichung

24. $$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

zu einer identischen machen.

Diese Gleichung bleibt auch eine durch die genannten Substitutionen identische, wenn man sowohl ihren rechten als ihren linken Theil zur $n$ten Potenz erhebt. Dadurch erhält man mit Anwendung des polynomischen Lehrsatzes und Unterdrückung des gleichen Factors $\Pi(n) = 1.2\ldots n$ auf beiden Seiten der Gleichung:

25. $$\begin{aligned} &\Sigma \frac{1}{C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \ldots Y_n^{\alpha_n} \\ = &\Sigma \frac{1}{C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n}, \end{aligned}$$

wo:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = n$$

und:

26. $$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \Pi(\alpha_1)\,\Pi(\alpha_2) \ldots \Pi(\alpha_n).$$

Bezeichnet man nun in der Entwickelung des Products $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n}$ nach den Variabeln Y den Coëfficienten von $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ mit

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} . A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$$

und ebenso in der Entwickelung des Products $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ nach den Variabeln X den Coëfficienten von $X_1 X_2 \ldots X_n$ mit

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} . E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n},$$

so erhält man aus (25), wenn man diese Gleichung nach den Variabeln Y

entwickelt und in der Entwickelung die Coëfficienten des Products $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzt:

27. $$X_1 X_2 \ldots X_n = \Sigma A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Auf gleiche Weise erhält man aus derselben Gleichung durch Entwickelung nach den Variabeln X:

28. $$Y_1 Y_2 \ldots Y_n = \Sigma E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n}.$$

Hiernach ist es erlaubt, die angegebenen Definitionen der Grössen A und E aufzugeben und sie statt dessen als die Entwickelungscoëfficienten der Producte (27) und (28) aufzufassen; wobei zu bemerken ist, dass die Grössen E ganz dieselben Functionen der Substitutionscoëfficienten e, wie die Grössen A von a sind. Behält man aber die erste Definition der Grössen A und E bei und entwickelt die Gleichung (25) nach Potenzen und Producten der Variabeln X und Y, so erhält man durch Gleichstellung der Coëfficienten des Productes $X_1 X_2 \ldots X_n Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ auf beiden Seiten der Gleichung:

29. $$1 = \Sigma C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}.$$

Dieses Resultat fasse ich zusammen wie folgt:

Lehrsatz.

Wenn die in (20) *bis* (23) *gebildeten linearen Substitutionen die Producte der Variabeln X und die Producte der Variabeln Y transformiren in* (27) *und* (28), *so findet unter der Voraussetzung von* (26) *zwischen den Coëfficienten in diesen Transformationen die Gleichung* (29) *statt.*

Da die Grössen E in die entsprechenden A übergehen, wenn die Substitutionscoëfficienten e mit den entsprechenden a gleich werden, wodurch auch die Substitutionen (20) bis (23) mit (1) und (2) zusammenfallen, so geht auch (29) in (4) über. Der erste Lehrsatz ergiebt sich hiernach als ein Corollar dieses letzten.

Heidelberg, im October 1859.

32.

Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes in die Summe von Quadraten.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 60, Seite 305—312.]

Die Bestimmung der Hauptaxen eines durch seine Gleichung in der Ebene gegebenen Kegelschnittes hängt von einer quadratischen Gleichung ab. Das Quadrat der Differenz der Wurzeln der Gleichung, ausgedrückt durch die Coëfficienten in der gegebenen Kegelschnittsgleichung, lässt sich bekanntlich in die Summe von zwei Quadraten zerlegen, die einzeln verschwinden, wenn der Kegelschnitt ein Kreis wird. Ist der Kegelschnitt im Raume gegeben als der Schnitt einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung und einer gegebenen Ebene, so wird der Ausdruck für das Quadrat der Differenz der Wurzeln der quadratischen Gleichung, welche die Hauptaxen des Kegelschnittes bestimmt, so complicirt, dass eine directe Zerlegung des Ausdruckes in die Summe von Quadraten unausführbar wird. Eine Zerlegung jenes Ausdruckes in die Summe von zwei Quadraten ist vielleicht ganz unmöglich. Aber sie ist möglich und ausführbar, wenn man statt zwei Quadrate 10, 7, 6 oder 5 gelten lässt. Diese Zerlegung bildet den Gegenstand der folgenden Auseinandersetzung.

Das Problem der Hauptaxen eines Kegelschnittes, der als der Schnitt einer Oberfläche zweiter Ordnung $f(x, y, z) = 0$ und einer Ebene $ax + by + cz - d = 0$ gegeben ist, lässt sich, wenn man annimmt, dass

1. $\varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy$

die Summe der Glieder zweiter Ordnung in der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sei, und dass zwischen den Coëfficienten a, b, c in der Gleichung der Ebene die Relation bestehe:

$$2. \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

rein algebraisch so auffassen[1]):

Die Substitutionen zu bestimmen:

$$3. \qquad \begin{cases} x = aX + a'Y + a''Z, \\ y = bX + b'Y + b''Z, \\ z = cX + c'Y + c''Z, \end{cases}$$

welche die Gleichungen

$$4. \qquad x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$5. \qquad \varphi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2 - 2\mu' YX - 2\mu'' ZX$$

zu identischen Gleichungen machen.

Es führt dieses Problem auf die in λ quadratische Gleichung:

$$6. \qquad \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda & a_{01} & a_{02} & a \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & a_{12} & b \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} - \lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ [2]}),$$

deren Wurzeln eben jene Coëfficienten λ_1 und λ_2 von Y^2 und Z^2 in (5) sind.

Dieses vorausgesetzt, handelt es sich nun darum, das Quadrat der Differenz $(\lambda_2 - \lambda_1)$ durch die Coëfficienten in der gegebenen Function $\varphi(x, y, z)$ und durch die gegebenen Coëfficienten a, b, c in der Gleichung der Ebene auszudrücken und diesen Ausdruck als die Summe von Quadraten darzustellen.

Zu diesem Zwecke differentiiren wir die durch die Substitutionen (3) identischen Gleichungen (4) und (5) partiell nach X, wodurch wir erhalten:

$$7. \qquad ax + by + cz = X,$$

$$8. \qquad \tfrac{1}{2}\varphi'(a) \,.\, x + \tfrac{1}{2}\varphi'(b) \,.\, y + \tfrac{1}{2}\varphi'(c) \,.\, z = \lambda_0 X - \mu' Y - \mu'' Z.$$

1) Siehe Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes von O. Hesse, 1861, p. 329.
2) L. c. p. 331.

Wir bringen ferner einen Determinantensatz, Crelle's Journal Bd. 22, p. 341, in Erinnerung, dem wir folgende Fassung geben:

Wenn n gegebene Functionen von eben so vielen Variabeln durch irgend welche Substitutionen von einer gleichen Zahl neuer Variabeln transformirt werden, so ist das Product der Determinante der gegebenen Functionen und der Determinante der Substitutionen gleich der Determinante der transformirten Functionen.

In dem vorliegenden Falle der Substitutionen (3), welche die Gleichung (4) zu einer identischen Gleichung machen, ist die Determinante der Substitution gleich $+1$ oder gleich -1. Wir können aber annehmen, sie sei gleich $+1$. Denn im entgegengesetzten Falle braucht man nur die Vorzeichen sämmtlicher Substitutionscoëfficienten in die entgegengesetzten zu verändern. Man hat daher den Satz:

Wenn drei gegebene Functionen der Variabeln x, y, z durch die Substitutionen (3), *welche die Gleichung* (4) *zu einer identischen Gleichung machen, transformirt werden, so ist die Determinante der gegebenen Functionen gleich der Determinante der transformirten Functionen.*

Nach diesem Satze wird die durch 4 dividirte Determinante $\triangle$ der drei Functionen (7), (4), (5):

$$9. \qquad \triangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ \frac{1}{2}\varphi'(x) & \frac{1}{2}\varphi'(y) & \frac{1}{2}\varphi'(z) \end{vmatrix}$$

oder:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ \lambda_0 X - \mu' Y - \mu'' Z & \lambda_1 Y - \mu' X & \lambda_2 Z - \mu'' X \end{vmatrix}$$

und entwickelt:

$$10. \qquad \triangle = (\lambda_2 - \lambda_1) YZ + (\mu' Z - \mu'' Y) X.$$

Ebenso wird die durch 2 dividirte Determinante der drei Functionen (7), (4), (8):

$$11. \qquad \nabla = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ \frac{1}{2}\varphi'(a) & \frac{1}{2}\varphi'(b) & \frac{1}{2}\varphi'(c) \end{vmatrix}$$

oder:

$$\bigtriangledown = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ \lambda_0 & -\mu' & -\mu'' \end{vmatrix}$$

und entwickelt:

12. $$\bigtriangledown = \mu' Z - \mu'' Y.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit X und zieht sie von (10) ab, so erhält man:

13. $$\bigtriangleup - \bigtriangledown X = (\lambda_2 - \lambda_1) YZ,$$

eine Gleichung, welche auf ihrer rechten Seite nur das Product der Variabeln YZ mit dem Factor $\lambda_2 - \lambda_1$ enthält, während die linke Seite eine durch (9), (11) und (7) gegebene Function der Variabeln x, y, z ist.

Diese Gleichung, gleich wie die folgende, welche durch Multiplication mit X aus ihr hervorgeht:

14. $$\bigtriangleup X - \bigtriangledown X^2 = (\lambda_2 - \lambda_1) XYZ,$$

ist eine durch die Substitutionen (3) des Problems identische Gleichung.

Die Differentiation der durch die Substitutionen (3) identischen Gleichung (4) nach X, Y, Z, oder die Auflösung der Substitutionen, welche die Gleichung (4) zu einer identischen machen, giebt:

15. $$\begin{cases} X = ax + by + cz, \\ Y = a'x + b'y + c'z, \\ Z = a''x + b''y + c''z. \end{cases}$$

Wenn wir das Product dieser aufgelösten Substitutionen, welche die Gleichung (4) zu einer identischen machen, entwickeln wie folgt:

16. $$XYZ = \Sigma A_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

so haben wir zwischen den Entwickelungscoëfficienten die Gleichungen:

17. $$\begin{cases} 1 = 6\{A^2_{300} + A^2_{030} + A^2_{003}\} + A^2_{111} \\ \quad + 2\{A^2_{120} + A^2_{102} + A^2_{012} + A^2_{210} + A^2_{201} + A^2_{021}\} \end{cases}$$ [1]),

18. $$\begin{cases} 1 = 15\{A^2_{300} + A^2_{030} + A^2_{003}\} + A^2_{111} \\ \quad + (A_{120} - A_{102})^2 + (A_{012} - A_{210})^2 + (A_{201} - A_{021})^2 \end{cases}$$ [2]).

---

1) L. c. p. 216.
2) L. c. p. 217.

Entwickeln wir aber auch den linken Theil der Gleichung (14), der eine rationale Function ist der Coëfficienten in dem Ausdrucke $\varphi(x, y, z)$ und der Coëfficienten a, b, c, indem wir setzen:

19. $$\triangle X - \nabla X^2 = \Sigma a_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

so ergiebt sich durch Substitution von (16) und (19) in (14) und Vergleichung der beiden Seiten der letzten Gleichung:

20. $$A_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} = \frac{a_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Substituirt man diese Werthe in (17) und (18), so erhält man die gesuchte Zerlegung des Quadrates der Differenz $\lambda_2 - \lambda_1$ in die Summe von zehn Quadraten:

21. $$\begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 = 6\{a_{300}^2 + a_{030}^2 + a_{003}^2\} + a_{111}^2 \\ \qquad + 2\{a_{120}^2 + a_{102}^2 + a_{012}^2 + a_{210}^2 + a_{201}^2 + a_{021}^2\} \end{cases}$$

und in die Summe von sieben Quadraten:

22. $$\begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 = 15\{a_{300}^2 + a_{030}^2 + a_{003}^2\} + a_{111}^2 \\ \qquad + (a_{120} - a_{102})^2 + (a_{012} - a_{210})^2 + (a_{201} - a_{021})^2. \end{cases}$$

Um die dritte Zerlegung des Quadrates der Differenz in die Summe von sechs oder fünf Quadraten vorzubereiten, werden wir die Gleichung (17) aus einem neuen Gesichtspunkte beweisen[1]) und daraus eine zweite, dem Zwecke dienliche, analoge Gleichung entwickeln.

Die Transformation einer gegebenen homogenen Function:

23. $$\Sigma E_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$$

der drei Variabeln X, Y, Z von der $m$ten Ordnung, also in der Voraussetzung $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = m$, durch irgend welche lineare Substitutionen (3) lässt sich ausführen wie die Transformation einer linearen homogenen Function durch ebenfalls lineare Substitutionen, deren Anzahl aber gleich ist der Zahl p der Fälle, in welchen $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = m$ ist.

Um letztere darzustellen, bilden wir das Product $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$ durch die Substitutionen (3):

---

1) Der Beweis ist aus einer brieflichen Mittheilung des Prof. Clebsch genommen.

24. $$X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2} = \Sigma d^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}_{\beta_0 \beta_1 \beta_2} x^{\beta_0} y^{\beta_1} z^{\beta_2},$$

indem wir mit β_0, β_1, β_2 in der Summe alle Zahlen 0, 1, ... m bezeichnen, deren Summe gleich m ist.

Diese Gleichung (24) stellt ein ganzes System von p Gleichungen dar, da in ihr α_0, α_1, α_2 irgend welche Zahlen 0, 1, ... m bedeuten, deren Summe gleich m ist. Dieses System (24) von p Gleichungen ist ein lineares, wenn man in ihm die p Producte $x^{\beta_0} y^{\beta_1} z^{\beta_2}$ als die Unbekannten und die p Producte $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$ als irgend welche gegebene Grössen betrachtet; und die Zahl der Gleichungen ist gerade gleich der Zahl der Unbekannten.

Betrachtet man daher die p Producte $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$ als von einander unabhängige Variable und die p Producte $x^{\beta_0} y^{\beta_1} z^{\beta_2}$ ebenfalls als von einander unabhängige Variable, so stellt das System von Gleichungen (24) lineare Substitutionen dar, deren Anzahl gleich p ist.

Multiplicirt man nun die Gleichung (24) mit $E_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ und nimmt die Summe aller p Gleichungen, so erhält man, wenn man den rechten Theil der Gleichung nach den unabhängigen Variabeln $x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$ ordnet, eine Gleichung von der Form:

25. $$\Sigma E_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2} = \Sigma e_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

nämlich die Transformation der gegebenen Function (23) der $m$ten Ordnung durch die Substitutionen (3).

Da diese Gleichung eine Folge ist der p linearen Substitutionen (24), so wird man in ihr für die p Variabeln $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$ irgend welche Werthe $B_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ setzen können, wenn man gleichzeitig für die p anderen Variablen $x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$ diejenigen Werthe $b_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ setzt, welche ihnen durch die p linearen Substitutionen (24) entsprechen. Man wird dadurch aus (25) immer eine richtige Gleichung erhalten. Wir drücken diese Bemerkungen als Satz aus wie folgt:

Wenn die linearen Substitutionen (3) *die Gleichung* (25) *zu einer identischen Gleichung machen, so ist es erlaubt, in ihr statt der Producte $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$ irgend welche Werthe $B_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ zu setzen, wenn man gleichzeitig für $x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$ diejenigen Werthe $b_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ setzt, welche jenen in dem linearen Systeme* (24) *von p Gleichungen entsprechen.*

Wir werden fortan annehmen, dass die Substitutionen (3) orthogonale seien, welche also die Gleichung (4) zu einer identischen machen. Alsdann sind auch folgende Substitutionen orthogonale:

$$26. \quad \begin{cases} X_1 = a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ Y_1 = a' x_1 + b' y_1 + c' z_1, \\ Z_1 = a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1, \end{cases}$$

und man hat die durch die orthogonalen Substitutionen (3) und (26) identische Gleichung:

$$27. \quad X X_1 + Y Y_1 + Z Z_1 = x x_1 + y y_1 + z z_1,$$

gleich wie die folgende:

$$28. \quad (X X_1 + Y Y_1 + Z Z_1)^m = (x x_1 + y y_1 + z z_1)^m.$$

Entwickeln wir diese Gleichung nach dem polynomischen Lehrsatze, indem wir setzen:

$$29. \quad \begin{cases} \Pi(m) = 1 . 2 \ldots m, \\ C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} = \Pi(\alpha_0) . \Pi(\alpha_1) . \Pi(\alpha_2), \end{cases}$$

und lassen den allen Gliedern der Entwickelung gemeinsamen Factor $\Pi(m)$ fort, so erhalten wir:

$$30. \quad \Sigma \frac{1}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}} X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2} . X_1^{\alpha_0} Y_1^{\alpha_1} Z_1^{\alpha_2} = \Sigma \frac{1}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} . x_1^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} z_1^{\alpha_2}.$$

Denken wir uns in dieser Gleichung für X_1, Y_1, Z_1 die Werthe (26) gesetzt, so wird sie, wie (25), eine durch die Substitutionen (3) identische Gleichung und erfüllt die Bedingungen des angegebenen Satzes. Man hat daher:

$$31. \quad \Sigma \frac{B_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}} X_1^{\alpha_0} Y_1^{\alpha_1} Z_1^{\alpha_2} = \Sigma \frac{b_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}} x_1^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} z_1^{\alpha_2}.$$

Es ist dieses wieder eine durch die Substitutionen (26) identische Gleichung, in welcher die Coëfficienten $b_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ durch die Coëfficienten $B_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ bedingt sind. Die ersteren $b_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ kann man daher durch die anderen $B_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ entweder durch die Entwickelung von (31) bestimmen oder durch Auflösung der linearen Gleichungen (24). Hiernach hat man den Satz:

Wenn eine gegebene homogene Function:

$$\Sigma \frac{B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} X_1^{\alpha_0} Y_1^{\alpha_1} Z_1^{\alpha_2}$$

der mten Ordnung durch die orthogonalen Substitutionen (26) *transformirt wird in:*

$$\Sigma \frac{b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} x_1^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} z_1^{\alpha_2},$$

so genügen die Werthe $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2} = B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ *und* $x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ *den p linearen Gleichungen* (24).

Die Gleichung (31) erfüllt durch die Substitutionen (26) die Bedingungen des ersten Satzes. Wendet man diesen Satz auf die genannte Gleichung an, so ergiebt sich daraus folgender Satz:

Wenn die orthogonalen Substitutionen (26) *die Gleichung* (31), *in welcher der linke Theil irgend eine gegebene homogene Function der mten Ordnung ist, zu einer identischen machen, so hat man:*

$$32. \qquad \Sigma \frac{B^2_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} = \Sigma \frac{b^2_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}.$$

Wir werden zwei specielle Fälle hervorheben. Wir werden erstens annehmen, dass $m = 3$ sei und dass alle $B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = 0$ seien mit Ausnahme des einen $B_{111} = 1$. Unter dieser Annahme wird die Gleichung (31):

$$33. \qquad XYZ = \Sigma \frac{b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

und man hat nach dem letzten Satze:

$$34. \qquad 1 = \Sigma \frac{b^2_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}.$$

Setzen wir aber, um von unserer früheren Bezeichnung Gebrauch zu machen:

$$35. \qquad b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} A_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2},$$

indem wir die durch die Substitutionen (3) identische Gleichung (33) also darstellen:

36. $$XYZ = \Sigma A_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

so geht die Gleichung (34) über in:

37. $$1 = \Sigma C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} A^2_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2},$$

woraus durch Entwickelung die Gleichung (17) hervorgeht.

Wenn wir zweitens $m = 2$ setzen und alle $B_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}$ verschwinden lassen mit Ausnahme von B_{011}, welches gleich 1 sei, so erhalten wir aus (31):

38. $$YZ = \Sigma \frac{b_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$$

und hieraus nach dem letzten Satze:

39. $$1 = \Sigma \frac{b^2_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}}{C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}}.$$

Setzen wir endlich, um dieselbe Bezeichnung zu gebrauchen:

40. $$b_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} = C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} A_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2},$$

so gehen (38) und (39) über in:

41. $$YZ = \Sigma A_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

42. $$1 = \Sigma C_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} A^2_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2},$$

von welchen Gleichungen die letzte entwickelt giebt:

43. $$1 = 2(A^2_{200} + A^2_{020} + A^2_{002}) + A^2_{011} + A^2_{101} + A^2_{110}.$$

Zwischen den Substitutions-Coëfficienten hat man die Gleichung: $a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$, welche nach der eingeführten Bezeichnung sich so darstellt:

$$A_{200} + A_{020} + A_{002} = 0.$$

Es ist daher:

$$A^2_{200} = A^2_{020} + 2 A_{020} A_{002} + A^2_{002},$$

$$(A_{020} - A_{002})^2 = A^2_{020} - 2 A_{020} A_{002} + A^2_{002},$$

woraus hervorgeht:

$$A^2_{200} + (A_{020} - A_{002})^2 = 2 A^2_{020} + 2 A^2_{002}.$$

Zieht man diese Gleichung von (43) ab, so erhält man:

44. $$1 = 3\,A_{200}^2 + (A_{020} - A_{002})^2 + A_{011}^2 + A_{101}^2 + A_{110}^2.$$

Entwickeln wir nun den linken Theil der Gleichung (13), indem wir setzen:

45. $$\triangle - \nabla X = \Sigma\, a_{\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2}\, x^{\alpha_0}\, y^{\alpha_1}\, z^{\alpha_2},$$

so ergiebt sich durch Vergleichung der durch die Substitutionen (3) identischen Gleichungen (13) und (41):

46. $$A_{\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2} = \frac{a_{\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2}}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

wodurch (43) und (44) übergehen in:

47. $$(\lambda_2 - \lambda_1)^2 = 2\,(a_{200}^2 + a_{020}^2 + a_{002}^2) + a_{011}^2 + a_{101}^2 + a_{110}^2,$$

48. $$(\lambda_2 - \lambda_1)^2 = 3\,a_{200}^2 + (a_{020} - a_{002})^2 + a_{011}^2 + a_{101}^2 + a_{110}^2.$$

Dieses sind die gesuchten Zerlegungen des Quadrates der Differenz $(\lambda_2 - \lambda_1)$ in die Summe von sechs oder fünf Quadraten.

Heidelberg, 1862.

33.

Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung eines Problems der Homographie von M. Chasles abhängt.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 62, Seite 188—192. In französischer Uebersetzung in den Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris, Band 54 (Jan.—Juni 1862), Seite 678—682.]

Problem.

On donne dans le même plan deux systèmes de sept points chacun et qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques.

Wenn $a = 0$ und $a_1 = 0$ die Gleichungen irgend zweier geraden Linien in derselben Ebene darstellen, die sich in einem Punkte c schneiden, so ist

1. $$a - \lambda a_1 = 0$$

mit dem willkürlichen Factor λ die Gleichung irgend einer geraden Linie, welche durch den Punkt c geht. Diese Gleichung kann man für den analytischen Ausdruck des vom Centrum c ausgehenden Strahlbüschels nehmen. Denn man erhält aus ihr die Gleichung jedes einzelnen Strahles, wenn man dem willkürlichen Factor λ den ihm entsprechenden Werth zuertheilt.

Sind ferner $A = 0$ und $A' = 0$ die Gleichungen irgend zweier geraden Linien, welche sich in dem Punkte C schneiden, so ist wieder:

$$2. \qquad A - \lambda A' = 0$$

mit dem willkürlichen Factor λ die Gleichung irgend einer geraden Linie, welche durch den Punkt C geht; und die Gleichung (2) ist der analytische Ausdruck für einen zweiten vom Centrum C ausgehenden Strahlbüschel.

Die Gleichungen (1) *und* (2) *repräsentiren irgend zwei von den Centren c und C ausgehende homographische Strahlbüschel, deren homologe Strahlen durch den willkürlichen, aber in beiden Gleichungen gleichen Factor λ bestimmt sind.*

Beiläufig sei erwähnt, dass in gleicher Weise die Gleichung (2) eine beliebige mit dem Strahlbüschel (1) homographisch getheilte gerade Linie darstellt, wenn $A = 0$ und $A' = 0$ die Gleichungen von irgend zwei Punkten bedeuten.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir annehmen, dass c und C die Centren seien der gesuchten beiden Strahlbüschel und dass die Gleichungen (1) und (2) die homologen Strahlen der beiden Systeme darstellen. Es seien ferner x, y, z mit den angehängten Indices $1, 2, \ldots, 7$ die homogenen Coordinaten der sieben gegebenen Punkte des einen Systemes und X, Y, Z mit denselben Indices die Coordinaten der entsprechenden Punkte des anderen Systems.

Lassen wir alsdann k irgend einen der genannten sieben Indices bedeuten, so drücken die beiden Gleichungen

$$3. \qquad (a)_k - \lambda_k (a_1)_k = 0, \qquad (A)_k - \lambda_k (A')_k = 0$$

die vierzehn Bedingungen aus, dass sieben Strahlen des einen Strahlbüschels c durch die sieben gegebenen Punkte des einen Systems gehen, und dass ihre homologen Strahlen des anderen Strahlbüschels C durch die sieben gegebenen Punkte des anderen Systems gehen, vorausgesetzt, dass $(a)_k$, $(a_1)_k$ und $(A)_k$, $(A')_k$ die Ausdrücke bedeuten, in welche a, a_1 und A, A' durch Veränderung der variabeln Coordinaten in die den Indices k entsprechenden Coordinaten der gegebenen Punkte des einen und des anderen Systems übergehen.

Diese vierzehn Bedingungen reduciren sich durch Elimination von λ_k auf folgende sieben Gleichungen

$$4. \qquad \frac{(a)_k}{(a_1)_k} - \frac{(A)_k}{(A')_k} = 0,$$

welche das vorgelegte Problem lösen.

Denn bestimmt man die zwölf Constanten in den vier linearen Functionen a, a_1, A, A' in der Weise, dass sie den sieben Gleichungen (4) genügen, so ergeben sich aus den Gleichungen:

$$5. \qquad a = 0, \qquad a_1 = 0$$

die Coordinaten des gesuchten Centrums c, und aus den Gleichungen

$$6. \qquad A = 0, \qquad A' = 0$$

die Coordinaten des Centrums C.

Aus dem Umstande, dass nur sieben Gleichungen die zwölf Constanten zu bestimmen haben, darf man aber nicht folgern, dass das Problem unendlich viele Auflösungen zulasse. Es ist im Gegentheil, wie M. Chasles bemerkt, das Problem ein vollständig bestimmtes.

Um dieses nachzuweisen, setzen wir:

$$7. \qquad \begin{cases} a = \alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z, & A = \alpha^0 X + \beta^0 Y + \gamma^0 Z, \\ a_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & A' = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z. \end{cases}$$

Von den zwölf in diese vier linearen Ausdrücke von a, a_1, A, A' eingehenden Constanten können wir zwei, z. B. β_0 und γ_1, gleich 0 setzen, was darauf hinauskäme, den beiden durch das Centrum c gehenden geraden Linien $a = 0$ und $a_1 = 0$, die wir beliebig um das Centrum drehen können, bestimmte Richtungen zu geben.

Berücksichtigt man ferner die Art des Eingehens der noch übrigen Constanten in die Gleichungen (4), so sieht man, dass sich noch drei Constanten auf die Einheit zurückführen lassen, etwa $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha^0 = 1$. Es bleiben also in der That nur sieben zu bestimmende Constanten übrig, deren Zahl gleich ist der Zahl der das Problem lösenden Gleichungen.

Wir werden jedoch, um die Symmetrie nicht zu zerstören, im Folgenden sämmtliche zwölf Constanten berücksichtigen, aber an ihrer Stelle neun andere einführen.

Zu diesem Zwecke entwickeln wir die Gleichung (4) wie folgt:

$$8. \quad \begin{cases} \quad (a_{00} x_k + a_{01} y_k + a_{02} z_k) X_k \\ + (a_{10} x_k + a_{11} y_k + a_{12} z_k) Y_k \\ + (a_{20} x_k + a_{21} y_k + a_{22} z_k) Z_k = 0, \end{cases}$$

indem wir haben:

$$9. \quad \begin{cases} a_{00} = \alpha_0 \alpha' - \alpha_1 \alpha^0, & a_{01} = \beta_0 \alpha' - \beta_1 \alpha^0, & a_{02} = \gamma_0 \alpha' - \gamma_1 \alpha^0, \\ a_{10} = \alpha_0 \beta' - \alpha_1 \beta^0, & a_{11} = \beta_0 \beta' - \beta_1 \beta^0, & a_{12} = \gamma_0 \beta' - \gamma_1 \beta^0, \\ a_{20} = \alpha_0 \gamma' - \alpha_1 \gamma^0, & a_{21} = \beta_0 \gamma' - \beta_1 \gamma^0, & a_{22} = \gamma_0 \gamma' - \gamma_1 \gamma^0. \end{cases}$$

Diese neun neuen Constanten a sind jedoch nicht unabhängig von einander, sondern es findet, wie aus der Determinanten-Theorie bekannt ist, zwischen ihnen die Gleichung statt:

$$10. \quad \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Da aber in die acht Gleichungen (8) und (10) nur die Verhältnisse der zu bestimmenden neun Constanten a eingehen, so geben diese Gleichungen die Lösung des vorgelegten Problems vollständig und zwar in folgender Weise.

Es seien m und n irgend zwei von den Constanten a. Durch sie lassen sich die übrigen sieben Constanten vermittelst der sieben linearen Gleichungen (8) ausdrücken in der Form:

$$11. \quad a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} m + c_{\mu\nu} n,$$

indem $b_{\mu\nu}$ und $c_{\mu\nu}$ bestimmte Functionen der Coordinaten der gegebenen vierzehn Punkte darstellen. Setzen wir nun diese Werthe (11) in (10), so erhalten wir die gesuchte in $\frac{m}{n}$ cubische Gleichung:

$$12. \quad \begin{vmatrix} b_{00} m + c_{00} n, & b_{01} m + c_{01} n, & b_{02} m + c_{02} n \\ b_{10} m + c_{10} n, & b_{11} m + c_{11} n, & b_{12} m + c_{12} n \\ b_{20} m + c_{20} n, & b_{21} m + c_{21} n, & b_{22} m + c_{22} n \end{vmatrix} = 0.$$

Lösen wir diese cubische Gleichung auf, und setzen $n = 1$, so geben die Gleichungen (11) die Werthe aller neun Coëfficienten a.

Es bleibt noch übrig, die Coordinaten x, y, z des Centrums c festzustellen. Zu diesem Zwecke erinnern wir, dass $a = 0$ und $a_1 = 0$ die Gleichungen zweier geraden Linien sind, welche sich in dem Centrum c schneiden. Bezeichnen wir nun mit X, Y, Z irgend welche Grössen, so stellt die Gleichung: $a A' - a_1 A = 0$ oder, vollständig entwickelt, die Gleichung:

$$13. \quad \begin{cases} \quad (a_{00} x + a_{01} y + a_{02} z) X \\ + (a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z) Y \\ + (a_{20} x + a_{21} y + a_{22} z) Z = 0 \end{cases}$$

ein System von geraden Linien dar, welche sich in dem Centrum c schneiden. Man hat daher zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z dieses Centrums irgend zwei von den drei Gleichungen:

$$14. \quad \begin{cases} a_{00} x + a_{01} y + a_{02} z = 0, \\ a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z = 0, \\ a_{20} x + a_{21} y + a_{22} z = 0. \end{cases}$$

Da die Coëfficienten in diesen Gleichungen aber von der cubischen Gleichung (12) abhängen, so hat man drei Auflösungen des Problems.

Wenn in dem behandelten Probleme an Stelle von sieben Punkten in jedem der beiden Systeme acht Punkte gegeben wären, so würde dasselbe im Allgemeinen keine Lösung haben. Man kann sich aber die Frage stellen, welche Lage der achte Punkt o des ersten Systems haben muss, wenn der ihm entsprechende Punkt O des zweiten Systems gegeben ist. Diese Frage beantwortet die Gleichung (13), wenn man festsetzt, dass x, y, z die Coordinaten des Punktes o und dass X, Y, Z die gegebenen Coordinaten des Punktes O seien. Sie sagt aus, dass der Punkt o auf einer von dem gegebenen Punkte O abhängenden geraden Linie (13) beliebig gewählt werden kann, welche durch das Centrum c geht. Die Gleichung (13) stellt aber drei verschiedene gerade Linien dar, von welchen jede durch eines der drei Centren c geht. Man kann daher den Punkt o beliebig auf drei von dem Punkte O abhängenden geraden Linien wählen, welche durch die drei Centren c gehen.

Man erhält die Gleichung dieser drei geraden Linien in der Form eines Productes aus drei linearen Factoren, wenn man aus den sieben Gleichungen (8) und der achten Gleichung (13) die Verhältnisse der neun Coëfficienten a in linearer Weise berechnet und sie in die Gleichung (10) einsetzt. Die so präparirte Gleichung (10) stellt mit den willkürlichen Constanten X, Y, Z Curven dritter Ordnung dar, welche durch die drei Centren c gehen. Aus der Discussion solcher Curven dritter Ordnung hat man bisher die Lösung des Problems von M. Chasles abgeleitet, indem man die sechs von den neun Schnittpunkten zweier von diesen Curven feststellte, welche nicht die drei gesuchten Centren c sind.

Heidelberg, im März 1862.

34.

Jacob Steiner.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 62, Seite 199—200.]

Eine fast ununterbrochene Kette bilden im Journal von seiner Entstehung an bis vor wenig Jahren die unübertroffenen Arbeiten des am 1. April verstorbenen Jacob Steiner. Dem Journal liegt es darum ob, die Trauerkunde, welche die ganze mathematische Welt schmerzlich bewegt, zu bestätigen und dem Verstorbenen an der Stelle ein Denkmal zu setzen, wo die Kette abläuft.

Jacob Steiner gilt für den ersten Geometer seiner Zeit. Mit dem grössten Theile seiner Arbeiten, welche ihm diese Geltung verschafft haben, hat er das Journal geschmückt. Sie folgten schnell auf einander mit zwei grösseren, aber bedeutsamen Unterbrechungen.

Die Zeit der ersten Lücke in dem Journal füllt die Bearbeitung eines classischen Werkes aus: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. Der Charakter des Buches ist Einfachheit und Strenge der Principien neben Mannigfaltigkeit der daraus gewonnenen Resultate. Darum wird es auch als Muster eines Lehrbuches der höheren Geometrie für spätere Zeiten dienen, welches reiche Keime weiterer Entwickelung in sich trägt. Der Verfasser vereinfacht, erweitert und vermehrt darin die von Poncelet erfundenen Beweismethoden.

Die Zeit der zweiten Unterbrechung scheint dem Kampfe mit dem Imaginären in der Geometrie gewidmet gewesen zu sein, wovon sich die Spuren vorher und nachher in dem Journal auffinden lassen. Es gewinnt

diese Hypothese an Wahrscheinlichkeit, wenn man von dem Gespenst — wie Steiner sich auszudrücken liebte — in der Ebene und im Raume hört, mit dessen Hülfe er die verborgenen Wahrheiten enthüllte. Von da ab datiren seine zahlreichsten Entdeckungen, die weit über die Grenzen hinausgehen, welche seine Zeitgenossen sich gesteckt haben. Sie sind, gleich den Fermat'schen Sätzen, für die Mit- und Nachwelt Räthsel. Denn Steiner hat es in dem Drange seiner Entdeckungen nicht mehr bewältigen können, die Wege zu bezeichnen, die ihn dahin geführt haben. Es ist dieses um so mehr zu bedauern, als er sich jetzt auf einem Boden befand, auf dem die synthetische Geometrie zwar eine Richtschnur der Bearbeitung geben, den sie aber nicht beherrschen kann, weil ihr die Allgemeinheit der Grundlage mangelt.

Die Steiner'schen Sätze bleiben desshalb für den Geometer ein zu erstrebendes Ziel, für den Analytiker ein Wegweiser zur Bildung und Erforschung von Functionen, die in der höheren Algebra von grosser Bedeutung sind.

Steiner's Wirken steht mit der synthetischen Geometrie in unauflöslicher Verbindung. Mit unermüdlicher und ausschliesslicher Thätigkeit widmete er sich ihr, bis zu dem Grade der Schwärmerei, dass er es wie eine Schmach der Synthesis aufnahm, wenn bisweilen die Analysis, deren Macht er nicht unterschätzte, gleiche oder gar weitergreifende Resultate brachte.

Diese Hingebung hat er noch in einer letztwilligen Verordnung bekundet, welche durch Stiftung eines Preises für synthetische Geometrie auch in der Zukunft die Kräfte der Mathematiker auf diesen Zweig der Wissenschaft zu lenken sucht.

Heidelberg, den 22. April 1863.

Otto Hesse.

35.

Zur Involution.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 63, Seite 179—185.]

Wenn drei Punktenpaare aa', bb' und cc' auf einer geraden Linie eine Involution bilden, so hat man zwischen den Entfernungen dieser Punkte die folgenden sieben Gleichungen; und umgekehrt, jede von diesen Gleichungen ist die Bedingung für die Involution, aus welcher die sechs anderen folgen.

$$\begin{aligned}
ab.ab'.a'c.a'c' - a'b.a'b'.ac.ac' &= 0,\\
bc.bc'.b'a.b'a' - b'c.b'c'.ba.ba' &= 0,\\
ca.ca'.c'b.c'b' - c'a.c'a'.cb.cb' &= 0,\\
ab'.bc'.ca' + a'b.b'c.c'a &= 0,\\
ab'.bc.c'a' + a'b.b'c'.ca &= 0,\\
ab.b'c'.ca' + a'b'.bc.c'a &= 0,\\
ab.b'c.c'a' + a'b'.bc'.ca &= 0.
\end{aligned}$$

Von diesen sieben Fundamentalgleichungen der Involution ausgehend, stellen wir folgende Betrachtungen an.

Drückt man die Entfernungen der sechs Punkte der Involution, wie sie in den angegebenen Gleichungen vorkommen, durch die Entfernungen $x_1, x_2, \ldots x_6$ derselben Punkte von einem beliebig auf der geraden Linie, auf welcher die sechs Punkte liegen, angenommenen Punkte aus, so werden die linken Theile obiger Gleichungen sieben ganze Functionen F der sechs Grössen $x_1, x_2, \ldots x_6$.

Werden diese sechs Grössen x als willkürliche genommen, so verschwindet keine von den sieben Functionen F. Sobald aber die sechs Grössen solche Werthe annehmen, dass eine jener sieben Functionen F verschwindet, verschwinden mit ihr auch die sechs anderen.

Es können daher die sieben Functionen F der sechs willkürlichen Grössen x nur durch gewisse Factoren von einander unterschieden sein.

Diese Factoren zu ermitteln ist von Interesse, weil die Producte dieser Factoren und der ihnen entsprechenden Functionen F sieben identische Functionen der sechs willkürlichen Grössen x ergeben, die in der Form sich wesentlich von einander unterscheiden.

Die sieben Functionen F der sechs willkürlichen Grössen x sind folgende:

$$1.\quad\begin{cases} F_{12} = (x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_5)(x_2-x_6)-(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6), \\ F_{34} = (x_3-x_5)(x_3-x_6)(x_4-x_1)(x_4-x_2)-(x_4-x_5)(x_4-x_6)(x_3-x_1)(x_3-x_2), \\ F_{56} = (x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)-(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4), \\ F_1 \;= (x_4-x_1)(x_6-x_3)(x_2-x_5)+(x_3-x_2)(x_5-x_4)(x_1-x_6), \\ F_2 \;= (x_4-x_1)(x_5-x_3)(x_2-x_6)+(x_3-x_2)(x_6-x_4)(x_1-x_5), \\ F_3 \;= (x_3-x_1)(x_6-x_4)(x_2-x_5)+(x_4-x_2)(x_5-x_3)(x_1-x_6), \\ F_4 \;= (x_3-x_1)(x_5-x_4)(x_2-x_6)+(x_4-x_2)(x_6-x_3)(x_1-x_5). \end{cases}$$

Ein bekannter algebraischer Satz lässt sich in dem speciellen Falle, der hier eine Anwendung findet, so wiedergeben:

Wenn man mit $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_6$ die Producte der Differenzen von irgend sechs Grössen x bezeichnet:

$$\pi_1 = (x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_6), \quad \pi_2 = (x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_6), \\ \ldots\ \pi_6 = (x_6-x_1)(x_6-x_2)\ldots(x_6-x_5),$$

wenn ferner $\varphi(x)$ irgend eine ganze Function von x des vierten Grades ist, so hat man identisch:

$$\frac{\varphi(x_1)}{\pi_1}+\frac{\varphi(x_2)}{\pi_2}+\cdots+\frac{\varphi(x_6)}{\pi_6}=0.$$

Wenn man für die ganze Function des vierten Grades setzt:

$$\varphi(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2,$$

so verschwinden die beiden ersten Glieder in der angegebenen identischen Gleichung. Vereinigt man die beiden folgenden Glieder ebenso wie die beiden letzten, so erhält man nach Unterdrückung der gleichen Factoren:

$$\frac{F_{34}}{x_3 - x_4} = \frac{F_{56}}{x_5 - x_6}.$$

In dieser identischen Gleichung kann man auch x_1 und x_2 mit x_3 und x_4 oder mit x_5 und x_6 vertauschen, weil diese Vertauschungen erlaubt sind in der identischen Gleichung, aus welcher sie hervorgegangen ist. Auf diese Weise erhält man:

$$\frac{F_{12}}{x_1 - x_2} = \frac{F_{34}}{x_3 - x_4} = \frac{F_{56}}{x_5 - x_6}.$$

Setzt man, um auf die anderen Functionen F zu kommen, $x_1 - x_2 = \varepsilon$, so wird:

$$\frac{F_{12}}{x_1 - x_2} = \frac{\{x_2 - x_3 + \varepsilon\}\{x_2 - x_4 + \varepsilon\}(x_2 - x_5)(x_2 - x_6) - \{x_2 - x_5 + \varepsilon\}\{x_2 - x_6 + \varepsilon\}(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}{\varepsilon}.$$

Entwickelt man nach Potenzen von ε und dividirt durch ε, so wird die rechte Seite

$$\begin{aligned} &\{x_2 - x_3 + x_2 - x_4 + \varepsilon\}(x_2 - x_5)(x_2 - x_6) \\ -&\{x_2 - x_5 + x_2 - x_6 + \varepsilon\}(x_2 - x_3)(x_2 - x_4), \end{aligned}$$

und wenn man den Werth von $\varepsilon = x_1 - x_2$ wieder einsetzt:

$$\begin{aligned} &\{(x_2 - x_3) + (x_1 - x_4)\}(x_2 - x_5)(x_2 - x_6) \\ -&\{(x_2 - x_5) + (x_1 - x_6)\}(x_2 - x_3)(x_2 - x_4). \end{aligned}$$

Vereinigt man die Glieder der Entwickelung, welche die Factoren $(x_2 - x_3)$ und $(x_2 - x_5)$ enthalten, und lässt die übrigen Glieder folgen, so hat man:

$$(x_2 - x_3)(x_2 - x_5)(x_4 - x_6) - (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_6) + (x_2 - x_5)(x_2 - x_6)(x_1 - x_4).$$

Setzt man dafür:

$$\begin{aligned} \{(x_2 - x_1) + (x_1 - x_3)\}(x_2 - x_5)(x_4 - x_6) - \{(x_2 - x_5) + (x_5 - x_3)\}(x_2 - x_4)(x_1 - x_6) \\ + (x_2 - x_5)(x_2 - x_6)(x_1 - x_4) \end{aligned}$$

und entwickelt wieder, so erhält man:

$$(x_1 - x_3)\ (x_2 - x_5)(x_4 - x_6) - (x_5 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_6)$$
$$+ (x_2 - x_5)\{(x_2 - x_1)(x_4 - x_6) - (x_2 - x_4)(x_1 - x_6) + (x_2 - x_6)(x_1 - x_4)\}.$$

Es zerstören sich hier die letzten Glieder, so dass nur die beiden ersten übrig bleiben, deren Summe gleich F_3 ist.

Man hat daher:

$$\frac{F_{12}}{x_1 - x_2} = F_3.$$

Da aber der linke Theil dieser Gleichung ungeändert bleibt, wenn man x_1 mit x_2 oder x_3 mit x_4 oder endlich x_5 mit x_6 vertauscht, so hat man schliesslich:

$$2. \qquad \begin{cases} \dfrac{F_{12}}{x_1 - x_2} = \dfrac{F_{34}}{x_3 - x_4} = \dfrac{F_{56}}{x_5 - x_6} \\ = F_1 = F_2 = F_3 = F_4. \end{cases}$$

Um eine Anwendung von diesen Formeln zu machen, stellen wir, unter der Annahme, dass die sechs Grössen x beliebig gegeben seien, die Gleichungen auf:

$$3. \qquad \begin{cases} (\alpha - x_1)(\alpha - x_2)(\beta - x_4)(\beta - x_5) - (\alpha - x_4)(\alpha - x_5)(\beta - x_1)(\beta - x_2) = 0, \\ (\alpha - x_2)(\alpha - x_3)(\beta - x_5)(\beta - x_6) - (\alpha - x_5)(\alpha - x_6)(\beta - x_2)(\beta - x_3) = 0, \\ (\alpha - x_3)(\alpha - x_4)(\beta - x_6)(\beta - x_1) - (\alpha - x_6)(\alpha - x_1)(\beta - x_3)(\beta - x_4) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gehen in einander über, wenn man für den Index 6 den Index 1 setzt und die übrigen Indices um eine Einheit erhöht.

Von diesen Gleichungen ist ferner eine die Folge der beiden anderen. Denn multiplicirt man dieselben auf einander folgend mit den Factoren:

$$(\alpha - x_3)(\beta - x_6), \qquad -(\alpha - x_1)(\beta - x_4), \qquad (\alpha - x_5)(\beta - x_2)$$

und addirt, so sieht man, ohne die Producte aufzulösen, dass man identisch Null erhält.

Es brauchen daher nur zwei von den drei Gleichungen (3) erfüllt zu sein, die dritte wird von selber erfüllt. Da aber zwei von diesen Gleichungen durch gewisse Werthe von α und β immer erfüllt werden können, so erfüllen auch die durch diese beiden Gleichungen bestimmten Werthe der Unbekannten die dritte Gleichung.

Jede der drei Gleichungen ist die Bedingung für die Involution von sechs Punkten auf einer geraden Linie, und die drei Gleichungen selbst drücken analytisch den Satz aus:

Wenn irgend sechs Punkte 1, 2, ... 6 *auf einer geraden Linie gegeben sind, so giebt es immer ein Punktenpaar* $\alpha\beta$, *welches gleichzeitig mit den beiden Punktenpaaren* 12 *und* 45, *mit den beiden Punktenpaaren* 23 *und* 56, *und mit den beiden Punktenpaaren* 34 *und* 61 *eine Involution bildet.*

Dividirt man jede von den Gleichungen (3) durch $\alpha - \beta$, so erhält man mit Rücksicht auf (2):

$$4. \qquad \begin{cases} (x_2 - \alpha)(x_5 - x_1)(\beta - x_4) + (x_1 - \beta)(x_4 - x_2)(\alpha - x_5) = 0, \\ (x_3 - \alpha)(x_6 - x_2)(\beta - x_5) + (x_2 - \beta)(x_5 - x_3)(\alpha - x_6) = 0, \\ (x_4 - \alpha)(x_1 - x_3)(\beta - x_6) + (x_3 - \beta)(x_6 - x_4)(\alpha - x_1) = 0. \end{cases}$$

In dieser Form sieht man es den Gleichungen nicht mehr an, dass sie einzeln mit den angegebenen Factoren multiplicirt und addirt identisch Null geben. Wir legen darauf auch weiter kein Gewicht, behalten aber die Eigenschaft dieser Gleichungen im Auge, dass die Werthe von α und β, wie sie sich aus zwei Gleichungen ergeben, auch der dritten genügen.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Werthe von α und β sich aus zwei von jenen Gleichungen ergeben.

Entwickeln wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (4), so nehmen sie die Form an:

$$5. \qquad \begin{cases} A_1\alpha\beta + B_1(\alpha + \beta) + C_1 = 0, \\ A_2\alpha\beta + B_2(\alpha + \beta) + C_2 = 0, \\ A_3\alpha\beta + B_3(\alpha + \beta) + C_3 = 0, \end{cases}$$

in welcher die neun Coëfficienten A, B, C gewisse Functionen der sechs gegebenen Grössen x bedeuten.

Es sind dieses lineare Gleichungen, wenn man die Grössen $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ als die Unbekannten betrachtet. Löst man zwei Gleichungen nach den Unbekannten auf, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$\alpha + \beta = A, \qquad \alpha\beta = B,$$

und man kann daraus eine quadratische Gleichung bilden:

6. $$\lambda^2 - A\lambda + B = 0,$$

deren Wurzeln die gesuchten Grössen α und β sind.

Die Gleichungen (5) sind in Rücksicht auf die Unbekannten $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ lineare Gleichungen, welche für ein bestimmtes Werthsystem der Unbekannten zugleich erfüllt werden. Man kann desshalb drei Factoren $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ der Art bestimmen, dass, wenn man die Gleichungen mit diesen Factoren einzeln multiplicirt und hierauf addirt, die Summe unabhängig von den Werthen der Unbekannten identisch verschwindet.

Diese Eigenschaft behalten auch die drei folgenden Gleichungen bei, welche aus (5) dadurch hervorgehen, dass man für $\alpha + \beta$ setzt $2x$ und für $\alpha\beta$ setzt x^2:

7. $$\begin{cases} A_1 x^2 + 2 B_1 x + C_1 = 0, \\ A_2 x^2 + 2 B_2 x + C_2 = 0, \\ A_3 x^2 + 2 B_3 x + C_3 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestehen aber nicht mehr zugleich, wie die vorhergehenden, aus welchen sie auf die angegebene Art hervorgegangen sind. Wollen wir daher die hervorgehobene Eigenschaft derselben, dass sie einzeln mit den Factoren $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ multiplicirt und addirt identisch Null geben, weiter verwerthen, so müssen wir sie einzeln geometrisch interpretiren.

Die erste Gleichung (5) ist die Bedingung, dass die Punktenpaare $\alpha\beta$, 12, 45 eine Involution bilden. Durch diese eine Gleichung ist das erste Punktenpaar $\alpha\beta$ nicht bestimmt, wenn die beiden anderen Punktenpaare gegeben sind. Für jeden Punkt α giebt es einen entsprechenden Punkt β. Man kann daher nach der Lage des Punktes α fragen, dessen entsprechender Punkt β mit dem Punkte α zusammenfällt. Wenn wir diese beiden Lagen des Punktes α als ein Punktenpaar auffassen, so ist die erste Gleichung (7) der analytische Ausdruck dieses Punktenpaares.

Wir bringen nun den bekannten Satz in Erinnerung:

Wenn auf einer geraden Linie zwei Punktenpaare gegeben sind, so giebt es unendlich viele Punktenpaare, welche mit den gegebenen

eine Involution bilden; aber es giebt nur zwei Punkte, in welchen eines von diesen Punktenpaaren zusammenfällt, und diese beiden Punkte sind harmonisch zu dem einen wie zu dem anderen gegebenen Punktenpaare.

Daraus ist ersichtlich, dass die erste Gleichung (7) dasjenige Punktenpaar analytisch darstellt, welches harmonisch ist sowohl zu dem gegebenen Punktenpaar 12 als zu dem gegebenen Punktenpaar 45. Die zweite Gleichung (7) stellt ebenso das Punktenpaar dar, welches harmonisch ist zu den Punktenpaaren 23 und 56. Die dritte Gleichung (7) endlich ist der analytische Ausdruck für dasjenige Punktenpaar, welches harmonisch ist zu den Punktenpaaren 34 und 61.

Um nun die oben hervorgehobene Eigenschaft der drei Gleichungen (7) geometrisch zu verwerthen, benutzen wir den bekannten Satz:

Wenn drei quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten analytisch drei Punktenpaare auf einer geraden Linie darstellen, so bilden die drei Punktenpaare eine Involution unter der Bedingung, dass die Gleichungen mit gewissen constanten Factoren multiplicirt und addirt identisch Null geben.

Hiernach bilden die drei durch die Gleichungen (7) dargestellten Punktenpaare eine Involution, und wir haben den Satz:

Wenn irgend sechs Punkte 1, 2, ... 6 *auf einer geraden Linie gegeben sind, und man construirt drei Punktenpaare, von welchen das erste harmonisch ist zu den Punktenpaaren* 12 *und* 45, *das zweite harmonisch zu den Punktenpaaren* 23 *und* 56, *das dritte harmonisch zu den Punktenpaaren* 34 *und* 61, *so bilden die drei construirten Punktenpaare eine Involution.*

Da man die sechs auf der geraden Linie gegebenen Punkte 1, 2, ... 6 auch beliebig mit einander vertauschen kann, so erhält man durch diese Vertauschungen nach dem ersten Satze 60 verschiedene Punktenpaare $\alpha\beta$ und nach dem letzten Satze 60 mal drei Punktenpaare, welche eine Involution bilden.

Man wird bemerken, dass diese beiden Sätze dem Pascal'schen und dem Brianchon'schen Satze vom Sechsecke, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben oder umbeschrieben ist, nachgebildet sind. Und

in der That kann man auch ein Uebertragungsprincip angeben, nach welchem nicht nur die genannten beiden Sätze ohne Schwierigkeit aus dem Pascal'schen und dem Brianchon'schen hervorgehen, sondern noch andere Sätze über Punktenpaare auf einer und derselben geraden Linie, welche ebenso den bekannten Erweiterungen des Pascal'schen und des Brianchon'schen Satzes entsprechen.

Wenn die sechs Punkte 1, 2 ... 6 durch eine Gleichung vom sechsten Grade gegeben sind, so kann man allerdings die Punkte, von welchen die angegebenen beiden Sätze handeln, nicht mehr durch algebraische Gleichungen rational ausdrücken; aber diese Sätze machen auf gewisse unsymmetrische Relationen der Wurzeln aufmerksam, die für die Algebra der Gleichung des sechsten Grades nicht ohne Bedeutung sind.

Heidelberg, im December 1863.

36.

Transformations-Formeln für rechtwinklige Raum-Coordinaten.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 63, Seite 247—251.]

Das Problem der Transformation rechtwinkliger Raum-Coordinaten, rein analytisch gefasst, besteht bekanntlich darin:

Die Substitutionen zu bestimmen von der Form:

$$
\begin{aligned}
X &= ax + by + cz \\
Y &= a'x + b'y + c'z \\
Z &= a''x + b''y + c''z,
\end{aligned} \tag{1.}
$$

welche folgende Gleichung zu einer identischen machen:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2.}$$

Diese durch die Substitutionen (1) identische Gleichung (2) löst sich in folgende Bedingungsgleichungen zwischen den neuen Substitutions-Coëfficienten auf:

$$
\begin{aligned}
a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \qquad & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\
b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \qquad & ca + c'a' + c''a'' &= 0, \\
c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \qquad & ab + a'b' + a''b'' &= 0,
\end{aligned} \tag{3.}
$$

und das Problem verlangt die wirkliche Auflösung dieser sechs Gleichungen.

Da nämlich die neun Substitutions-Coëfficienten diesen sechs Gleichungen zu genügen haben, so sieht man, dass man irgend drei von jenen Coëfficienten als unabhängige Variable wählen kann, und dass alle neun Coëfficienten als Functionen der drei Variabeln bestimmt sind.

Monge stellt alle neun Substitutions-Coëfficienten als Functionen der drei Variabeln a, b', c'' dar.[1]) Euler drückt sie durch drei andere Variabeln aus, die von mehr praktischer Bedeutung sind.[2])

Die drei Variabeln von Monge oder Euler in den Functionen, welche die neun Substitutions-Coëfficienten ausdrücken, kann man vermittelst Substitutionen ersetzen durch drei oder mehrere unabhängige Variabeln. Das Criterium für die neun Functionen bleiben die sechs Gleichungen (3).

Das Studium des Hexagramma mysticum von Pascal in seiner analytischen Auffassung führt zu folgender Darstellung der neun Substitutions-Coëfficienten als Functionen von sechs unabhängigen Variabeln λ:

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_6$ irgend welche sechs variable Grössen, es seien ferner:

$$4.\quad \begin{cases} \pi_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \;\ldots\; (\lambda_1 - \lambda_6), \\ \pi_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) \;\ldots\; (\lambda_2 - \lambda_6), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi_6 = (\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2) \;\ldots\; (\lambda_6 - \lambda_5), \end{cases}$$

und $i = \sqrt{-1}$. Alsdann hat man die Ausdrücke für die neun Substitutions-Coëfficienten:

$$5.\quad \begin{cases} a = \dfrac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)} \cdot \dfrac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_2}}, \qquad b = \dfrac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)} \cdot \dfrac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_2}}, \\ a' = \dfrac{(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)} \cdot \dfrac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_4}}, \qquad b' = \dfrac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)} \cdot \dfrac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_4}}, \\ a'' = \dfrac{(\lambda_6-\lambda_3)(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)} \cdot \dfrac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_6}}, \qquad b'' = \dfrac{(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)} \cdot \dfrac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_6}}, \\ c = \dfrac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)} \cdot \dfrac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_2}}, \\ c' = \dfrac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)} \cdot \dfrac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_4}}, \\ c'' = \dfrac{(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)} \cdot \dfrac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_6}}. \end{cases}$$

---

1) Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, année 1784, p. 114.

2) Introductio in analysin infinitorum, tom. II, p. 369.

Das Criterium für diese neun Functionen sind die Gleichungen (3). Es wird also nachzuweisen sein, dass die Functionen (5) jenen sechs Gleichungen (3) genügen.

Dazu dient die bekannte identische Gleichung aus der Algebra:

$$6. \qquad \frac{\varphi(\lambda_1)}{\pi_1} + \frac{\varphi(\lambda_2)}{\pi_2} + \cdots + \frac{\varphi(\lambda_6)}{\pi_6} = 0,$$

in welcher $\varphi(\lambda)$ irgend eine ganze Function von λ des vierten Grades bedeutet.

Aus dieser Gleichung gehen nämlich, wenn wir für $\varphi(\lambda)$ nach einander setzen:

$$(\lambda - \lambda_3)^2 (\lambda - \lambda_5)^2, \quad (\lambda - \lambda_5)^2 (\lambda - \lambda_1)^2, \quad (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_3)^2,$$

drei identische Gleichungen hervor, die wir auch erhalten, wenn wir für die neun Coëfficienten in den drei ersten Gleichungen (3) ihre Ausdrücke (5) setzen.

Setzen wir für $\varphi(\lambda)$ nach einander:

$$(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_5), \quad (\lambda - \lambda_3)^2 (\lambda - \lambda_5)(\lambda - \lambda_1), \quad (\lambda - \lambda_5)^2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3),$$

so geht die identische Gleichung (6) über in drei identische Gleichungen, die wir auch erhalten, wenn wir in den drei letzten Gleichungen (3) die Ausdrücke (5) der Coëfficienten setzen.

Die Ausdrücke (5) der neun Substitutions-Coëfficienten sind in der That die Auflösungen der sechs Gleichungen (3). Die sechs Variabeln λ in ihnen können nur die Wirkung von drei Variabeln ausüben, weil die neun Functionen (5) den sechs Gleichungen (3) genügen. Wir werden dieses auch direct nachweisen können.

Zu dem genannten Zwecke bemerken wir, dass die Ausdrücke (5) der neun Coëfficienten ungeändert bleiben, wenn man erstens für alle λ_k setzt $\alpha \lambda_k$, zweitens für alle λ_k setzt $\lambda_k + \beta$ und drittens für alle λ_k setzt $\frac{1}{\lambda_k}$. Wenn wir diese Substitutionen in eine vereinigen, so können wir kürzer sagen: die neun Functionen (5) der sechs Variabeln λ_k werden dieselben Functionen der sechs Variabeln μ_k, wenn man setzt:

7. $$\lambda_k = \frac{\alpha \mu_k + \beta}{\mu_k + \gamma},$$

also unabhängig von α, β, γ, wovon man sich auch direct leicht überzeugen kann.

Daraus ziehen wir den Schluss, dass, wenn man in den oben angegebenen Ausdrücken (5) der neun Coëfficienten irgend welchen drei Variabeln λ gegebene Werthe zuertheilt, die drei anderen aber beliebig variiren lässt, die neun Coëfficienten alle Werthe annehmen, welche sie durch Variation sämmtlicher Variabeln λ erhalten würden.

Denn es sei C der Ausdruck irgend eines der neun Coëfficienten und (C) der Ausdruck, in welchen C durch die Substitutionen (7) übergeht. Es ist (C) also dieselbe Function der sechs Variabeln μ_k, als C der Variabeln λ_k, welche Werthe auch α, β, γ haben. Haben nun die sechs Variabeln λ_k irgend welche Werthe, so kann man, da es freisteht, über die Constanten α, β, γ beliebig zu verfügen, denselben solche Werthe zuertheilen, dass drei von den sechs Variabeln μ_k auf Grund der sechs Gleichungen (7) gegebene Werthe erhalten. Da aber $C = (C)$ ist, so haben wir auf der einen Seite irgend welche Werthe der Variabeln, auf der anderen Seite gegebene Werthe von drei Variabeln.

Was die Vorzeichen der sechs Quadratwurzeln $\sqrt{\pi_1}$, $\sqrt{\pi_2}$, ... $\sqrt{\pi_6}$ anbetrifft, welche in die gegebenen Ausdrücke der neun Coëfficienten eingehen, so können dieselben ganz willkürlich genommen werden. Bemerken wir aber, dass sämmtliche Variationen, die in den Substitutionen (1) durch die Veränderung der Vorzeichen der sechs Quadratwurzelgrössen hervorgehen, auch dadurch zu Wege gebracht werden können, dass man einer oder mehreren der sechs Variabeln die entgegen gesetzten Vorzeichen zuertheilt, so können wir von diesen Variationen absehen und annehmen, dass sämmtliche Quadratwurzelgrössen das positive Vorzeichen haben.

Eine gefälligere Form nehmen die Ausdrücke (5) für die neun Coëfficienten der Substitution an, wenn man für die sechs Grössen π ihre Werthe (4) setzt. Man erhält dadurch:

$$8. \quad \begin{cases} a = \sqrt{\left\{ \dfrac{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)} \cdot \dfrac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)} \right\}}, \\[2ex] a' = \sqrt{\left\{ \dfrac{(\lambda_1-\lambda_6)(\lambda_1-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)} \cdot \dfrac{(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)} \right\}}, \\[2ex] a'' = \sqrt{\left\{ \dfrac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)} \cdot \dfrac{(\lambda_6-\lambda_3)(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)} \right\}}, \\[2ex] b = \sqrt{\left\{ \dfrac{(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)} \cdot \dfrac{(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_1)} \right\}}, \\[2ex] b' = \sqrt{\left\{ \dfrac{(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)} \cdot \dfrac{(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_1)}{(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_1)} \right\}}, \\[2ex] b'' = \sqrt{\left\{ \dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)} \cdot \dfrac{(\lambda_6-\lambda_5)(\lambda_6-\lambda_1)}{(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_1)} \right\}}, \\[2ex] c = \sqrt{\left\{ \dfrac{(\lambda_5-\lambda_4)(\lambda_5-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)} \cdot \dfrac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)} \right\}}, \\[2ex] c' = \sqrt{\left\{ \dfrac{(\lambda_5-\lambda_6)(\lambda_5-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)} \cdot \dfrac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)} \right\}}, \\[2ex] c'' = \sqrt{\left\{ \dfrac{(\lambda_5-\lambda_2)(\lambda_5-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)} \cdot \dfrac{(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)} \right\}}. \end{cases}$$

Hier ist es allerdings unerlässlich, das Vorzeichen zu bestimmen, welches jeder der neun Quadratwurzeln zukommt. Wir haben in dieser Absicht jeden unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Bruch als das Product zweier Brüche dargestellt. Der zweite Bruch ist der nämliche, welcher in (5) das Vorzeichen der Substitutions-Coëfficienten bestimmt. Wir haben deshalb jedem Quadratwurzelzeichen in (8) das positive oder negative Zeichen vorzusetzen, je nachdem die Brüche unter demselben beide einen positiven oder beide einen negativen Werth haben. Hat der eine Bruch einen positiven, der andere einen negativen Werth — solche Fälle giebt es — so werden gewisse Substitutions-Coëfficienten imaginär und es tritt eine gewisse Unsicherheit in den Formeln (8) ein, die in den vorhergehenden Formeln (5) nicht aufkommt.

Wir wollen nicht unterlassen, darauf aufmerksam zu machen, dass unter den Quadratwurzelzeichen in (8) Quotienten von solchen Producten stehen, deren Differenzen nach den bei Gelegenheit der Involution angestellten Betrachtungen (s. p. 180 dieses Bandes)[1]) mannigfacher Umgestaltung fähig sind.

Heidelberg, im Januar 1864.

---

1) [No. 35, Seite 515 ff. dieser Ausgabe].

37.

Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 65, Seite 384.]

Es ist ein in der Geometrie bekannter Satz: „Wenn man von den Ecken eines Dreiecks nach den Schnittpunkten der gegenüber liegenden Seiten und eines Kegelschnittes sechs gerade Linien zieht, so berühren dieselben einen Kegelschnitt.“ Es soll nun die Aufgabe sein: „Wenn die Gleichungen der Dreieckseiten $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ und die Gleichungen des dieselben schneidenden Kegelschnittes $f(x, y, z) = 0$ gegeben sind, die Gleichung des berührten Kegelschnittes zu finden.“ Die Auflösung der Aufgabe ist folgende:

Es seien a, b, c die linearen homogenen Ausdrücke der Punktcoordinaten:

$$1. \quad a = \alpha^0 x + \beta^0 y + \gamma^0 z, \quad b = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \quad c = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Setzt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe der Punktcoordinaten x, y, z, ausgedrückt durch die Dreieckcoordinaten a, b, c, in die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes $f(x, y, z) = 0$, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$2. \quad a_{00} a^2 + a_{11} b^2 + a_{22} c^2 + 2 a_{12} bc + 2 a_{20} ca + 2 a_{01} ab = 0,$$

und man kann annehmen, dass die Gleichung des die Dreieckseiten schneidenden Kegelschnittes gleich in dieser Form gegeben sei.

In dieser Voraussetzung hat man nach der neunten meiner 1865 herausgegebenen Vorlesungen zwischen den Liniencoordinaten u, v, w und den Dreieckliniencoordinaten α, β, γ die Relationen:

$$3. \quad u = \alpha^0 \alpha + \alpha' \beta + \alpha'' \gamma, \quad v = \beta^0 \alpha + \beta' \beta + \beta'' \gamma, \quad w = \gamma^0 \alpha + \gamma' \beta + \gamma'' \gamma,$$

in Beziehung auf welche sich die Gleichung des berührten Kegelschnittes so darstellt:

$$4. \quad a_{11} a_{22} \alpha^2 + a_{22} a_{00} \beta^2 + a_{00} a_{11} \gamma^2 - 2 a_{12} a_{00} \beta \gamma - 2 a_{20} a_{11} \gamma \alpha - 2 a_{01} a_{22} \alpha \beta = 0.$$

Der Beweis kann ohne Schwierigkeit mit Hülfe der beiden am Ende der genannten neunten Vorlesung aufgeführten Parallelsätze geleistet werden.

Heidelberg, 1865.

38.

Ein Uebertragungsprincip.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 66, Seite 15—21.]

Man kann nicht jedem Punkte in der Ebene einen durch ihn bestimmten Punkt in einer geraden Linie der Art entsprechen lassen, dass auch umgekehrt jedem Punkte in der geraden Linie ein einziger Punkt in der Ebene entspricht. Die Ebene enthält eben das Quadrat von Punkten in der geraden Linie.

Hiernach scheint es unmöglich, die Geometrie in der Ebene auf die Geometrie in einer geraden Linie zurückzuführen.

Die Möglichkeit leuchtet aber sofort ein, wenn man bedenkt, dass die Ebene gerade so viel verschiedene Punkte enthält, als die gerade Linie verschiedene Punktepaare.

Lässt man demnach jedem Punkte in der Ebene ein Punktepaar in der geraden Linie und umgekehrt jedem Punktepaare in der geraden Linie einen Punkt in der Ebene in unzweideutiger Weise entsprechen, so hat man ein Uebertragungsprincip, welches die Geometrie in der Ebene zurückführt auf die Geometrie in der geraden Linie und umgekehrt.

In ähnlicher Weise lässt sich auch die Raumgeometrie zurückführen auf die Geometrie in einer geraden Linie, selbst die Geometrie von mehr als drei Dimensionen. Hier würde es sich aber nicht um Punktepaare in der geraden Linie, sondern um Systeme von drei oder mehreren Punkten in der geraden Linie handeln.

Sieht man jedoch ab von den angedeuteten Erweiterungen des Uebertragungsprincipes, so kommt es darauf an, den Modus festzustellen, nach welchem die Uebertragung einer ebenen Figur in eine ihr entsprechende Figur auf einer geraden Linie und umgekehrt vor sich gehen muss.

Es liegen zwei Systeme vor, das eine in der Ebene, das andere auf einer geraden Linie, der *Fundamentallinie.* Ein Punkt xy in der Ebene sei durch seine rechtwinkligen Coordinaten x, y bestimmt, ein Punkt λ auf der Fundamentallinie werde bestimmt durch seinen Abstand λ von einem beliebig gewählten, aber festen Punkte auf der Fundamentallinie. Soll nun der Punkt λ einer von den beiden Punkten der Fundamentallinie sein, welche dem Punkte xy in der Ebene entsprechen, so muss die Grösse λ eine Function der beiden Grössen x und y sein. Das heisst, die drei Grössen λ, x, y müssen durch eine Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$ mit einander verbunden sein. Da aber jeder Punkt der Ebene einem Punktepaare in der Fundamentallinie entsprechen soll, so muss jene Gleichung eine quadratische in λ sein.

Andererseits soll einem gegebenen Punktepaare λ_0, λ_1 in der Fundamentallinie der Voraussetzung nach ein einziger Punkt xy in der Ebene entsprechen. Das will sagen, dass die beiden Gleichungen $\varphi(\lambda_0, x, y) = 0$, $\varphi(\lambda_1, x, y) = 0$ nur eine Auflösung für die Unbekannten x, y zulassen, dass die Gleichungen linear seien in Rücksicht auf die Unbekannten.

Hierdurch ist der Modus der Uebertragung analytisch festgestellt. Die Uebertragung wird vermittelt durch die Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$, welche in λ quadratisch, in x und y aber linear ist, also durch eine Gleichung von der Form:

$$1. \qquad A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

wenn man unter A, B, C beliebig gegebene lineare Functionen von x und y versteht. Man sieht, dass diese Gleichung alles leistet, was das ausgesprochene Princip verlangt. Jedem Punkte in der Ebene entspricht ein Punktepaar in der Fundamentallinie und umgekehrt entspricht jedem Punktepaare in der Fundamentallinie ein Punkt in der Ebene.

Um das vorgelegte Princip fruchtbar zu machen, bedarf es solcher Fundamentalsätze, welche die einfachsten Figurenverhältnisse der beiden Systeme auf einander übertragen lehren.

Das einfachste Figurenverhältniss in der Ebene besteht darin, dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Die Coordinaten dieser Punkte seien $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, und $A_0 B_0 C_0$, $A_1 B_1 C_1, \ldots$ die Ausdrücke, in welche ABC übergehen, wenn man für die Coordinaten in ihnen nach einander setzt die Coordinaten der drei Punkte. Alsdann ist die analytische Bedingung, unter welcher die drei Punkte in einer geraden Linie liegen, die, dass man drei Factoren $\mu_0 \mu_1 \mu_2$ finden kann, welche den drei Gleichungen zugleich genügen:

$$\mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 = 0, \quad \mu_0 B_0 + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 = 0, \quad \mu_0 C_0 + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 = 0.$$

Den drei Punkten in der Ebene entsprechen drei Punktepaare in der Fundamentallinie, deren Gleichungen sind:

$$A_0 \lambda^2 + B_0 \lambda + C_0 = 0, \quad A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda + C_1 = 0, \quad A_2 \lambda^2 + B_2 \lambda + C_2 = 0.$$

Man sieht, dass diese Gleichungen, nach einander mit den Factoren μ_0, μ_1, μ_2 multiplicirt und addirt, identisch 0 geben. Das ist aber gerade die Bedingung, dass die drei Punktepaare eine Involution bilden. Daraus entspringt nun der Fundamentalsatz:

Irgend drei Punkten in einer und derselben geraden Linie der Ebene entsprechen drei Punktepaare der Involution in der Fundamentallinie. Jeden drei Punktepaaren der Involution in der Fundamentallinie entsprechen in der Ebene drei Punkte, welche auf einer geraden Linie liegen.

Es ist damit für das einfachste Figurenverhältniss in der Ebene der Ausdruck der entsprechenden Figur in der Fundamentallinie gefunden. Suchen wir ebenso umgekehrt das einfachste Figurenverhältniss in der Fundamentallinie auszudrücken für die Ebene.

In der Fundamentallinie liegen Punktepaare der verschiedensten Art vor. Jedem derselben entspricht ein Punkt in der Ebene. Unter diesen Punktepaaren giebt es solche, welche zusammenfallen, *Doppelpunkte.* Man kann die Fundamentallinie betrachten als zusammengesetzt aus lauter Doppelpunkten und wird die Frage erheben, welches das entsprechende Bild in der Ebene sei für alle Doppelpunkte.

Das Punktepaar (1) auf der Fundamentallinie wird ein Doppelpunkt, wenn die Wurzeln der Gleichung (1) einander gleich sind, das heisst unter der Bedingung:

$$2. \qquad B^2 - 4AC = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung ist aber für die Ebene der analytische Ausdruck eines Kegelschnitts. Man hat demnach den Satz:

Alle Doppelpunkte in der Fundamentallinie entsprechen in der Ebene Punkten eines und desselben Kegelschnittes, und alle Punkte dieses Kegelschnittes entsprechen Doppelpunkten in der Fundamentallinie.

Der Kegelschnitt (2) hängt von den neun Constanten ab, welche in seine Gleichung eingehen. Er kann deshalb jeder beliebige Kegelschnitt sein. Beachtet man nun, dass dieser Kegelschnitt die Grenze bildet für diejenigen Punkte xy in der Ebene, welchen reelle oder imaginäre Wurzeln λ der quadratischen Gleichung (1) entsprechen, das heisst, reellen oder imaginären Punktepaaren in der Fundamentallinie, so sieht man, dass es frei steht, diese Grenze beliebig zu verengen oder zu erweitern.

Der Kegelschnitt (2), die *Directrix*, spielt bei der Uebertragung der ebenen Figur in die Linearfigur und umgekehrt eine wichtige Rolle.

Geht man nämlich von irgend zwei Punktepaaren der Fundamentallinie aus, welchen zwei Punkte a, b der Ebene entsprechen werden, und construirt auf der Fundamentallinie alle möglichen Punktepaare, von welchen jedes eine Involution bildet mit den beiden Punktepaaren, so entsprechen diesen in der Ebene alle möglichen Punkte, welche auf der geraden Linie ab liegen. Unter den auf der Fundamentallinie construirten Punktepaaren giebt es aber bekanntlich zwei Doppelpunkte und diese, als ein einfaches Punktepaar betrachtet, sind harmonisch mit jedem der construirten Punktepaare. Die den beiden Doppelpunkten entsprechenden Punkte in der Ebene liegen nach dem letzten Satze in der Directrix. Da sie aber auch auf der geraden Linie ab liegen, so sind sie die Schnittpunkte der geraden Linie und der Directrix. Man kann deshalb sagen:

Jeden drei Punkten auf einer geraden Linie in der Ebene entsprechen auf der Fundamentallinie drei Punktepaare der Involution. Construirt man

dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist, mit jedem der drei Punktepaare der Involution und betrachtet jeden Punkt des construirten Paares als einen Doppelpunkt, so entspricht das Doppelpunktepaar auf der Fundamentallinie in der Ebene dem Schnittpunktepaar der geraden Linie und der Directrix.

Auf diese Art entsprechen den Punkten auf irgend einer Tangente der Directrix alle Punktepaare auf der Fundamentallinie, von welchen der eine Punkt der Paare unverändert bleibt, nämlich der Punkt, welcher als Doppelpunkt betrachtet dem Berührungspunkte entspricht.

So entsprechen ferner irgend zwei Punkten der Directrix zwei Doppelpunkte in der Fundamentallinie. Dem Pole der geraden Linie, welche jene beiden Punkte der Directrix verbindet, entspricht das Doppelpunktepaar auf der Fundamentallinie, wenn man jeden Doppelpunkt für einen einfachen Punkt nimmt.

So kann man endlich auch alle Sätze bezüglich eines Kegelschnittes, der Directrix hier, leicht umwandeln in Sätze der Geometrie der geraden Linie. Vereinzelte Beispiele dazu findet man in meinen Vorlesungen aus der analytischen Geometrie, Leipzig. Teubner 1865, pag. 76 und im Crelle'schen Journal Band 63 pag. 184.[1])

Sehr viel complicirter wird die Uebertragung, wenn der Kegelschnitt in der Ebene nicht mehr die Directrix sein soll. Man wird sie aber um so lieber aufnehmen, als sie auf neue Gesichtspunkte führt, die im Folgenden nur flüchtig angedeutet werden sollen.

Zu diesem Zwecke drücken wir den ersten oben angegebenen Fundamentalsatz analytisch also aus:

> Sollen Punkte in der Ebene auf einer geraden Linie liegen, so müssen ihre Coordinaten einer linearen Bedingungsgleichung genügen:
>
> $$Aa + Bb + Cc = 0.$$
>
> Derselben linearen Bedingungsgleichung müssen die Coëfficienten A, B, C in der Gleichung (1) genügen, wenn die Gleichung (1) Punktepaare auf der Fundamentallinie darstellen soll, deren entsprechende Punkte in der Ebene auf der geraden Linie liegen.

---

1) [Seite 521 und 522 dieser Ausgabe.]

Den angegebenen Satz erweitern wir nun, wenn wir sagen:

Sollen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, so müssen ihre Coordinaten x, y einer homogenen Gleichung von der zweiten Ordnung der Variabeln A, B, C genügen:

$$f(A, B, C) = 0.$$

Derselben Gleichung der zweiten Ordnung müssen die Coëfficienten A, B, C in der Gleichung (1) *genügen, wenn die Gleichung* (1) *Punktepaare auf der Fundamentallinie darstellen soll, deren entsprechende Punkte in der Ebene auf dem Kegelschnitt liegen.*

Fünf beliebig in der Ebene gewählte Punkte bestimmen den Kegelschnitt unzweideutig, der durch sie geht; ein sechster Punkt des Kegelschnittes ist nur unvollständig durch die beliebig gewählten Punkte bestimmt. Demnach können umgekehrt auf der Fundamentallinie fünf Punktepaare beliebig gewählt werden, wenn sie in der Ebene Punkten entsprechen sollen, durch welche ein Kegelschnitt geht. Ein sechtes Punktepaar auf der Fundamentallinie, welches in der Ebene einem Punkte des genannten Kegelschnittes entsprechen soll, ist einer Beschränkung unterworworfen. Der eine Punkt des Paares kann immer noch willkürlich auf der Fundamentallinie gewählt werden, der andere ist durch ihn bestimmt, aber nicht unzweideutig. Bestimmt man ihn, so liegen auf der Fundamentallinie sechs Punktepaare vor, welchen in der Ebene sechs Punkte eines Kegelschnittes entsprechen.

Diese sechs Punktepaare auf der Fundamentallinie, welchen sechs Punkte in der Ebene entsprechen, verlangen einen Namen. Sie sollen heissen *sechs Punktepaare der Involution der zweiten Ordnung.* Dieser Name ist bezeichnend. Denn wenn von den sechs Punktepaaren der Involution zweiter Ordnung drei Punktepaare eine einfache Involution bilden, so bilden die drei anderen ebenfalls eine einfache Involution.

Auf Grund der angegebenen Definition hat man nun den Fundamentalsatz:

Irgend sechs Punktepaaren der Involution zweiter Ordnung auf der Fundamentallinie entsprechen in der Ebene sechs Punkte eines Kegelschnittes, und umgekehrt entsprechen sechs Punkten eines Kegelschnittes sechs Punktepaare der Involution zweiter Ordnung auf der Fundamentallinie.

Nach der Analogie bei der einfachen Involution ergiebt sich hier die entsprechende Aufgabe:

Wenn von sechs Punktepaaren der Involution zweiter Ordnung elf Punkte beliebig gegeben sind, den zwölften Punkt zu bestimmen.

Eine einfache analytische Betrachtung lehrt, dass die Aufgabe zwei Auflösungen zulässt, dass man den gesuchten zwölften Punkt beliebig unter zwei ganz bestimmten Punkten zu wählen hat. Es soll dieses hier geometrisch nachgewiesen werden.

Durch fünf von den sechs Punktepaaren der Involution der zweiten Ordnung ist der Kegelschnitt in der Ebene bestimmt, der durch die den fünf Punktepaaren entsprechenden Punkte der Ebene geht. Von dem sechsten Punktepaare soll nur der eine Punkt gegeben sein. Dieser, als Doppelpunkt betrachtet, entspricht einem bestimmten Punkte der Directrix. Allen Punktepaaren auf der Fundamentallinie, von welchen der eine unverändert der gegebene Punkt ist, entsprechen in der Ebene Punkte auf der Tangente der Directrix, und dem Doppelpunkte der Berührungspunkt. Die erwähnte Tangente der Directrix schneidet aber den Kegelschnitt in zwei Punkten, und jeder dieser Schnittpunkte wird einem Punktepaare auf der Fundamentallinie entsprechen, von welchem der eine Punkt unverändert der gegebene Punkt bleibt. Die beiden anderen Punkte der beiden Paare werden aber verschieden sein, und jeder derselben für den zwölften Punkt der Involution zweiter Ordnung genommen werden können.

Indem wir hiermit abbrechen, sei noch erwähnt, dass man auch jede gerade Linie in der Ebene einem Punktepaare auf der Fundamentallinie eindeutig entsprechen lassen kann. Man würde dann die Coëfficienten A, B, C in der Gleichung (1) als lineare Ausdrücke der Liniencoordinaten zu nehmen haben. Das sich daraus ergebende Uebertragungsprincip wird aber schon ersetzt durch das Princip der Reciprocität.

Das entwickelte Uebertragungsprincip giebt Gelegenheit, eine grosse Zahl von neuen Sätzen aus der Geometrie der geraden Linie zu entdecken. Diese Sätze nicht allein direct zu beweisen, sondern Beweismethoden zu erfinden, welche die Sätze gleichsam als selbstverständlich

erscheinen lassen — solche Methoden giebt es —, ist eine empfehlenswerthe Aufgabe.

Mit der Lösung der Aufgabe kann man die breitere Basis der Ebene verlassen und sich auf die gerade Linie beschränken, ohne die Herrschaft über die Ebene aufzugeben. Die gerade Linie wird dann gleichsam als Telegraphenbureau dienen, auf dem man alle Zustände in der Ebene erfahren und neue Combinationen in ihr anordnen kann.

Heidelberg, November 1865.

39.

Ueber die Reciprocität der Pascal-Steiner'schen und der Kirkman-Cayley-Salmon'schen Sätze von dem Hexagrammum mysticum.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 68, Seite 193—207.]

Die Noten in Salmon's vierter Auflage seiner berühmten „Conic sections", welche von den Erweiterungen des Pascal'schen Theoremes handeln, bekunden eine in die Augen fallende Reciprocität deutscher und englischer Entdeckungen. Es stehen sich gegenüber:

60 P . . . *Pascal'sche Linien.*

60 K . . . *Kirkman'sche Punkte. In jedem derselben schneiden sich* 3 P.

20 R . . . *Steiner'sche Punkte. In jedem derselben schneiden sich* 3 P.

20 C_s . . . *Cayley-Salmon'sche Linien. Auf jeder derselben liegen* 3 K.

15 S_r . . . *Steiner'sche Linien. Auf jeder derselben liegen* 4 R.

15 S_u . . . *Salmon'sche Punkte. In jedem derselben schneiden sich* 4 C_s.

Im Angesichte dieser Thatsachen möchte man glauben, dass die Elemente, P und K, der Figuren, welche auf der einen Seite die Steiner'schen Punkte und Linien, auf der anderen Seite die Cayley'schen Linien und Salmon'schen Punkte bilden, sich als Polaren und Pole

derart auffassen lassen, dass in Rücksicht auf irgend einen Kegelschnitt jeder Pascal'schen Linie P als Polare ein Kirkman'scher Punkt K als Pol entspricht. Denn träfe dieses zu, so wären die neueren Erweiterungen des Pascal'schen Theoremes sämmtlich reciprok zu den älteren in dem Sinne von Polaren und Polen. Es würden sich daraus aber noch weitere Consequenzen ziehen lassen.

Nach Kirkman schneiden sich nämlich 60 mal drei Pascal'sche Linien P in einem Kirkman'schen Punkte K. Das fragliche Reciprocitäts-Gesetz würde daraus ergeben, dass 60 mal drei Kirkman'sche Punkte auf einer geraden Linie liegen. Da nun schon anderweit nach dem Cayley-Salmon'schen Satze 20 mal drei Kirkman'sche Punkte auf einer geraden Linie liegen, so hätte man die reciproken Sätze:

Von den 60 Kirkman'schen Punkten K liegen 20 mal drei Punkte K auf einer geraden Linie C_s, und überdies liegen 60 mal drei Kirkman'sche Punkte K auf einer geraden Linie H.

Von den 60 Pascal'schen Linien P schneiden sich 20 mal drei Pascal'sche Linien P in einem Steiner'schen Punkte R, und überdies schneiden sich 60 mal drei Pascal'sche Linien P in einem Kirkman'schen Punkte K.

Unzweifelhaft sind nach dem Vorhergehenden die ersten Theile der beiden reciproken Sätze, gleichwie der zweite Theil des letzten Satzes. Zweifelhaft, obwohl wahr, bleibt der zweite Theil des ersten Satzes; denn er ist an dieser Stelle nichts weiter, als die Consequenz der fraglichen Annahme, dass sich die Pascal'schen Linien P als Polaren der Kirkman'schen Punkte K auffassen lassen.

Es ist mir nicht gelungen, das vermuthete Reciprocitäts-Gesetz zu entdecken. Im Gegentheil weiss ich, dass diejenige Reciprocität der Pascal'schen Linien P und der Kirkman'schen Punkte K, welche ich im Folgenden entwickeln werde, sich *nicht* in dem Sinne von Polaren und Polen auffassen lässt, wenigstens nicht in Rücksicht auf *den* Kegelschnitt, dem die 60 Pascal'schen Sechsecke einbeschrieben sind. Dennoch wird man das erwähnte Reciprocitäts-Gesetz als ein ideales gelten lassen, wenn auch nur in der Absicht, entsprechende Thatsachen aus einander abzuleiten.

1.

Durch 6 auf einem Kegelschnitte C gegebene Punkte $abcdef$ lassen sich 15 gerade Linien L legen, welche jene Punkte paarweise verbinden. Diese 15 geraden Linien L bilden 60 dem Kegelschnitte C einbeschriebene Sechsecke, die mit den Buchstaben P oder Π bezeichnet werden. Dieselben Buchstaben sollen zugleich dazu dienen, die den Pascal'schen Sechsecken entsprechenden Pascal'schen Linien auszudrücken.

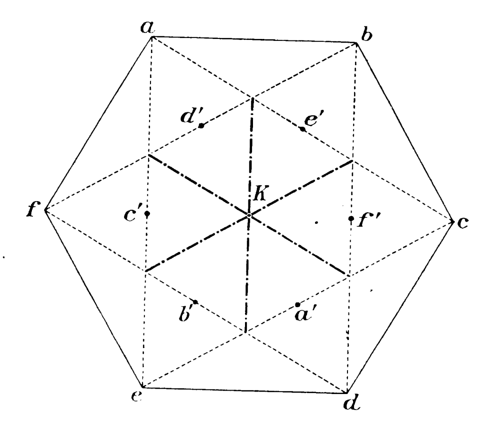
Unterdrückt man von den 15 geraden Linien L 6, welche eines von den 60 Pascal'schen Sechsecken bilden, zum Beispiel die Seiten des Sechseckes:

$$P = abcdef,$$

so bilden die 9 übrig bleibenden Linien L nur drei von den 60 Pascal'schen Sechsecken:

$$P^0 = acebfd, \qquad P' = ceadbf, \qquad P'' = eacfdb.$$

Unterdrückt man ausserdem noch die drei Hauptdiagonalen des Pascal'schen Sechseckes P, welche die gegenüber liegenden Ecken paarweise verbinden, so bleiben von den 15 Linien L, wie die Figur zeigt, die 6 punktirten geraden Linien zurück, welche zwei dem Kegelschnitte C einbeschriebene Dreiecke bilden. Die Seiten dieser Dreiecke sind bezeichnet mit denselben Buchstaben, als die ihnen gegenüber liegenden Ecken.



Diese beiden dem Kegelschnitte C einbeschriebenen Dreiecke sind nach einem bekannten Satze einem anderen Kegelschnitt C' umbeschrieben. Es ist darum das Sechseck mit den auf einander folgenden Seiten $a'b'\ldots$ ein Brianchon'sches Sechseck:

$$B = (a'b'c'd'e'f'),$$

dessen Hauptdiagonalen sich in einem Brianchon'schen Punkte K schneiden.

Dieser Punkt K ist ein Kirkman'scher Punkt.

Denn die Hauptdiagonalen des Brianchon'schen Sechseckes B sind nichts anderes, als die Pascal'schen Linien P^0, P', P'' der ebenso bezeichneten Sechsecke.

Der Kirkman'sche Punkt K heisse *der ideale Pol* der Pascal'schen Linie P, und umgekehrt soll die Pascal'sche Linie P *die ideale Polare* des Kirkman'schen Punktes K genannt werden, den wir bezeichnen mit:

$$K = P^0 P' P''.$$

In dieser Weise ist jeder Kirkman'sche Punkt K definirt als der ideale Pol einer durch ihn bestimmten Pascal'schen Linie P, wie umgekehrt jede Pascal'sche Linie als die ideale Polare eines bestimmten Kirkman'schen Punktes. *Man hat daher* 60 *Kirkman'sche Punkte gleichwie* 60 *Pascal'sche Linien.*

Um den idealen Pol einer, einem gegebenen Pascal'schen Sechseck entsprechenden Pascal'schen Linie zu construiren, lässt man nach dem Vorhergehenden von den 15 Linien L die Seiten des gegebenen Sechseckes fort. Die aus den 9 übrig bleibenden Linien L gebildeten drei Pascal'schen Sechsecke haben Pascal'sche Linien, welche sich in dem gesuchten idealen Pole schneiden. Ist umgekehrt ein Kirkman'scher Punkt K gegeben durch die drei Sechsecke, $P^0 P' P''$, deren Pascal'sche Linien sich in ihm schneiden, so braucht man nur von den 15 Linien L die 9 Linien L fortzulassen, welche die Seiten der drei Sechsecke bilden. Die übrig bleibenden 6 Linien L bilden das Sechseck, dessen Pascal'sche Linie P die gesuchte ideale Polare des Kirkman'schen Punktes K ist.

Aber auch die angenommene symbolische Bezeichnung der Pascal'schen Linien zu handhaben, macht keine Schwierigkeit. Denn läge an Stelle von P irgend eine andere von den 60 Pascal'schen Linien Π vor:

$$\Pi = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta,$$

so hätte man nur die lateinischen Buchstaben in die entsprechenden griechischen zu verwandeln, um die drei Pascal'schen Linien:

$$\Pi^0 = \alpha\gamma\varepsilon\beta\zeta\delta, \qquad \Pi' = \gamma\varepsilon\alpha\delta\beta\zeta, \qquad \Pi'' = \varepsilon\alpha\gamma\zeta\delta\beta$$

zu erhalten, welche sich in dem idealen Pole der Pascal'schen Linie Π schneiden. Von dieser Regel wollen wir gleich eine Anwendung machen.

2.

Nach dem Vorhergehenden entsprechen einer gegebenen Pascal'schen Linie drei andere Pascal'sche Linien, welche sich in dem idealen Pole der gegebenen Pascal'schen Linie schneiden. Jedem der letzteren entsprechen wieder 3, also in gewisser Weise entsprechen der gegebenen Pascal'schen Linie 9 Pascal'sche Linien, sodann 27 und so weiter. Da aber die Zahl der Pascal'schen Linien auf 60 beschränkt ist, so muss man nothwendiger Weise endlich einmal wieder auf einzelne der früheren zurückkommen. Untersuchen wir daher, wie bald dieses geschieht.

Wir gehen von der Pascal'schen Linie P aus und ihrem idealen Pole K:

$$P, \qquad K = P^0 P' P''.$$

Die idealen Pole der Pascal'schen Linien P^0, P', P'' seien respective:

$$K^0 = P_0^0 P_1^0 P_{11}^0, \qquad K' = P_0' P_1' P_{11}', \qquad K'' = P_0'' P_1'' P_{11}'',$$

indem man nach der in dem vorhergehenden Abschnitte angegebenen Regel hat:

$$\begin{array}{lll} P_0^0 = aefcdb, & P_1^0 = efabcd, & P_{11}^0 = faedbc, \\ P_0' = cabefd, & P_1' = abcdef, & P_{11}' = bcafde, \\ P_0'' = ecdabf, & P_1'' = cdefab, & P_{11}'' = decbfa. \end{array}$$

Da die Ausdrücke von P_1^0, P_1', P_1'' nur durch cyclische Vertauschungen der Elemente von dem Ausdrucke P verschieden sind, so haben wir:

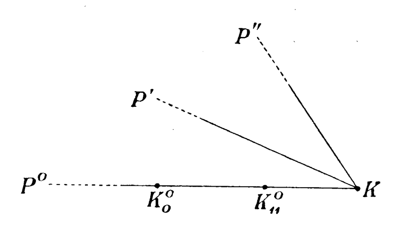
$$P_1^0 = P_1' = P_1'' = P.$$

Das will sagen, dass die idealen Pole K^0, K', K'' auf der Pascal'schen Linie P liegen, oder ausführlicher ausgedrückt:

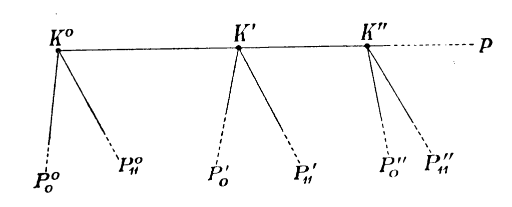
1. *Die idealen Pole der drei Pascal'schen Linien, welche durch einen Kirkman'schen Punkt gehen, liegen auf der idealen Polare des Kirkman'schen Punktes.*

Mit Rücksicht auf die eingeführten Definitionen lässt sich dieser Satz kürzer auch so aussprechen:

2. *Es liegen* 60 *mal* 3 *Kirkman'sche Punkte K auf einer Pascal'schen Linie P.*



Dieser Satz ist gerade der in der Einleitung imaginär abgeleitete Satz. Es zeigt sich aber hier, dass die gerade Linie H dort nichts anderes ist als die Pascal'sche Linie P. Die nebenstehende Figur giebt ein Bild von der Lage der besprochenen Punkte und Linien zu einander und dient zugleich für die folgende Untersuchung.



Bezeichnet man die idealen Pole der 3 Pascal'schen Linien P, P^0_0, P^0_{11}, welche sich in dem Kirkman'schen Punkte K^0 schneiden, respective mit K, K^0_0, K^0_{11}, so ist jeder derselben der Schnittpunkt von drei Pascal'schen Linien, deren Symbole nach der angegebenen Regel folgende sind:

		P^0	P'	P''
K	ist Schnittpunkt von			
K^0_0	" " "	*afdebc*	*fdaceb*	*dafbce*
K^0_{11}	" " "	*febacd*	*ebfdac*	*bfecda*.

Da die unterstrichenen Symbole der Pascal'schen Linien gleichbedeutend sind mit dem Symbole P^0, so folgt hieraus, wie vorher, dass die genannten drei Pole K, K^0_0, K^0_{11} auf der Pascal'schen Linie P^0 liegen, dass letztere also die ideale Polare des Kirkman'schen Punktes K^0 ist. Ebenso ist P' die ideale Polare des Kirkman'schen Punktes K', und P'' ist die ideale Polare des Kirkman'schen Punktes K''. Dieses beweist den Satz:

3. *Die idealen Polaren der* 3 *Kirkman'schen Punkte, welche auf einer Pascal'schen Linie liegen, schneiden sich in dem idealen Pole der Pascal'schen Linie.*

Kürzer ausgedrückt ist dieses der Kirkman'sche Satz:

4. *Es schneiden sich* 60 *mal* 3 *Pascal'sche Linien in einem Kirkman'schen Punkte.*

Die Sätze 1 und 3 durften allgemeiner nicht etwa so ausgesprochen werden:

Die idealen Pole von 3 Pascal'schen Linien, welche durch einen und denselben Punkt gehen, liegen auf einer und derselben geraden Linie.

Die idealen Polaren von 3 Kirkman'schen Punkten, welche auf einer geraden Linie liegen, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Denn man weiss aus der Einleitung, dass 3 Pascal'sche Linien sich auch in einem Steiner'schen Punkte R schneiden können. Die Lage ihrer idealen Pole ist jedoch noch unbekannt. Ebenso weiss man, dass 3 Kirkman'sche Punkte auch auf einer Cayley'schen Linie C_s liegen können. Die Lage ihrer idealen Polaren ist ebenfalls unbekannt.

Es wird sich nun darum handeln, die Lage der idealen Pole von 3 Pascal'schen Linien zu erforschen, welche sich in einem Steiner'schen Punkte R schneiden, um den ersten Parallelsatz möglicher Weise zur Geltung zu bringen. Man wird die Lage der idealen Polaren von 3 Kirkman'schen Punkten, welche auf einer Cayley'schen Linie liegen, zu untersuchen haben, um den zweiten Parallelsatz zu prüfen. Diesen Zwecken werden die folgenden Abschnitte dienen.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass die eben aufgeführten Parallelsätze nur den leitenden Gedanken für die nachfolgenden Untersuchungen herzugeben bestimmt sind. Auf Realität machen sie keinen Anspruch. Denn wenn auch die zu untersuchende Lage der hervorgehobenen Punkte und Linien eine solche ist, dass sie die Sätze bestätigt, so wird man doch Anstand nehmen müssen, die Sätze in so grosser Allgemeinheit auszusprechen, weil man nicht weiss, ob nicht 3 Pascal'sche Linien sich auch anders als in einem Kirkman'schen oder Steiner'schen Punkte schneiden können, und weil man ferner nicht weiss, ob nicht 3 Kirkman'sche Punkte anders auf einer geraden Linie liegen können, als auf einer Pascal'schen oder Cayley'schen.

3.

Von den 15 geraden Linien L, welche die auf dem Kegelschnitt C gegebenen 6 Punkte paarweise verbinden, unterdrückten wir in § 1 6 Linien,

welche eines von den 60 Pascal'schen Sechsecken bildeten. Die übrig bleibenden 9 bildeten nur 3 von den 60 Pascal'schen Sechsecken. Unterdrücken wir jetzt von den 15 geraden Linien L wieder 6 Linien, welche aber zwei dem Kegelschnitte C einbeschriebene Dreiecke mit verschiedenen Ecken bilden, so lassen sich aus den 9 übrig bleibenden geraden Linien L 6 von den 60 Pascal'schen Sechsecken bilden. Unterdrücken wir zum Beispiel die punktirten Seiten der beiden Dreiecke ace und bdf, so lassen sich aus den übrig bleibenden 9 geraden Linien L die 6 Pascal'schen Sechsecke bilden:

$$P = abcdef, \qquad P_1 = afcbed, \qquad P_{11} = adcfeb,$$
$$\Pi = abcfed, \qquad \Pi_1 = afcdeb, \qquad \Pi_{11} = adcbef.$$

Sämmtliche 6 Sechsecke sind gebildet aus den Seiten und den Hauptdiagonalen eines von ihnen. Sie bilden, wie in der Bezeichnung angedeutet worden, zwei Gruppen von 3 Sechsecken. Das Sechseck P_1 ist gebildet aus den geraden Seiten und den Hauptdiagonalen des Sechsecks P, und das Sechseck P_{11} aus den ungeraden Seiten und den Hauptdiagonalen desselben Sechsecks P. Gleiches gilt von der zweiten Gruppe. Kurz, man erhält aus einem dieser Sechsecke die beiden anderen derselben Gruppe, wenn man in demselben entweder die geraden oder die ungeraden Seiten unterdrückt und dafür die Hauptdiagonalen substituirt.

Von jeder dieser Gruppen Sechsecke gilt der Satz:[1])

5. *Wenn man in einem gegebenen Pascal'schen Sechsecke die* 3 *Diagonalen zieht, welche die gegenüber liegenden Ecken verbinden, so bilden die geraden Seiten und die Diagonalen ein zweites Pascal'sches Sechseck mit denselben Ecken als das gegebene, ebenso die ungeraden Seiten und die Diagonalen ein drittes Pascal'sches Sechseck. Die diesen* 3 *Sechsecken zugehörigen Pascal'schen Linien schneiden sich in einem und demselben Punkte.*

Demnach schneiden sich die 3 Pascal'schen Linien P, P_1, P_{11} in einem Punkte R, und die 3 Pascal'schen Linien Π, Π_1, Π_{11} in einem Punkte P. Dieses sind Steiner'sche Punkte, welche wir kürzer bezeichnen können mit:

$$R = PP_1P_{11}, \qquad P = \Pi\Pi_1\Pi_{11}.$$

1) Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie in der Ebene, p. 119.

Von ihnen gilt der Satz:[1])

6. *Die Steiner'schen Punkte R und P, welche abhängen von den hervorgehobenen 6 Pascal'schen Sechsecken, sind harmonische Pole des Kegelschnittes, dem die Sechseke einbeschrieben sind.*

Da hiernach die 20 Steiner'schen Punkte R und P sich zu harmonischen Polen des Kegelschnittes C paaren, so wird man, um sich präciser auszudrücken, von den 10 Steiner'schen Punktepaaren R und P sprechen können.

Doch sehen wir ab von dem Satze 6., der hier nur im Zusammenhange aufgeführt worden ist, um später auf ihn Bezug zu nehmen, so handelt es sich zunächst um die Feststellung der idealen Pole der 3 Pascal'schen Linien P, P_1, P_{11}, welche sich in dem Steiner'schen Punkte R schneiden.

Den idealen Pol K der Pascal'schen Linie $P = abcdef$ haben wir in § 1 unabhängig von der Figur mit dem Zeichen $K = PP'P''$ eingeführt. Da diese Bezeichnung in dem vorliegenden Falle von keinem Nutzen ist, so verlassen wir dieselbe, indem wir auf die Construction des idealen Poles K der Pascal'schen Linie P in § 1 zurückgehen. Dieser ideale Pol ergab sich dort als der Brianchon'sche Punkt des Sechseckes $B = (a'b'c'd'e'f')$, welches dem Kegelschnitt C' umschrieben ist. Wir werden ihn mit Rücksicht auf die Figur bezeichnen mit:

$$K = a'b'c'd'e'f', \text{ als id. Pol d. Pasc. Linie } P = abcdef.$$

Diese Bezeichnung ist für den vorliegenden Fall darum so einfach, weil man, ohne die Figur zu erweitern, aus der am Anfange des Paragraphen gebrauchten Bezeichnung der Pascal'schen Linien P, P_1, P_{11} und Π, Π_1, Π_{11}, die Bezeichnung ihrer idealen Pole $K, K_1, K_{11}, Q, Q_1, Q_{11}$, als Brianchon'sche Punkte, einfach dadurch erhält, dass man jedem Buchstaben $ab \ldots$ einen Index anhängt wie folgt:

$$K = a'b'c'd'e'f', \qquad K_1 = a'f'c'b'e'd', \qquad K_{11} = a'd'c'f'e'b',$$
$$Q = a'b'c'f'e'd', \qquad Q_1 = a'f'c'd'e'b', \qquad Q_{11} = a'd'c'b'e'f'.$$

1) „Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid", Band 24 des Crelle'schen Journals p. 43 [diese Ausgabe, Seite 60 und 61] und Schroeter: „Steiner'sche Vorlesungen" p. 164.

Diese Regel verdankt man dem Umstande, dass für sämmtliche 6 Sechsecke P und Π die Dreiecke ace und bdf, welche zur Construction ihrer idealen Pole erforderlich sind, unverändert dieselben bleiben.

Man braucht nach dem Vorhergehenden von den 6 Pascal'schen Sechsecken P und Π nur ein Sechseck zu kennen. Denn alle 6 setzen sich zusammen aus den Seiten des einen und seinen Hauptdiagonalen. Die übrigen von den 60 Pascal'schen Sechsecken sind dabei ausgeschlossen. Es bilden darum die 60 Pascal'schen Sechsecke 10 Gruppen von 6 Pascal'schen Sechsecken, von welchen wir nur die eine Gruppe hervorgehoben haben. Der hervorgehobenen Gruppe entspricht ein einziger Kegelschnitt, den wir mit C' bezeichnet haben. Man hat daher den Satz:

7. *Wenn man sämmtliche* 15 *Verbindungslinien der Ecken eines Pascal'schen Sechseckes construirt, so werden* 10 *mal* 6 *von diesen Verbindungslinien von einem Kegelschnitte berührt.*

Man hat daher 10 solcher Kegelschnitte C' in erster Linie entsprechend den 10 hervorgehobenen Gruppen von 6 Pascal'schen Sechsecken und in zweiter Linie entsprechend den 10 Steiner'schen Punktepaaren R und P.

4.

Der reciproke Satz von dem als 5. angegebenen lehrt, dass die Brianchon'schen Punkte K, K_1, K_{11} auf einer geraden Linie liegen. Es bedarf aber nicht jenes reciproken Satzes; die Figur weist dasselbe auch nach.

Bezeichnet man nämlich die Berührungspunkte der Seiten des Brianchon'schen Sechseckes B und des Kegelschnittes C' mit gleichen Buchstaben als die Seiten, so hat man, den 6 hervorgehobenen Brianchon'schen Sechsecken entsprechend, 6 dem Kegelschnitte C' einbeschriebene Pascal'sche Sechsecke:

$$p = a'b'c'd'e'f', \qquad p_1 = a'f'c'b'e'd', \qquad p_{11} = a'd'c'f'e'b',$$
$$\pi = a'b'c'f'e'd', \qquad \pi_1 = a'f'c'd'e'b', \qquad \pi_{11} = a'd'c'b'e'f',$$

deren Pascal'sche Linien $p, p_1, p_{11}, \ldots$ einfach Polaren sind der Brianchon'schen Punkte $K, K_1, K_{11}, \ldots$ rücksichtlich des Kegelschnittes C'.

Da nach dem Satze 5. die genannten Polaren sich in einem Punkte schneiden, so liegen ihre Pole, also jene Brianchon'schen Punkte, auf einer geraden Linie.

Da nun jedem der Pascal'schen Sechsecke p des Kegelschnittes C' auf der einen Seite ein Pascal'sches Sechseck P des Kegelschnittes C, auf der anderen Seite ein Brianchon'sches Sechseck K entspricht, so entspricht auch jedem Pascal'schen Sechsecke P ein Brianchon'sches K und den 3 Pascal'schen Sechsecken P, deren Pascal'sche Linien P sich in einem Steiner'schen Punkte R schneiden, entsprechen 3 Brianchon'sche Sechseke K, deren Brianchon'sche Punkte, das sind die idealen Pole der 3 Pascal'schen Linien P, auf einer geraden Linie liegen. Diese gerade Linie ist eine Cayley'sche Linie C_s, denn die 3 idealen Pole, welche auf ihr liegen, sind Kirkman'sche Punkte. Wir drücken dieses kurz so aus:

8. *Die idealen Pole der 3 Pascal'schen Linien, welche sich in einem Steiner'schen Punkte schneiden, liegen auf einer Cayley'schen Linie.*

Den 20 Steiner'schen Punkten entsprechen in dieser Weise 20 Cayley'sche Linien. Es ist daher der angegebene Satz ein anderer Ausdruck für den Cayley'schen Satz:

9. *Es liegen 20 mal 3 Kirkman'sche Punkte auf einer Cayley'schen Linie.*

Die 3 Pascal'schen Linien, welche sich in einem Steiner'schen Punkte schneiden, sind die idealen Polaren der 3 Punkte, welche auf der Cayley'schen Linie liegen. Desshalb kann man den Satz 6. auch umkehren wie folgt:

10. *Die idealen Polaren der 3 Kirkman'schen Punkte, welche auf einer Cayley'schen Linie liegen, schneiden sich in einem Steiner'schen Punkte.*

Da nach den Sätzen 8. und 10. jedem Steiner'schen Punkte eine ganz bestimmte Cayley'sche Linie entspricht, so wie umgekehrt jeder Cayley'schen Linie ein ganz bestimmter Steiner'scher Punkt, so müssen sich die 20 Cayley'schen Linien paaren in der Weise der 20 Steiner'schen Punkte. Präciser wird man daher von den 10 Cayley'schen Linienpaaren sprechen können.

Das Cayley'sche Linienpaar, auf welchem die Kirkman'schen Punkte K, K_1, K_{11} und Π, Π_1, Π_{11} liegen, ist zweifellos ein Paar har-

monischer Polaren des Kegelschnittes C'. Dasselbe Linienpaar würde natürlich auch ein Paar harmonischer Polaren sein des in der Einleitung angenommenen idealen Kegelschnittes. Ob dasselbe Linienpaar auch ein Paar harmonischer Polaren sei des Kegelschnittes C, soll eine offene Frage sein.

Die bis dahin als zweifellos aufgeführten Sätze 1. bis 10. bekunden eine vollständige Reciprocität der 60 Pascal'schen Linien und der 60 Kirkman'schen Punkte. Diese Reciprocität bleibt in dem gewöhnlichen Sinne eine ideale, so lange nicht ein Kegelschnitt gefunden werden kann, in Rücksicht auf welchen jede Pascal'sche Linie als die gewöhnliche Polare eines Kirkman'schen Punktes erscheint. Existirt ein solcher Kegelschnitt, so erstreckt sich die Reciprocität weiter auf Steiner'sche Punkte und Cayley'sche Linien, sowie auf Steiner'sche Linien und Salmon'sche Punkte. Existirt aber ein solcher Kegelschnitt nur in der Idee, so wird die Prüfung des in der Einleitung nur unter einer gewissen Voraussetzung ausgesprochenen Reciprocitätsgesetzes schon bei den Steiner'schen Punkten R und den ihnen unzweideutig entsprechenden Cayley'schen Linien C_s zu beginnen haben, wie folgt:

Da nach 8. die idealen Pole der 3 Pascal'schen Linien, welche sich in einem Steiner'schen Punkte schneiden, auf einer Cayley'schen Linie liegen, so wird man diese gerade Linie für die *ideale Polare des Steiner'schen Punktes* zu nehmen haben. Da nach 10. die idealen Polaren der 3 Kirkman'schen Punkte, welche auf einer Cayley'schen Linie liegen, sich in einem Steiner'schen Punkte schneiden, so wird letzterer als der *ideale Pol der Cayley'schen Linie* zu definiren sein.

Auf Grund dieser Definition entspricht jedem Steiner'schen Punkte als idealem Pole eine ganz bestimmte Cayley'sche Linie als ideale Polare und umgekehrt.

Es hat aber Salmon an der bezeichneten Stelle bewiesen, dass auf einer Cayley'schen Linie nicht allein 3 Kirkman'sche Punkte liegen (deren ideale Polaren sich in dem Pole der Cayley'schen Linie schneiden), sondern dass auf derselben Cayley'schen Linie auch ein Steiner'scher Punkt liegt. Da nun der ideale Pol der Cayley'schen Linie auch ein Steiner'scher Punkt ist, so entsprechen 2 Steiner'sche Punkte einander, als Pol einer Cayley'schen Linie und als Punkt auf ihr, und es

entsteht die Frage, ob hiernach die 20 Steiner'schen Punkte sich in dem Sinne paaren, wie in § 3.

Die 3 Kirkman'schen Punkte und der Steiner'sche Punkt, welche auf derselben Cayley'schen Linie liegen, haben ideale Polaren, von welchen man weiss, dass die 3 ersteren sich in dem idealen Pole der Cayley'schen Linie schneiden. Soll nun der ideale Pol im weiteren Sinne seinen Namen verdienen, so wird nachzuweisen sein, dass auch die ideale Polare des genannten Steiner'schen Punktes durch ihn geht.

Die zuletzt angeregte Untersuchung lässt sich auch auf einem anderen Wege durchführen. Da nämlich nach Salmon durch einen gegebenen Steiner'schen Punkt nicht allein 3 Pascal'sche Linien gehen, deren ideale Pole auf der idealen Polare des gegebenen Steiner'schen Punktes liegen, sondern auch eine Cayley'sche Linie, so entsteht die Frage, ob auch der ideale Pol der Cayley'schen Linie auf der idealen Polare des gegebenen Steiner'schen Punktes liegt.

Diese Fragen sollen in dem folgenden Paragraphen beantwortet werden.

5.

Wir gehen von dem Steiner'schen Punkte P des § 3 aus:

$$P = \Pi \, \Pi_1 \, \Pi_{11},$$

in welchem sich die Pascal'schen Linien schneiden, die dort bezeichnet wurden mit:

$$\Pi = abcfed, \qquad \Pi_1 = afcdeb, \qquad \Pi_{11} = adcbef.$$

Ihre idealen Pole bezeichnen wir mit:

$$Q = \Pi^0 \, \Pi' \, \Pi'', \qquad Q_1 = \Pi_1^0 \, \Pi_1' \, \Pi_1'', \qquad Q_{11} = \Pi_{11}^0 \, \Pi_{11}' \, \Pi_{11}'',$$

indem wir nach der in Paragraph 1 angegebenen Regel haben:

$$\begin{array}{lll} \Pi^0 = acebdf, & \Pi' = ceafbd, & \Pi'' = eacdfb, \\ \Pi_1^0 = acefbd, & \Pi_1' = ceadfb, & \Pi_1'' = eacbdf, \\ \Pi_{11}^0 = acedfb, & \Pi_{11}' = ceabdf, & \Pi_{11}'' = eacfbd. \end{array}$$

Die 3 idealen Pole Q, Q_1, Q_{11} stellen wir zusammen mit dem Steiner'schen Punkte:

$$R = P P_1 P_{11},$$

der mit dem Steiner'schen Punkte P, von dem wir ausgingen, ein Paar von den 10 Steiner'schen Punktepaaren bildet, und wiederholen die Bedeutung der Pascal'schen Linien:

$$P = abcdef, \qquad P_1 = afcbed, \qquad P_{11} = adcfeb.$$

Von diesen 4 Punkten, den 3 Kirkman'schen Punkten Q, Q_1, Q_{11} und dem Steiner'schen Punkte R, hat Salmon in den oben angegebenen Noten nachgewiesen, dass sie auf einer und derselben Cayley'schen Linie liegen. Es wird dieses sogleich ersichtlich, wenn man die hier eingeführte Bezeichnung in die Salmon'sche überträgt. Auf den Beweis gehen wir nicht weiter ein. Denselben Satz drücken wir aber so aus:

11. *Die ideale Polare eines jeden Steiner'schen Punktes geht durch seinen Gegenpunkt, der mit ihm ein Steiner'sches Punktepaar bildet.*

Dieser Satz lässt sich auch umkehren wie folgt:

12. *Der ideale Pol einer jeden Cayley'schen Linie liegt auf ihrer Gegenlinie, welche mit ihr ein Cayley'sches Linienpaar bildet.*

Hiermit ist die erste am Ende des vorhergehenden Paragraphen aufgeworfene Frage entschieden, dass der Pol einer Cayley'schen Linie und der Steiner'sche Punkt auf ihr sich paaren in dem Sinne wie Paragraph 3. Aber auch die anderen erhobenen Fragen werden durch die angegebenen Sätze beantwortet.

Wir begnügen uns, eine gewisse Art der Reciprocität der Pascal'schen Linien und der Steiner'schen Punkte mit den Kirkman'schen Punkten und den Cayley'schen Linien in dem Vorhergehenden nachgewiesen zu haben. In der Voraussicht eines Kegelschnittes, für welchen jenes ideale Reciprocitätsverhältniss ein reelles wird, unternehmen wir es nicht weiter, das ideale Reciprocitätsverhältniss auch auf Steiner'sche Linien und Salmon'sche Punkte auszudehnen.

Aber selbst in dem Falle, dass der ersehnte Kegelschnitt existirt, umschwebt die von den genannten Linien und Punkten gebildete Figur

eine gewisse Unklarheit. Sie besteht darin, dass man zwar a posteriori erkennt, dass eine Figur mit den beschriebenen Eigenschaften besteht, dass man aber a priori nicht einsieht, warum eine solche Figur, abgesehen von den Pascal'schen Sechsecken, bestehen muss. Die Lage der 10 Steiner'schen Punktepaare und der 15 Steiner'schen Linien zu einander ist bekannt.[1]) Der reciproke Satz von dem, welcher ihre Lage verdeutlicht, zeigt an, wie die 10 Cayley'schen Linienpaare und die 15 Salmon'schen Punkte zu einander liegen.

Es fehlt zur Zeit jedoch ein Bild für die Pascal'schen Linien und die Kirkman'schen Punkte. Ein zu erfindender Satz, der die Endeigenschaften der Figur im Auge hat, wird dieses Bild deutlich machen können.

Zum Schlusse wollen wir noch eine Idee entwickeln, wie ältere französische Forschungen von Lagrange und Vandermonde über die Auflösung der Gleichungen des sechsten Grades sich wohl in Zusammenhang bringen lassen werden mit den in der Einleitung hervorgehobenen Sätzen.

Wenn man sich die 6 Ecken des Pascal'schen Sechsecks bestimmt denkt durch den Schnitt einer Curve zweiter Ordnung und einer Curve dritter Ordnung, welche durch ihre Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gegeben seien, so drücken die in dem Vorhergehenden besprochenen Sätze, algebraisch aufgefasst, Eigenschaften der Wurzeln der gegebenen beiden Gleichungen aus. Der Pascal'sche Satz ist zwar unsymmetrisch in Rücksicht auf die Wurzeln der gegebenen Gleichungen; er wird aber symmetrisch, wenn man das ganze System der 60 Pascal'schen Linien in das Auge fasst. Die Gleichung dieses Systems wird vom sechzigsten Grade und lässt sich wegen der Symmetrie der Wurzeln rational durch die Coëfficienten in den gegebenen Gleichungen ausdrücken.

Da das System der 10 Steiner'schen Punktepaare symmetrisch liegt gegen die 6 Ecken des Pascal'schen Sechsecks,[2]) so wird sich dasselbe durch eine Gleichung des zwanzigsten Grades rational in den Coëfficienten

1) Bd. 41 des Crelle'schen Journals, pag. 269 [No. 17 dieser Ausgabe, Seite 253].

2) Ebendaselbst.

der gegebenen Gleichungen ausdrücken lassen. Nimmt man jedoch an Stelle der 10 Steiner'schen Punktepaare 10 neue Steiner'sche Linien P, von welchen jede ein Punktepaar verbindet, so lässt sich das System der 10 Steiner'schen Linien P durch eine in den Coëfficienten der gegebenen Gleichung rationale Gleichung $P = 0$ des zehnten Grades darstellen. Ebenso stellt sich das System der 15 Steiner'schen Linien S_r als eine rationale Gleichung $S_r = 0$ des fünfzehnten Grades dar. Es sind dieses allerdings Gleichungen mit zwei Unbekannten, die aber das Gemeinsame mit den Gleichungen von einer Unbekannten haben, dass sie sich in lineare Factoren der Unbekannten zerlegen lassen.

Diese Gleichungen des zehnten und fünfzehnten Grades scheinen mir für die Auflösung der gegebenen Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$, welche sich ja auf eine Gleichung des sechsten Grades zurückführen lässt, das Analogon von dem zu sein, was die Resolventen von Lagrange[1]) und Vandermonde des zehnten und fünfzehnten Grades für die Gleichung des sechsten Grades sind. Die Grade der Gleichungen wenigstens stimmen überein, und die Coëfficienten in ihnen sind in beiden Fällen rationale Ausdrücke gegebener Grössen. Die folgende Behandlung einer biquadratischen Gleichung wird diese Ansicht weiter unterstützen.

Die Aufgabe, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, führt auf die Factorenzerfällung einer einzigen Gleichung mit zwei Unbekannten zurück. Denn wenn man die gegebenen, homogen gemachten Gleichungen vom $p$ten und $q$ten Grade:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

mit der Gleichung eines Punktes in Liniencoordinaten u, v, w,

$$A \equiv ux + vy + wz = 0,$$

zusammenstellt und die Unbekannten x, y, z eliminirt, so erhält man eine Resultante:

$$R = 0,$$

1) Lagrange, Traité de la résolution des équations numériques, pag. 262 [der Ausgabe v. J. 1808; Note 13, No. 29 und 41; Oeuvres de Lagrange, vol. VIII, pag. 313 und 327].

die sich in pq Factoren zerlegen lässt, und die Coëfficienten von u, v, w in jedem Factor werden die homogenen Wurzeln der gegebenen Gleichungen sein. Die Resultante ist frei von jedem überflüssigen Factor, wenn sie in Rücksicht auf die Coëfficienten in der einen gegebenen Gleichung von dem Grade der anderen ist.

Es ist zu bedauern, dass man noch kein Gesetz kennt, nach welchem die von überflüssigen Factoren freie Determinante gebildet werden kann. Diesem Mangel an Eliminationsmitteln ist es vornehmlich zuzuschreiben, dass die bekannten Sätze aus der Theorie der Gleichungen mit einer Unbekannten, welche sich als Sätze aus der Geometrie auf der geraden Linie auffassen lassen, nicht auf die Ebene und den Raum, das ist, auf Gleichungen mit 2 und mehreren Unbekannten ausgedehnt worden sind — eine Ausdehnung, zu welcher „das Uebertragungsprincip aus der Ebene in die gerade Linie und umgekehrt"[1]) ein geeignetes Mittel zu sein scheint. —

In dem Falle, dass die gegebenen Gleichungen beide vom zweiten Grade sind, verschwindet die Determinante:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} f'(x), & f'(y), & f'(z) \\ \varphi'(x), & \varphi'(y), & \varphi'(z) \\ u, & v, & w \end{vmatrix}$$

zugleich mit f, φ und A. Eliminirt man deshalb aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} f = 0, \qquad & \varphi = 0, \qquad & \varDelta = 0, \\ xA = 0, \qquad & yA = 0, \qquad & zA = 0, \end{aligned}$$

die Potenzen und Producte der Variabeln x, y, z, wie aus linearen Gleichungen, so erhält man die gesuchte Resultante vom vierten Grade:

$$R = 0,$$

die 4 Punkte in der Ebene darstellt.

Durch diese 4 Punkte lassen sich 3 Linienpaare legen. Für den Schnittpunkt eines jeden der 3 Linienpaare existiren die Gleichungen:

$$f'(y)\varphi'(z) - f'(z)\varphi'(y) = 0, \qquad f'(z)\varphi'(x) - f'(x)\varphi'(z) = 0,$$
$$f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x) = 0.$$

1) Band 66 des Crelle'schen Journals, p. 15 und Zeitschrift für Mathematik und Physik, XI, p. 417 [No. 38 dieser Ausgabe].

Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen und aus den Gleichungen:

$$xA = 0, \qquad yA = 0, \qquad zA = 0$$

die Potenzen und Producte der Unbekannten x, y, z wie aus linearen Gleichungen, so erhält man eine Gleichung des dritten Grades:

$$S = 0,$$

welche die genannten 3 Schnittpunkte ausdrückt.

Diese Gleichung $S = 0$ des dritten Grades ist zweifellos die Resolvente der Resultante $R = 0$ vom vierten Grade. Die 4 Factoren der letzten Gleichung setzen sich aus den 3 Factoren der ersten Gleichung linear zusammen, wie die Wurzeln einer biquadratischen aus den Wurzeln ihrer Resolvente.

Heidelberg, im December 1867.

40.

Ein Determinantensatz.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 69, Seite 319—322.]

Die Determinante A:

1. $$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n$$

ist eine lineare Function einer beliebigen Verticalreihe und eine lineare Function einer beliebigen Horizontalreihe ihrer Elemente; sie ist in Rücksicht auf beide Elementenreihen, die wir als Variable betrachten wollen, von der zweiten Ordnung, wie sich dieses in der Entwicklung der Determinante A zeigt:

$$A = \frac{\partial A}{\partial a_p^q} a_p^q + \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 A}{\partial a_\varkappa^q \partial a_p^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda = \frac{\partial A}{\partial a_p^q} a_p^q - \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 A}{\partial a_p^q \partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda.$$

Wenn wir nun B definiren durch die Gleichung:

2. $$B = \frac{\partial A}{\partial a_p^q},$$

so lässt sich die Determinante A durch B und die variabeln Elemente so ausdrücken:

$$A = B a_p^q - \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda.$$

Um dem rechten Theile dieser Gleichung eine andere Form zu geben, definiren wir das Product P aus zwei in Rücksicht auf die variabeln Elemente linearen Factoren wie folgt:

3. $$P = \sum_\varkappa \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\beta} a_\varkappa^q . \sum_\lambda \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\lambda} a_p^\lambda,$$

indem wir unter α und β, wie vorhin unter p und q, irgend welche, selbst gleiche, Zahlen verstehen aus der Reihe 0, 1, ... n.

Man hat also

$$P = \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\beta} \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda.$$

Es ist nun ein bekannter Determinantensatz:

$$\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\beta} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\lambda} - \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} = B \frac{\partial^2 B}{\partial a_\varkappa^\beta \partial a_\alpha^\lambda} = -B \frac{\partial^2 B}{\partial a_\alpha^\beta \partial a_\varkappa^\lambda}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $a_\varkappa^q a_p^\lambda$ und addirt die Summe der Gleichungen, rücksichtlich $\varkappa$ und λ genommen, zu der vorhergehenden, so erhält man:

$$P - \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta} \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda = -B \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 B}{\partial a_\alpha^\beta \partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda.$$

Addirt man endlich diese Gleichung zu der mit $\frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta}$ multiplicirten Gleichung, welche die letzte Entwicklung der Determinante A darstellte, so erhält man:

$$4. \qquad A \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta} + P = B \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta} a^q - B \sum_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 B}{\partial a_\alpha^\beta \partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^q a_p^\lambda,$$

eine Gleichung, welche auf Grund der Definitionen (1), (2), (3) besteht.

Diese Determinantengleichung scheint mir wichtig besonders wegen der Folgerungen, die sich daraus ziehen lassen. Denn wenn B verschwindet, so hat man:

$$5. \qquad A \frac{\partial B}{\partial a_\alpha^\beta} = -P.$$

Es beweist dieses den Satz:

6. *Wenn eine Determinante* $A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$ *gegeben ist, deren Unterdeterminante* $\frac{\partial A}{\partial a_p^q}$ *verschwindet, so zerfällt die gegebene Determinante in zwei Factoren von der Form:*

$$A = (\lambda_0 a_0^q + \lambda_1 a_1^q + \cdots + \lambda_n a_n^q)(\lambda^0 a_p^0 + \lambda^1 a_p^1 + \cdots + \lambda^n a_p^n).$$

Um zu specialisiren, wollen wir annehmen, dass $p = q = n$ und $\alpha = \beta = n - 1$ seien. Alsdann wird $B = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_{n-1}^{n-1}$, und die ausführliche hingeschriebene Gleichung (5) ist:

$$7. \quad \begin{aligned} -A \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} = & \left\{ \frac{\partial B}{\partial a_0^{n-1}} a_0^n + \frac{\partial B}{\partial a_1^{n-1}} a_1^n + \dots + \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} a_{n-1}^n \right\} \\ & \times \left\{ \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^0} a_n^0 + \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^1} a_n^1 + \dots + \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} a_n^{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

Man wird bemerken, dass jeder der beiden Factoren des rechten Theiles der Gleichung sich wieder als eine Determinante darstellen lässt.

Nimmt man ferner an, dass B eine symmetrische Determinante sei, dass nämlich sämmtliche Elemente in ihr $a_\varkappa^\lambda = a_\lambda^\varkappa$ seien, so ist auch $\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} = \frac{\partial B}{\partial a_\lambda^\varkappa}$. In diesem Falle werden die Coëfficienten in dem einen Factor den correspondirenden Coëfficienten des anderen Factors gleich.

Nimmt man endlich an, dass die Determinante A eine symmetrische sei, woraufhin auch die Determinante B symmetrisch sein wird, so wird der rechte Theil der Gleichung (7) ein Quadrat, und man hat zu (6) den Zusatz:

8. *Wenn eine Determinante* $A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n$ *symmetrisch ist, und wenn die Unterdeterminante* $B = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_{n-1}^{n-1}$ *verschwindet, so ist die Determinante* A *das Quadrat einer linearen, homogenen Function der* n *Variabeln* $a_0^n = a_n^0$, $a_1^n = a_n^1$, $\dots$ $a_{n-1}^n = a_n^{n-1}$.[1])

Ich will nicht unterlassen, auf ein Paradoxon aufmerksam zu machen, welches sich mir bei Prüfung der dargelegten Determinantensätze aufdrängte.

Wenn ich weiter keine Voraussetzungen mache, als dass in der Determinante sei: $a_n^n = 0$, und dass $B = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_{n-1}^{n-1}$, so ist die Entwickelung der Determinante:

$$A = - \sum_{\varkappa \lambda} \frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda} a_\varkappa^n a_n^\lambda,$$

1) Den Satz (8) findet man von Herrn Weierstrass bewiesen in dem Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 4. März 1858, p. 211. Denn seine von einem Factor abgelöste Function $\vartheta_\mu = \Sigma_{\alpha\beta} f(s_\mu)_{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta$, welche er als das Quadrat einer linearen Function darstellt, ist, wenn man $a_0^n = \Phi_0$, $a_1^n = \Phi_1$, $\dots$ $a_{n-1}^n = \Phi_{n-1}$ und $a_n^n = 0$ setzt, gerade die symmetrische Determinante A, deren Unterdeterminante $B = f(s_\mu)$ verschwindet.

und die n^2 Unterdeterminanten $\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda}$ von B, welche als Coëfficienten in der Entwickelung auftreten, sind eben so willkürlich als die n^2 Elemente, aus welchen die Determinante B besteht. Ich kann daher eine jede Summe von der angegebenen Form, welche Werthe auch die Coëfficienten $\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda}$ haben, im Allgemeinen als eine Determinante A darstellen.

Wenn ich nun, um von der Gleichung (7) Gebrauch zu machen, die unter der Voraussetzung $B = 0$ besteht, bemerke, dass:

$$B^{n-1} = \Sigma \pm \frac{\partial B}{\partial a_0^0} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_1^1} \cdots \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}},$$

so sehe ich, dass es nur der einzigen Bedingung bedarf:

$$\Sigma \pm \frac{\partial B}{\partial a_0^0} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_1^1} \cdots \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} = 0,$$

um die angegebene Summe in zwei Factoren zu zerlegen, wozu doch bekanntlich mehrere Bedingungen erforderlich sind.

Um dieses Paradoxon aufzuklären, sage ich mir, dass die bezeichnete Summe sich immer als eine Determinante darstellen lässt, ausgenommen in dem Falle, wenn die Coëfficienten $\frac{\partial B}{\partial a_\varkappa^\lambda}$ in ihr der einzigen Bedingungsgleichung

$$\Sigma \pm \frac{\partial B}{\partial a_0^0} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_1^1} \cdots \frac{\partial B}{\partial a_{n-1}^{n-1}} = 0$$

genügen. In diesem Falle giebt es keinen Determinantenausdruck für die Summe. Sie lässt sich aber wieder als eine Determinante darstellen, wenn noch andere Bedingungen hinzutreten, auf Grund deren sie in zwei Factoren von der angegebenen Form zerfällt.

41.

Note über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 73, Seite 371. Vorher französisch, in etwas anderer Fassung, in: Bulletin des sciences mathématiques etc. par Darboux, Band 1, Seite 196—197 erschienen.]

Bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung im zwanzigsten Bande des Crelle'schen Journals habe ich das daselbst p. 307[1]) sich findende Theorem 14 aufgestellt, welchem man folgende etwas elegantere Form geben kann.

Theorem.

„Irgend sechs Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung lassen sich betrachten als die Ecken eines Sechsecks im Raume. Die drei von einem beliebigen Punkte ausgehenden geraden Linien, von welchen jede ein Paar gegenüber liegender Seiten des Sechsecks schneidet, bestimmen, wenn man ihre Schnittpunkte in der Reihenfolge der Seiten des Sechsecks verbindet, ein dem Sechseck einbeschriebenes Sechseck, welches auf einem Hyperboloïd liegt. Die beiden in gleicher Weise aus dem siebenten und achten Schnittpunkte der drei Oberflächen dem Sechsecke im Raum einbeschriebenen Sechsecke liegen auf einem und demselben Hyperboloïd."

---

1) [Seite 49 dieser Ausgabe.]

In dieser Darstellung erkennt man sogleich, dass das Theorem eine Ausdehnung des Pascal'schen Theorems vom Hexagrammum mysticum ist.

Denn wenn das erste Sechseck im Raume ein Sechseck in der Ebene wird, so fallen die beiden aus dem siebenten und achten Schnittpunkt construirten einbeschriebenen Sechsecke zusammen, und jedes derselben wird ein Dreieck, dessen Ecken die Schnittpunkte der gegenüber liegenden Seiten des ersten Sechseckes sind. Da nun nach dem Theoreme die Seiten dieses Dreieckes auf einem Hyperboloïd liegen, so müssen dieselben in eine gerade Linie, die Pascal'sche Linie des ersten Sechseckes, fallen, weil kein Hyperboloïd ein Dreieck aufweisen kann, dessen Seiten auf seiner Oberfläche liegen.

München, im Mai 1871.

42.

Ueber das Problem der drei Körper.

[Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften, Band 11, I. Abtheilung, Seite 53—80; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 74, Seite 97—115.][1])

1.

Unter dem Probleme der drei Körper hat man Folgendes zu verstehen. Drei Körper ohne Ausdehnung, zusammengedrückt auf Punkte, aber mit gegebenen Massen erfüllt, seien aus gegebenen Anfangslagen in irgend welchen gegebenen Richtungen mit gegebenen Geschwindigkeiten in den leeren Raum hingeworfen. Auf diese Körper wirke nichts ein, als das Newton'sche Gesetz, welches sagt, dass die Körper sich gegenseitig anziehen proportional ihren Massen und umgekehrt proportional den Quadraten ihrer Entfernungen. Es soll der Ort eines jeden Körpers für jede beliebige Zeit gefunden werden.

So ausgedrückt erscheint das Problem sehr complicirt. Denn es hängt, abgesehen von den Massen der Körper, ab von 18 Daten, von den 9 Coordinaten der drei Körper in den Anfangslagen und von den Richtungen und den Grössen ihrer anfänglichen Geschwindigkeiten, welche ebenfalls durch 9 Grössen ausgedrückt werden können. In

---

1) [Vergl. zu dieser Abhandlung die Anmerkung am Schlusse des Bandes.]

D'Alembert'schen Gleichungen ausgedrückt, welche die hervorgehobenen 18 Daten unberücksichtigt lassen, wird das Problem aber einfach. Es hängt nämlich, wenn man die Newton'sche Kraft, mit welcher zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung sich anziehen, als Krafteinheit nimmt, einzig und allein ab von den gegebenen Massen der drei Körper, also von 3 Daten. Und dieses ist im Vereine mit der Symmetrie des Problems wohl auch der Grund der grossen Anziehungskraft, welche das Problem auf jeden Mathematiker ausübt.

Die D'Alembert'schen Gleichungen sind Differentialgleichungen, von welchen man sich die Vorstellung zu machen hat, dass sie aus den 9 Gleichungen, welche das Problem vollständig lösen, dadurch hervorgegangen sind, dass man sie nach der Zeit t differentiirt und die 18 Daten eliminirt. Geht man daher von den 9 D'Alembert'schen Differentialgleichungen aus, so sieht man, ohne die Gleichungen selbst aufzustellen, sogleich ein, dass man zur Lösung des Problems der drei Körper 18 Integrationen zu machen hat, welche die D'Alembert'schen Vernachlässigungen wieder einbringen müssen.

Von den 18 Integralen, welche das Problem der drei Körper verlangt, kennt die analytische Mechanik nur 10. Sechs davon sind hergenommen aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes. Drei Integrale gibt das Princip der Erhaltung der Flächenräume und ein Integral die Erhaltung der lebendigen Kraft. Es fehlen darum bis zur Zeit noch acht Integrale. Denn das Princip des letzten Multiplicators von Jacobi, welches allerdings ein Integral aufstellen lehrt, macht Voraussetzungen, die man noch nicht erfüllen kann.

Auf ein neues Integral kann man dadurch kommen, dass man aus den 9 D'Alembert'schen Differentialgleichungen, selbst mit Zuziehung der bekannten 10 Integrale, eine Differentialgleichung herstellt, welche für sich integrirbar ist und in der That lassen sich vielfältige Zusammenstellungen der Art machen. Das daraus sich ergebende Integral wird aber nur dann ein neues sein, wenn es sich aus den bekannten 10 Integralen nicht zusammensetzen lässt.

Die Untersuchung, ob das gefundene Integral ein neues sei, kann unter Umständen wieder auf erhebliche Schwierigkeiten stossen, so dass man wünschen muss, solchen Untersuchungen ganz enthoben zu sein.

In diesem Wunsche — wohl auch in der vergeblichen Hoffnung, einem von den noch fehlenden acht Integralen auf die Spur zu kommen — habe ich die folgende Arbeit unternommen. Sie bezweckt nichts weiter, als die Lösung des Problems:

Problem.

Aus den Differentialgleichungen des Problems der drei Körper und ihren bekannten Integralen symmetrisch gebildete Differentialgleichungen abzuleiten, von welchen eine jede auf eines von den bis zur Zeit noch fehlenden Integralen der drei Körper führen muss.

Auf dieses Problem bin ich geführt worden durch das Studium des Problems zweier Körper, dessen Resultate niedergelegt sind in dem Anhange meiner Raumgeometrie, 2. Auflage, Leipzig, Teubner 1869. Von dort aus will ich auch die leitenden Gedanken hernehmen, welche die nachfolgenden weiteren Entwickelungen rechtfertigen sollen.

2.

Das Problem zweier Körper verlangt zu seiner vollständigen Lösung 12 Integrationen. Da die Principe der Mechanik 10 von diesen Integrationen leisten, so fehlen noch 2 Integrale.

Ich machte daher den Versuch, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in symmetrischer Weise aus den sechs gegebenen Differentialgleichungen und ihren zehn Integralen zusammen zu stellen, welche die beiden fehlenden Integrale umschliessen sollte. Der Versuch missglückte, wie man sogleich sehen wird.

Als engeres Problem zweier Körper kann man die Frage nach dem Radiusvector r, welcher die Körper von den Massen m_1 und m_2 und der Gesammtmasse $k^2 = M = m_1 + m_2$ verbindet, als Function der Zeit auffassen; dieses engere Problem führt, wie in dem Anhange der oben citirten Schrift nachgewiesen worden ist, auf die Differentialgleichung (15) zurück:

$$r'' = -\frac{M}{r^2} + \frac{C_0^2}{r^3}.$$

Weist man noch die aus den bekannten Principen der Mechanik hergenommene Constante C_0^2 der Integration zurück, so erhält man durch Differentiation und Elimination dieser Constanten die Differentialgleichung dritter Ordnung, welche das engere Problem vollständig löst:

$$1. \qquad 0 = (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3}.$$

Die Form dieser Differentialgleichung, welche leicht verificirt werden kann, ist schon eine aus dem Probleme der drei Körper hergenommene.

Da die Differentialgleichung (1) von keiner Integrationsconstante abhängig ist, so ist zu ihrer Herstellung auch keines von den drei Principen der Mechanik erforderlich, welches ein Integral liefert. Man kann daher die Behauptung aufstellen, dass, während zur Lösung des vollständigen Problems zweier Körper 12 Integrationen erforderlich sind, das engere Problem nur 3 Integrationen verlangt.

Zwei erste Integrale des engeren Problems sind bald gefunden:

$$2. \qquad 4h = (r^2)'' - \frac{2M}{r}$$

$$3. \qquad 2C_0^2 = r^2\left((r^2)'' + \frac{2M}{r}\right) - \tfrac{1}{2}(r^2)'(r^2)'.$$

Denn man hat:

$$4. \qquad (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3} = \frac{d}{dt}\left\{(r^2)'' - \frac{2M}{r}\right\}$$

$$5. \qquad (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}\left\{r^2\left((r^2)'' + \frac{2M}{r}\right) - \tfrac{1}{2}(r^2)'(r^2)'\right\},$$

Gleichungen, welche später ihre Verwendung finden werden.

Die Bezeichnung der Integrationsconstanten h und C_0 ist hier so gewählt worden, dass man in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung in der citirten Schrift sogleich erkennen soll, dass die beiden Integrale keine neuen sind. Die Integrationsconstante h ist dieselbe als in Gleichung (9), und die Integrationsconstante C_0 die Constante in der Gleichung (15).

Eliminirt man aus den beiden angegebenen Integralgleichungen (2) und (3), deren Formen ebenfalls aus dem Probleme dreier Körper her-

genommen sind, die Grösse $(r^2)''$, so erhält man die Differentialgleichung (13) erster Ordnung:

$$6. \qquad r'r' = 2h + \frac{2M}{r} - \frac{C_0^2}{r^2}.$$

Ihr Integral ist allerdings eines von den beiden noch fehlenden Integralen des allgemeinen Problems. Das zweite fehlende Integral ist aber bei der Uebertragung des allgemeinen Problems in das engere vollständig entschlüpft. Das engere Problem des Radiusvectors umfasst also nicht die beiden fehlenden Integrale des allgemeinen Problems, sondern nur ein Integral. Das andere Integral hat man ausserhalb des engeren Problems zu suchen.

In der Trennung der beiden fehlenden Integrale des allgemeinen Problems wird man einen glücklichen Umstand erblicken, wenn man dafür hält, dass es vorzuziehen sei, zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zu integriren, als eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man kann sich sogar dem Glauben hingeben, dass diese Trennung der beiden noch fehlenden Integrale des Problems zweier Körper ihre Auffindung und damit die vollständige Lösung des Problems erheblich erleichtert hat.

3.

Das allgemeine Problem der drei Körper, welches 18 Integrationen erfordert, werden wir dadurch verengern, dass wir nur die Gestalt des Dreiecks kennen zu lernen verlangen, dessen Ecken die drei Körper bilden. Demnach soll die Gestalt des genannten Dreieckes zu einer beliebigen Zeit das engere Problem sein.

Es wird sich also darum handeln, die Differentialgleichungen zwischen den Radienvectoren und der Zeit aufzustellen, welche das engere Problem lösen. Von welcher Ordnung diese Differentialgleichungen sein werden, hängt davon ab, ob zu ihrer Aufstellung bekannte Integrale des allgemeinen Problems verwendet werden dürfen oder nicht.

Wenn wir den letzteren Fall im Auge behalten, dass die gesuchten drei Differentialgleichungen keine Integrationsconstanten enthalten sollen, so lässt sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit von ihnen voraus-

sagen, dass jede derselben auf die Differentialgleichung (1) zurückführen wird, wenn man eine der drei Massen verschwinden lässt. In dieser Voraussicht werden wir drei Differentialgleichungen, jede von der dritten Ordnung, aufzusuchen haben, welche das engere Problem der drei Körper ohne irgend eine Integration vollständig lösen. Diese Differentialgleichungen werden 9 Integrationen verlangen.

Da das allgemeine Problem mit Voraussetzung der bekannten Integrale nur 8 neue Integrationen verlangt, so sieht man, dass von den 9 erwähnten Integrationen wenigstens eine durch die bekannten Principe geleistet wird.

Wenn man aber erwägt, dass in dem engeren Probleme zweier Körper von den 3 verlangten Integrationen zwei Integrationen durch die Principe der Mechanik geleistet werden, so kann man voraussetzen, dass jene Principe auch 2 Integrale für das engere Problem dreier Körper hergeben werden, welche in die Integrale (2) und (3) übergehen, wenn man eine der drei Massen verschwinden lässt, so dass von den 9 Integrationen des allgemeinen Problems nur noch 7 Integrationen für das engere Problem zu machen übrig bleiben.

Da in dem allgemeinen Probleme der drei Körper 8 Integrale noch fehlen, in dem engeren Probleme aber nur 7, so ergibt sich hieraus, dass (wie in dem Probleme zweier Körper) bei dem Uebergange von dem allgemeinen Probleme zu dem engeren Probleme ein Integral verloren geht, welches dem letzteren ganz fremdartig ist.

Diese Reflexionen werden in dem Folgenden ihre Bestätigung finden. Wir beginnen die Ausführung mit der Aufstellung der D'Alembert'schen Differentialgleichungen, welche das allgemeine Problem der drei Körper lösen.

4.

Wenn man mit r, r_1, r_2 die Radienvectoren bezeichnet, welche je zwei Körper von den Massen m, m_1, m_2 verbinden, so ist U die Kräftefunction

$$7. \qquad U = m\,m_1\,m_2\left\{\frac{1}{mr}+\frac{1}{m_1 r_1}+\frac{1}{m_2 r_2}\right\},$$

deren partielle Differentialquotienten in die Differentialgleichungen der Bewegung eingehen.

Bezeichnet man ferner mit ξ, η, ζ die Coordinaten des mit der Masse m erfüllten ersten Körpers zur Zeit t, die als die einzige unabhängige Variable angesehen werden soll, und die entsprechenden Grössen für den zweiten und dritten Körper durch Anhängung der gebräuchlichen Indices 1 und 2, so hat man zur Lösung des Problems folgende Differentialgleichungen:

$$8. \qquad \begin{aligned} m\xi'' &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ m\eta'' &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ m\zeta'' &= \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen repräsentiren ein ganzes System von 9 Gleichungen, welches man vervollständigt dadurch, dass man der Masse m und den Coordinaten ξ, η, ζ die Indices 1 oder 2 beigibt.

Da in die Kräftefunction, wenn man sie durch die Coordinaten der drei Körper ausdrückt, nur die Differenzen der Coordinaten eingehen, gleich wie in die rechten Theile der Differentialgleichungen (8), deren Einfachheit nur auf der Erfindung der Kräftefunction beruht, so erscheint es zur Erzielung grösserer Einfachheit angemessen, an Stelle der Coordinaten der drei Körper ihre Differenzen x, y, z einzuführen. Setzt man daher:

$$9. \qquad \begin{aligned} x &= \xi_1 - \xi_2, & x_1 &= \xi_2 - \xi, & x_2 &= \xi - \xi_1 \\ y &= \eta_1 - \eta_2, & y_1 &= \eta_2 - \eta, & y_2 &= \eta - \eta_1 \\ z &= \zeta_1 - \zeta_2, & z_1 &= \zeta_2 - \zeta, & z_2 &= \zeta - \zeta_1 \end{aligned}$$

so wird:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = m\left\{\frac{m_2 x_1}{r_1^3} - \frac{m_1 x_2}{r_2^3}\right\},$$

und aus der ersten Gleichung (8) ergeben sich auf Grund der zu beachtenden Symmetrie zwischen den drei Körpern auf diese Weise die Differentialgleichungen:

$$\xi'' = \frac{m_2 x_1}{r_1^3} - \frac{m_1 x_2}{r_2^3}, \qquad \xi_1'' = \frac{m x_2}{r_2^3} - \frac{m_2 x}{r^3}, \qquad \xi_2'' = \frac{m_1 x}{r^3} - \frac{m x_1}{r_1^3}.$$

Zieht man die letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man in Berücksichtigung von (9) die Differentialgleichung:

$$x'' = -M\frac{x}{r^3} + m\left\{\frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3}\right\},$$

wenn man mit M die Summe der Massen der drei Körper bezeichnet, wie folgt:

$$M = m + m_1 + m_2. \tag{10}$$

Wegen der Symmetrie der Coordinaten eines Körpers gehen aus der zuletzt angegebenen Differentialgleichung folgende hervor:

$$\begin{aligned} x'' &= -M\frac{x}{r^3} + m\left\{\frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3}\right\} \\ y'' &= -M\frac{y}{r^3} + m\left\{\frac{y}{r^3} + \frac{y_1}{r_1^3} + \frac{y_2}{r_2^3}\right\} \\ z'' &= -M\frac{z}{r^3} + m\left\{\frac{z}{r^3} + \frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3}\right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Diese Gleichungen repräsentiren wieder ein ganzes System von 9 Differentialgleichungen, welches man erhält durch Vertauschung der drei Indices 0, 1, 2, von welchen der Index 0 der Einfachheit wegen fortgelassen ist.

Die Differentialgleichungen (11) würden wieder 18 Integrationen verlangen, wenn man nicht auf Grund von (9) die Relationen hätte:

$$\begin{aligned} x + x_1 + x_2 &= 0 \\ y + y_1 + y_2 &= 0 \\ z + z_1 + z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Durch diese Relationen wird die Zahl 18 der Integrationen, welche die Differentialgleichungen (8) des allgemeinen Problems verlangten, verringert auf 12 Integrationen, welche das durch Einführung der Differenzen der Coordinaten schon beschränkte Problem (11) noch zu leisten hat.

Von diesen 12 Integrationen vollführen die bekannten Principe der Mechanik vier, welche aufzusuchen unsere nächste Aufgabe sein wird.

5.

Setzen wir, um das System der Gleichungen (11) abzukürzen:

$$A = \frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3}$$

13. $$B = \frac{y}{r^3} + \frac{y_1}{r_1^3} + \frac{y_2}{r_2^3}$$

$$C = \frac{z}{r^3} + \frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3},$$

multipliciren hierauf die Gleichungen (11) der Reihe nach mit x' y' z' und addiren, so erhalten wir:

14. $$x'x'' + y'y'' + z'z'' = -M\frac{r'}{r^2} + m\{Ax' + By' + Cz'\}.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch m und nehmen die Summe, so verschwinden, weil man auf Grund von (12) hat:

$$x' + x_1' + x_2' = 0$$

15. $$y' + y_1' + y_2' = 0$$

$$z' + z_1' + z_2' = 0,$$

die letzten Glieder, und wir erhalten:

16. $$\Sigma\frac{(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{m} = -M\Sigma\frac{r'}{mr^2}.$$

Durch Differentiation von (7) erhalten wir die Gleichung:

17. $$\frac{dU}{dt} = -mm_1m_2\Sigma\frac{r'}{mr^2}.$$

Auf Grund der Gleichung (17) stellt sich die Gleichung (16) nun so dar:

18. $$\frac{mm_1m_2}{2}\frac{d}{dt}\Sigma\frac{(x'x' + y'y' + z'z')}{m} = M\frac{dU}{dt},$$

und integrirt:

19. $$\frac{mm_1m_2}{2}\Sigma\frac{(x'x' + y'y' + z'z')}{m} = MU + h.$$

Es entspricht dieses Integral demjenigen Integrale, welches in dem allgemeinen Problem (8) aus dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft hervorgeht, wenn es auch nicht mit demselben identisch ist.

Um die Integrale zu erhalten, welche in ähnlicher Art den Flächensätzen entsprechen, multipliciren wir die letzte Gleichung (11) mit y, ziehen die mit z multiplicirte vorletzte Gleichung ab und dividiren durch m. Alsdann wird:

$$\frac{yz'' - y''z}{m} = yC - zB.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung die Summe genommen, ergibt sich mit Rücksicht auf (12):

$$\Sigma \frac{(yz'' - y''z)}{m} = 0,$$

eine Differentialgleichung, deren erstes Integral ist:

$$\Sigma \frac{(yz' - y'z)}{m} = \alpha.$$

Auf diese Weise ergeben sich aus dem Systeme Differentialgleichungen (11) die gesuchten drei Integrale:

$$20. \qquad \begin{aligned} \alpha &= \Sigma \frac{(yz' - y'z)}{m} \\ \beta &= \Sigma \frac{(zx' - z'x)}{m} \\ \gamma &= \Sigma \frac{(xy' - x'y)}{m}. \end{aligned}$$

Die aufgeführten Integrale (19) und (20) sind keine neuen Integrale, sondern zusammengesetzt aus den bekannten zehn Integralen des allgemeinen Problems (8). Es bleiben darum auch in dem beschränkten Problem (11) noch acht Integrationen zu machen übrig.

Wenn es nun gelingt, durch geschickte Verbindung der Differentialgleichungen (11) mit den Gleichungen (12), (15), (19), (20) eine Differentialgleichung herzustellen, welche für sich integrirbar ist, so wird man wieder nicht wissen können, ob das Integral derselben eines von den

noch fehlenden acht Integralen ist. Voraussichtlich wird das entdeckte Integral kein neues sein.

Diese Erwägungen haben auf das am Ende des ersten Paragraphen ausgesprochene Problem geführt. Die Lösung desselben beruht auf der Einführung einfacher Zeichen für gewisse symmetrisch gebildete Functionen, welche demnächst vorgeführt werden sollen.

6.

Das in dem dritten Paragraphen bezeichnete engere Problem der drei Körper verlangt die Elimination sämmtlicher Variabeln aus den Differentialgleichungen (11) mit Ausnahme der Radienvectoren und ihrer Differentialquotienten. Bei dieser Gelegenheit drängen sich symmetrisch gebildete Functionen der zu eliminirenden Variabeln auf, von welchen in erster Linie diejenigen Functionen hervorgehoben werden sollen, welche sich allein durch die Radienvectoren (nicht durch ihre Differentialquotienten) ausdrücken lassen. Dahin gehören die Functionen:

$$21.\quad xx+yy+zz=r^2,\quad x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1=r_1^2,\quad x_2x_2+y_2y_2+z_2z_2=r_2^2,$$

für welche wir respective die neuen Zeichen wählen:

$$22.\qquad (00)=r^2\qquad (11)=r_1^2\qquad (22)=r_2^2.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (12) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, so erhält man, in Verfolg der eingeführten neuen Bezeichnung für symmetrisch gebildete Functionen wie $xx_1+yy_1+zz_1=(01)$, die Gleichung:

$$(00)+(01)+(02)=0,$$

woraus denn wieder das System der Gleichungen hervorgeht:

$$23.\qquad \begin{aligned}(00)+(01)+(02)&=0\\(10)+(11)+(12)&=0\\(20)+(21)+(22)&=0,\end{aligned}$$

welche Gleichungen beweisen, dass die neu hinzugekommenen symmetrischen Functionen sich durch die Radienvectoren ausdrücken lassen, wie folgt:

$$24.\qquad \begin{aligned}(12) &= \tfrac{1}{2}\{r^2 - r_1^2 - r_2^2\}\\ (20) &= \tfrac{1}{2}\{r_1^2 - r_2^2 - r^2\}\\ (01) &= \tfrac{1}{2}\{r_2^2 - r^2 - r_1^2\}.\end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (11) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, so erhält man, wenn man setzt:

$$xx'' + yy'' + zz'' = (0''0) = R.$$

$$25.\qquad (0''0) = R = -\frac{M}{r} + m\left\{\frac{(00)}{r^3} + \frac{(01)}{r_1^3} + \frac{(02)}{r_2^3}\right\}.$$

An Stelle des hier ganz berechtigten Zeichens $(0''0)$ wählen wir jedoch aus Rücksicht auf die im nächsten Paragraphen nachfolgenden Zeichen für symmetrisch gebildete Functionen das Zeichen R, um mit demselben anzudeuten, dass R, sowie R_1 und R_2 Functionen seien nur der Radienvectoren, wie folgt:

$$26.\qquad \begin{aligned}R &= -\frac{M}{r} + m\left\{\frac{(00)}{r^3} + \frac{(01)}{r_1^3} + \frac{(02)}{r_2^3}\right\}\\ R_1 &= -\frac{M}{r_1} + m_1\left\{\frac{(10)}{r^3} + \frac{(11)}{r_1^3} + \frac{(12)}{r_2^3}\right\}\\ R_2 &= -\frac{M}{r_2} + m_2\left\{\frac{(20)}{r^3} + \frac{(21)}{r_1^3} + \frac{(22)}{r_2^3}\right\}.\end{aligned}$$

Es wird sich später zeigen, dass die in (26) mit den Einzelnmassen multiplicirten Ausdrücke der Radienvectoren berufen sind, in die abzuleitenden Differentialgleichungen einzutreten. Aus diesem Grunde führen wir sie ein mit den Zeichen:

$$27.\qquad \begin{aligned}P &= \frac{(00)}{r^3} + \frac{(01)}{r_1^3} + \frac{(02)}{r_2^3}\\ P_1 &= \frac{(10)}{r^3} + \frac{(11)}{r_1^3} + \frac{(12)}{r_2^3}\\ P_2 &= \frac{(20)}{r^3} + \frac{(21)}{r_1^3} + \frac{(22)}{r_2^3}.\end{aligned}$$

Differentiirt man diese Ausdrücke nach der Zeit, nicht total, sondern nur in so ferne dieselbe in den Zählern der Brüche enthalten ist, aus welchen die Ausdrücke bestehen, so erhält man wieder Ausdrücke, welche

in die abzuleitenden Differentialgleichungen eingehen. Wir führen dieselben schon hier ein mit den Bezeichnungen:

28.
$$Q = \frac{(00)'}{r^3} + \frac{(01)'}{r_1^3} + \frac{(02)'}{r_2^3}$$
$$Q_1 = \frac{(10)'}{r^3} + \frac{(11)'}{r_1^3} + \frac{(12)'}{r_2^3}$$
$$Q_2 = \frac{(20)'}{r^3} + \frac{(21)'}{r_1^3} + \frac{(22)'}{r_2^3}.$$

Auf Grund von (23) hat man nun:

29.
$$P + P_1 + P_2 = 0,$$

30.
$$Q + Q_1 + Q_2 = 0.$$

Und es lassen sich die Gleichungen (26) kürzer so wiedergeben:

31.
$$R = -\frac{M}{r} + m\,P$$
$$R_1 = -\frac{M}{r_1} + m_1 P_1$$
$$R_2 = -\frac{M}{r_2} + m_2 P_2.$$

Mit den durch die neuen Zeichen dargestellten symmetrischen Functionen, welche sich durch die Radienvectoren ausdrücken lassen, treten zum Zwecke der Elimination noch andere symmetrisch gebildete Functionen auf, die sich durch die Radienvectoren und deren Differentialquotienten ausdrücken lassen. Diese Functionen sollen demnächst vorgeführt werden.

7.

Differentiirt man die Gleichungen (22), so erhält man:

32.
$$(0'0) = \tfrac{1}{2}(r^2)', \qquad (1'1) = \tfrac{1}{2}(r_1^2)', \qquad (2'2) = \tfrac{1}{2}(r_2^2)'.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (12) der Reihe nach mit x', y', z' und addirt, oder multiplicirt man die Gleichungen (15) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, und setzt dieses Verfahren fort, so erhält man:

$$\text{33.}\qquad \begin{aligned} &(0'1)+(0'2)=-\tfrac{1}{2}(r^2)', && (1'0)+(2'0)=-\tfrac{1}{2}(r^2)',\\ &(1'2)+(1'0)=-\tfrac{1}{2}(r_1^2)', && (2'1)+(0'1)=-\tfrac{1}{2}(r_1^2)',\\ &(2'0)+(2'1)=-\tfrac{1}{2}(r_2^2)', && (0'2)+(1'2)=-\tfrac{1}{2}(r_2^2)'. \end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen reichen nicht aus, um die sechs bezeichneten symmetrischen Functionen der Coordinaten durch die Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren auszudrücken, weil die Summe der drei ersten Gleichungen gleich der Summe der drei letzten ist. Zu ihrem Ausdrucke bedarf es sogar der dritten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren, wie es sich in dem folgenden Paragraphen zeigen wird.

Bemerkt man aber, dass man durch Subtraction der neben einander stehenden Gleichungen (33) erhält:

$$\text{34.}\qquad (1'0)-(0'1)=(2'1)-(1'2)=(0'2)-(2'0),$$

so ist ersichtlich, dass durch Einführung einer neuen symmetrischen Function L der Coordinaten:

$$\text{35.}\qquad 2L=(1'0)-(0'1),$$

die genannten sechs symmetrischen Functionen durch die ersten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren und durch die neue Function L sich ausdrücken lassen, wie folgt:

$$\text{36.}\qquad \begin{aligned} &(1'0)=\tfrac{1}{2}(10)'+L, && (0'1)=\tfrac{1}{2}(01)'-L,\\ &(2'1)=\tfrac{1}{2}(21)'+L, && (1'2)=\tfrac{1}{2}(12)'-L,\\ &(0'2)=\tfrac{1}{2}(02)'+L, && (2'0)=\tfrac{1}{2}(20)'-L. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen oder aus (34) erkennt man sogleich, dass die Function L eine alternirende Function der drei Körper ist. Denn vertauscht man zwei Körper mit einander, so bleibt L ungeändert, nimmt aber das entgegengesetzte Vorzeichen an.

Die alternirende Eigenschaft der Function L lässt sich durchsichtiger noch an ihrem Differentialquotienten nachweisen, der durch die Radienvectoren selbst ausgedrückt werden kann.

Differentiirt man nämlich die Gleichung (35) nach der Zeit, so erhält man:

$$2L' = (1''0) - (0''1).$$

Auf Grund von (11) hat man:

$$(0''1) = -M\frac{(01)}{r^3} + m\left\{\frac{(01)}{r^3} + \frac{(11)}{r_1^3} + \frac{(21)}{r_2^3}\right\}$$

$$(1''0) = -M\frac{(01)}{r_1^3} + m_1\left\{\frac{(00)}{r^3} + \frac{(01)}{r_1^3} + \frac{(02)}{r_2^3}\right\}.$$

Zieht man nun die erste Gleichung von der zweiten ab und giebt den Grössen (00) und (11) ihre Werthe aus (23), so erhält man:

$$37.\quad 2L' = m(12)\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) + m_1(20)\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r^3}\right) + m_2(01)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}\right).$$

Differentiirt man die erste Gleichung (21) 2 mal, so erhält man mit Berücksichtigung von (25) und (31) die Gleichung:

$$38.\quad x'x' + y'y' + z'z' = \tfrac{1}{2}(r^2)'' + \frac{M}{r} - mP.$$

Hieraus ergeben sich nun die Ausdrücke der symmetrischen Functionen:

$$39.\quad \begin{aligned} (0'0') &= \tfrac{1}{2}(r^2)'' + \frac{M}{r} - m\,P \\ (1'1') &= \tfrac{1}{2}(r_1^2)'' + \frac{M}{r_1} - m_1 P_1 \\ (2'2') &= \tfrac{1}{2}(r_2^2)'' + \frac{M}{r_2} - m_2 P_2. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (15) respective mit x', y', z', addirt und setzt dieses Verfahren fort, so erhält man:

$$40.\quad \begin{aligned} (0'0') + (0'1') + (0'2') &= 0 \\ (1'0') + (1'1') + (1'2') &= 0 \\ (2'0') + (2'1') + (2'2') &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beweisen, dass auch die symmetrischen Functionen von der Form $(0'1')$ sich durch die Quadrate der Radienvectoren und

ihre Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung ausdrücken lassen. Denn aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$41.\qquad \begin{aligned}(1'2') &= \tfrac{1}{2}\{(0'0') - (1'1') - (2'2')\}\\ (2'0') &= \tfrac{1}{2}\{(1'1') - (2'2') - (0'0')\}\\ (0'1') &= \tfrac{1}{2}\{(2'2') - (0'0') - (1'1')\}.\end{aligned}$$

Stellen wir nun die Resultate dieses und des vorhergehenden Paragraphen kurz zusammen, so lässt sich dieses sagen, dass alle durch die neue Bezeichnung eingeführten symmetrischen Functionen sich ausdrücken lassen durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung mit Ausnahme der Functionen von der Form $(0'1)$, welche, abgesehen von den Radienvectoren und ihren ersten Differentialquotienten, in (36) abhängig gemacht worden sind allein von der durch Gleichung (35) definirten alternirenden Function L.

Diese Function L lässt sich nicht mehr ausdrücken durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten niederer Ordnung. Wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, bedarf es dazu noch der Differentialquotienten der dritten Ordnung.

Aber an Stelle eines einzigen Ausdruckes für die alternirende Function L wird die Symmetrie sogleich drei verschiedene Ausdrücke ergeben, aus deren Gleichsetzung zwei Differentialgleichungen des engeren Problems hervorgehen von der dritten Ordnung, und zwar ohne Integration.

8.

Wenn man die Gleichung (38) differentiirt und durch 2 dividirt, so erhält man:

$$42.\qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)'' + \frac{2M}{r}\right\} - \frac{m}{2}P',$$

eine Gleichung, deren linker Theil gleich ist dem linken Theile der Gleichung (14). Setzt man die rechten Theile der Gleichungen einander gleich, so wird:

$$-\frac{Mr'}{r^2} + m\{Ax' + By' + Cz'\} = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)'' + \frac{2M}{r}\right\} - \frac{m}{2}P',$$

und wenn man für A, B, C die Werthe setzt aus (13):

$$-\frac{Mr'}{r^2}+m\left\{\frac{(0'0)}{r^3}+\frac{(0'1)}{r_1^3}+\frac{(0'2)}{r_2^3}\right\}=\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''+\frac{2M}{r}\right\}-\frac{m}{2}P',$$

oder da man hat: $-\frac{Mr'}{r^2}=\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{\frac{4M}{r}\right\}$ und $(0'0)=\frac{1}{2}(00)'$, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\frac{(0'1)}{r_1^3}+\frac{(0'2)}{r_2^3}=\frac{1}{4m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{2}\frac{(00)'}{r^3}.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von $(0'1)$ und $(0'2)$ aus (36) ein, so erhält man:

$$-L\left\{\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right\}=\frac{1}{4m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{2}\left\{\frac{(00)'}{r^3}+\frac{(01)'}{r_1^3}+\frac{(02)'}{r_2^3}\right\}.$$

Multiplicirt man mit -2, so wird mit Rücksicht auf (28):

$$43.\qquad 2L\left\{\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right\}=-\frac{1}{2m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}+P'+Q.$$

Eine andere bemerkenswerthe Gestalt erhält diese Gleichung, wenn man die Gleichungen (4) und (5) benutzt.

Aus der Gleichung (43) geht nun ein System von drei Gleichungen hervor durch cyclische Vertauschung der Indices 0, 1, 2. Dieses System lässt sich sehr einfach wiedergeben, wenn wir die Bezeichnung einführen:

$$44.\qquad v=\frac{n}{m}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}+\frac{n_1}{m_1}\left\{(r_1^2)''-\frac{2M}{r_1}\right\}+\frac{n_2}{m_2}\left\{(r_2^2)''-\frac{2M}{r_2}\right\},$$

bei welcher Gelegenheit wir zu künftigem Gebrauch gleich auf einen ähnlich gebildeten Ausdruck $\mathfrak{V}$, ebenfalls der zweiten Ordnung, aufmerksam machen:

$$45.\qquad \mathfrak{V}=\frac{1}{m}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}+\frac{1}{m_1}\left\{(r_1^2)''-\frac{2M}{r_1}\right\}+\frac{1}{m_2}\left\{(r_2^2)''-\frac{2M}{r_2}\right\}.$$

Man hat demnach folgende drei Ausdrücke für die alternirende Function L:

46.
$$2L\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial n\,\partial t}+P'+Q$$
$$2L\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r^3}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial n_1\,\partial t}+P_1'+Q_1$$
$$2L\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial n_2\,\partial t}+P_2'+Q_2.$$

Die beiden letzten Ausdrücke beweisen, dass L nicht unendlich wird, wenn man die Masse m gleich 0 setzt. Der erste Ausdruck von L in (46) oder (43) wird nur scheinbar unendlich, wenn man m gleich 0 setzt, denn in diesem Falle reducirt sich das Problem auf das Problem zweier Körper, und es verschwindet nach (1) und (4) auch der Zähler jenes Bruches, dessen Nenner m ist. Der erste Ausdruck für L wird demnach unbestimmt, wenn man m gleich 0 setzt.

Die angegebenen Ausdrücke (46) sind unsymmetrisch. Um einen symmetrischen Ausdruck für das Product zweier alternirenden Functionen zu erhalten, von welchen die eine L ist, multipliciren wir die Gleichungen (46) der Reihe nach mit $m(12)$, $m_1(20)$, $m_2(01)$ und addiren. In Berücksichtigung von (37) erhalten wir dann:

47.
$$4LL'=-\frac{m}{2}(12)\frac{\partial^2 v}{\partial n\,\partial t}-\frac{m_1}{2}(20)\frac{\partial^2 v}{\partial n_1\,\partial t}-\frac{m_2}{2}(01)\frac{\partial^2 v}{\partial n_2\,\partial t}$$
$$+m(12)\{P'+Q\}+m_1(20)\{P_1'+Q_1\}+m_2(01)\{P_2'+Q_2\}.$$

Um nun die alternirende Function L in symmetrischer Weise aus den Gleichungen (46) zu eliminiren, addiren wir die Gleichungen und erhalten auf Grund von (29) und (30):

$$0=\frac{\partial^2 v}{\partial n\,\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial n_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial n_2\,\partial t}\,.$$

Da aber nach (44) und (45) ist:

$$\mathfrak{V}=\frac{\partial v}{\partial n}+\frac{\partial v}{\partial n_1}+\frac{\partial v}{\partial n_2},$$

so hat man die Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Radienvectoren und der Zeit:

48.
$$0=\frac{d\mathfrak{V}}{dt}\,.$$

Die zweite gesuchte Differentialgleichung, ebenfalls der dritten Ordnung, erhält man, wenn man die Gleichungen (46) respective mit $\frac{2}{r^3}, \frac{2}{r_1^3}, \frac{2}{r_2^3}$ multiplicirt und addirt:

$$49. \quad \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 v}{\partial n \partial t} + \frac{1}{r_1^3}\frac{\partial^2 v}{\partial n_1 \partial t} + \frac{1}{r_2^3}\frac{\partial^2 v}{\partial n_2 \partial t}$$
$$= \frac{2}{r^3}\{P' + Q\} + \frac{2}{r_1^3}\{P_1' + Q_1\} + \frac{2}{r_2^3}\{P_2' + Q_2\}.$$

Als Controlle der vorangegangenen Entwickelungen mag die Bemerkung dienen, dass sowohl die Gleichung (48) als (49) übergeht in die Differentialgleichung (1), wenn man eine der Massen gleich 0 setzt.

Die beiden letzten Differentialgleichungen dritter Ordnung haben sich ergeben ohne Integration. Sie lassen sich daher betrachten als zweckmässige Zusammenstellungen der Differentialgleichungen des allgemeinen Problems.

Es bleibt demnach noch übrig, eine dritte Differentialgleichung zwischen den Radienvectoren und der Zeit, ebenfalls der dritten Ordnung, ohne Integration aufzusuchen.

9.

Es wird Vortheil bringen, den bis dahin eingeschlagenen Weg zu verlassen und von wirklichen Integralen des allgemeinen Problems auszugehen, denn wir haben es ja in der Gewalt, durch Differentiation die Integrationsconstanten wieder verschwinden zu lassen.

Zur Herleitung der dritten und letzten Differentialgleichung des engeren Problems werden wir uns der drei Integrale (20) mit den willkürlichen Constanten α, β, γ, oder, präciser ausgedrückt, des einen Integrales bedienen, dessen Integrationsconstante C sich aus den angegebenen zusammensetzt wie folgt:

$$50. \quad C^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Wir haben demnach auf Grund von (20):

$$51. \quad C^2 = \left(\Sigma\frac{(yz' - y'z)}{m}\right)^2 + \left(\Sigma\frac{(zx' - z'x)}{m}\right)^2 + \left(\Sigma\frac{(xy' - x'y)}{m}\right)^2.$$

Ordnet man diese Gleichung nach den umgekehrten Quadraten und Producten der Massen, so sieht man, dass der Coëfficient von $\frac{1}{m^2}$ in der Entwickelung ist:

$$(yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2$$

und dass der Coëfficient von $\frac{2}{mm_1}$ ist:

$$(yz' - y'z)(y_1z_1' - y_1'z_1) + (zx' - z'x)(z_1x_1' - z_1'x_1) + (xy' - x'y)(x_1y_1' - x_1'y_1)$$

und so ferner.

Dieses sind Formen, für welche die Determinanten-Theorie für unsere Zwecke passendere Formen einführen lehrt, nämlich für den ersten Ausdruck folgenden:

$$(xx + yy + zz)(x'x' + y'y' + z'z') - (xx' + yy' + zz')^2$$

und für den zweiten:

$$(xx_1 + yy_1 + zz_1)(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') - (x'x_1 + y'y_1 + z'z_1)(xx_1' + yy_1 + zz_1').$$

Machen wir nun von den für die symmetrischen Functionen eingeführten Zeichen Gebrauch, so haben wir:

$$52. \qquad (yz - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2 = (00)(0'0') - (0'0)^2$$

$$(yz' - y'z)(y_1z_1' - y_1'z_1) + (zx' - z'x)(z_1x_1' - z_1'x_1) + (xy' - x'y)(x_1y_1' - x_1'y_1)$$
$$= (01)(0'1') - (0'1)(1'0)$$

und so weiter.

Man hat demnach folgende Entwickelung der Gleichung (51):

$$C^2 = \frac{1}{m^2}\{(00)(0'0') - (0'0)^2\} + \frac{2}{mm_1}\{(01)(0'1') - (0'1)(1'0)\} + \cdots$$

Setzt man in dieselbe die Werthe von $(0'1)$, $(1'0)$ etc. aus (36) und multiplicirt mit -1, so erhält man:

$$53.^* \qquad \frac{2M}{mm_1m_2}L^2 - C^2$$
$$= -\frac{1}{m^2}\{(00)(0'0') - (0'0)^2\} - \frac{2}{mm_1}\{(01)(0'1') - \frac{1}{4}(01)'(10)'\} - \cdots$$

Dieses würde, da nach (47) L ein Ausdruck der dritten Ordnung ist, die gesuchte dritte Differentialgleichung zwischen den Radienvectoren und der Zeit sein, wenn sie nicht die Constante C^2 der Integration enthielte. Um aus ihr die verlangte Differentialgleichung des engeren Problems ohne willkürliche Constante abzuleiten, differentiiren wir dieselbe nach der Zeit:

54.
$$\frac{4M}{m m_1 m_2} LL'$$
$$= -\frac{1}{m^2}\frac{d}{dt}\{(00)(0'0') - (0'0)^2\} - \frac{2}{m m_1}\frac{d}{dt}\{(01)(0'1') - \frac{1}{4}(01)'(10)'\} - \cdots$$

Da der rechte Theil der Gleichung (53*) von der zweiten Ordnung ist, so wird der rechte Theil der Gleichung (54) von der dritten Ordnung. Die Gleichung selbst ist von der dritten Ordnung, weil nach (47) das symmetrische Product LL' von der dritten Ordnung ist.

Auch hier wird man bemerken, dass die Differentialgleichung (54) übergeht in (1), wenn man eine der Massen gleich 0 setzt.

Die vollständige Lösung des Dreieck-Problems der drei Körper beruht demnach auf der Integration der drei Differentialgleichungen (48), (49), (54) dritter Ordnung, zu deren Aufstellung es keiner Integration der Differentialgleichungen des allgemeinen Problems bedurfte.

Wenn man die Principe der Mechanik walten lässt, welche Integrale liefern, so liegen zwei Integrale des Systems von drei Differentialgleichungen des engeren Problems zu Tage, nämlich das aus (48) hervorgehende Integral von der zweiten Ordnung:

55.*
$$4h = \mathfrak{V}$$

mit der willkürlichen Constante h, und die Differentialgleichung (53*), vorläufig von der dritten Ordnung, mit der willkürlichen Constante C.

Da die Differentialgleichungen (48), (49), (54) sämmtlich linear sind in Rücksicht auf die dritten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren, so kann man letztere leicht ausdrücken durch die Differentialquotienten niederer Ordnung. Setzt man ihre Werthe in den Ausdruck (47) für L, so wird derselbe von der zweiten Ordnung und die Differentialgleichung (53*) selbst von der zweiten Ordnung. Diese Differentialgleichung (53*) lässt sich demnach betrachten als ein Integral der drei Differentialgleichungen des engeren Problems mit der willkürlichen Constante C der Integration von der zweiten Ordnung.

Um die Richtigkeit der beiden Integralgleichungen (55*) und (53*) zu prüfen, setzen wir für h und C respective $\frac{h}{m}$ und $\frac{C}{m}$ und lassen m verschwinden. Die erstere Gleichung geht dann über in die Gleichung (2), die letztere in Berücksichtigung des im vorhergehenden Paragraphen ausdrücklich aufgeführten Umstandes, dass L nicht unendlich wird, wenn $m = 0$, in die Gleichung (3).

Die durchgeführte Untersuchung fassen wir nun kurz zusammen in dem Theoreme:

Theorem.

Wenn man das allgemeine Problem der drei Körper beschränkt auf die Gestalt des Dreieckes, dessen Ecken die drei Körper bilden, so hängt die Lösung des engeren Problems ab von drei Differentialgleichungen der dritten Ordnung (48), (49), (54). *Wenn man aber die Principe der Mechanik voraussetzt, welche Integrale liefern, so lässt sich dasselbe abhängig machen von zwei Differentialgleichungen* (55*), (53*) *der zweiten Ordnung und einer Differentialgleichung* (49) *dritter Ordnung.*

München, Juli 1871.

Anmerkung.

Das Theorem ist bekannt durch eine von Lagrange verfasste und von der Pariser Akademie gekrönte Preisschrift: »Essai d'une nouvelle Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps« aus dem Jahre 1772. Da der Verfasser von vorne herein, wenn auch mit sichtbarem Widerstreben, die Symmetrie der Aufgabe fallen liess, so konnte er kaum zu den, den Umständen nach einfachen Resultaten gelangen, welche vorliegen. In späteren Jahren ist Lagrange nicht wieder auf sein Problem zurückgekommen. Es ist dieses um so mehr zu beklagen, als gerade er den Gebrauch der Symmetrie in einem Grade ausgebildet hat, wie kein Mathematiker vor ihm.

43.

Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen.

(Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theorems.)

[Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften, Band 11, I. Abtheilung, Seite 175—192; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 75, Seite 1—12; in's Italienische übersetzt im Giornale di Matematiche (Battaglini), Band 11, Seite 309—317.]

1.

In den dreissiger Jahren hat Steiner eine Figur entdeckt, die wohl zu den elegantesten Erfindungen der neueren Geometrie gehört. Die Entdeckung hat er in seiner Geometrie p. 311 mit folgenden Worten ausgedrückt: „Irgend 6 Punkte eines Kegelschnittes bestimmen 60 einbeschriebene einfache Sechsecke; in jedem der letzteren liegen die drei Punkte, in welchen die gegenüber liegenden Seiten sich schneiden, in einer Geraden P, so dass 60 solcher Geraden P stattfinden; von diesen 60 Geraden gehen drei und drei durch irgend einen Punkt R, so dass 20 solcher Punkte R entstehen; und von diesen 20 Punkten R liegen 15 mal 4 in einer Geraden S, so dass jeder in drei solcher Geraden liegt. (Welche Beziehungen haben diese 15 Geraden S zu einander?)“

Wenn man die Steiner'sche Figur ablöst von dem Kegelschnitte, auf welchen sie sich bezieht, so besteht dieselbe nur aus 15 geraden Linien S, welche sich zu dreien 20 mal in einem der 20 Punkte R schneiden. Der Charakter dieser complicirten Figur lässt sich, wie ich

in Crelle's Journal Bd. 41 p. 269 [1]) gezeigt habe, viel einfacher als durch eine Zeichnung in folgenden 20 linearen identischen Gleichungen darlegen:

$$
1. \quad \left\{ \begin{array}{lll}
 & \delta)\ \varrho + \varrho' + \varrho'' = 0, & \\
\alpha^0)\ b - c = \varrho, & \beta^0)\ c - a = \varrho', & \gamma^0)\ a - b = \varrho'', \\
\alpha')\ b' - c' = \varrho, & \beta')\ c' - a' = \varrho', & \gamma')\ a' - b' = \varrho'', \\
\alpha'')\ b'' - c'' = \varrho, & \beta'')\ c'' - a'' = \varrho', & \gamma'')\ a'' - b'' = \varrho'', \\
\alpha_0)\ a' - a'' = r, & \alpha_{\prime})\ a'' - a = r', & \alpha_{\prime\prime})\ a - a' = r'', \\
\beta_0)\ b' - b'' = r, & \beta_{\prime})\ b'' - b = r', & \beta_{\prime\prime})\ b - b' = r'', \\
\gamma_0)\ c' - c'' = r, & \gamma_{\prime})\ c'' - c = r', & \gamma_{\prime\prime})\ c - c' = r'', \\
 & d)\ r + r' + r'' = 0. &
\end{array} \right.
$$

Die geometrische Deutung dieser 20 identischen Gleichungen, vorzugsweise die analytische Ausdehnung derselben Gleichungen, unter Beschränkungen, die am Ende dieses Abschnittes dargelegt werden sollen, bilden den Gegenstand dieser Abhandlung.

Die Steiner'sche Figur geht von irgend drei geraden Linien ϱ, ϱ', ϱ'' aus, welche sich in einem beliebigen Punkte δ schneiden. Sind demnach $\varrho = 0$, $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$ die Gleichungen dieser geraden Linien, so müssen sich dieselben mit constanten Factoren multipliciren lassen der Art, dass ihre Summe identisch verschwindet. Nimmt man aber an, dass die angegebenen Gleichungen schon diese Factoren haben, so ist die in (1) aufgeführte identische Gleichung δ) die Bedingung des Anfanges der weiter auszuführenden Steiner'schen Figur.

Den genannten drei geraden Linien ist irgend ein Dreieck einbeschrieben, dessen Ecken α^0, β^0, γ^0 der Reihe nach in den geraden Linien ϱ, ϱ', ϱ'' liegen. Sind nun $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen der den genannten Ecken gegenüber liegenden Seiten, so müssen sich sechs constante Factoren α, β, γ, α', β', γ' finden lassen der Art, dass man identisch hat:

$$\beta B - \gamma' C = \varrho, \qquad \gamma C - \alpha' A = \varrho', \qquad \alpha A - \beta' B = \varrho''$$

und mit Rücksicht auf die identische Gleichung δ):

$$(\alpha - \alpha')\, A + (\beta - \beta')\, B + (\gamma - \gamma')\, C = 0.$$

1) [Seite 253 dieser Ausgabe.]

Da diese identische Gleichung aber aussagt, dass die Seiten des Dreieckes durch einen und denselben Punkt gehen, was gegen die Voraussetzung ist, so muss $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ sein. Setzt man nun $\alpha A = a$, $\beta B = b$, $\gamma C = c$, so sind $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ die Gleichungen der Seiten des Dreieckes, und die identischen Gleichungen $\alpha^0)$, $\beta^0)$, $\gamma^0)$ die Bedingungen, dass das Dreieck den drei geraden Linien ϱ wirklich einbeschrieben ist.

Beschreibt man den drei geraden Linien ϱ ein zweites Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ ein, dessen Seiten in gleicher Weise durch die Gleichungen $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$ ausgedrückt seien, und ein drittes Dreieck mit den Seiten $a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 0$, so lässt sich annehmen, dass diese Gleichungen bereits mit solchen constanten Factoren multiplicirt seien, dass man die identischen Gleichungen hat $\alpha')$, $\beta')$, $\gamma')$, $\alpha'')$, $\beta'')$, $\gamma'')$, welche die Bedingungen der bis dahin beschriebenen Steiner'schen Figur ausdrücken.

Definirt man nun die drei linearen Ausdrücke r, r', r'' durch die identischen Gleichungen $\alpha_0)$, $\alpha_{,})$, $\alpha_{,,})$, so sieht man, dass alle übrigen Gleichungen (1) aus den besprochenen unmittelbare Folgen sind. Diese Gleichungen sind aber der Ausdruck für bemerkenswerthe Eigenschaften der beschriebenen Figur. Denn die identischen Gleichungen $\alpha_0)$, $\beta_0)$, $\gamma_0)$ beweisen, dass die correspondirenden Seiten des zweiten und dritten Dreieckes, welche den drei geraden Linien ϱ einbeschrieben wurden, sich in drei Punkten α_0, β_0, γ_0 schneiden, welche auf derselben geraden Linie $r = 0$ liegen. Combinirt man ebenso das dritte und erste den geraden Linien ϱ einbeschriebene Dreieck oder das erste und zweite, so erhält man die Schnittpunkte $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$ oder $\alpha_{,,}$, $\beta_{,,}$, $\gamma_{,,}$, welche respective auf den geraden Linien $r' = 0$ oder $r'' = 0$ liegen. Die letzte identische Gleichung (1) giebt den Beweis, dass auch die drei geraden Linien r sich in einem Punkte d schneiden.

Die beschriebene Figur ist die Steiner'sche. Sie besteht aus 15 geraden Linien S:

$$2. \qquad \begin{cases} \varrho \quad \varrho' \quad \varrho'' & a \quad b \quad c \\ r \quad r' \quad r'' & a' \quad b' \quad c' \\ & a'' \quad b'' \quad c'' \end{cases}$$

und den 20 Punkten R:

$$3. \qquad \begin{cases} \delta \quad \alpha^0 \ \beta^0 \ \gamma^0 \quad \alpha' \ \beta' \ \gamma' \quad \alpha'' \ \beta'' \ \gamma'' \\ d \quad \alpha_0 \ \beta_0 \ \gamma_0 \quad \alpha_{,} \ \beta_{,} \ \gamma_{,} \quad \alpha_{,,} \ \beta_{,,} \ \gamma_{,,} . \end{cases}$$

Die Steiner'sche Figur lässt sich bequem in folgendem Satze ausdrücken:

Wenn man dreien geraden Linien ϱ, welche von demselben Punkte δ ausgehen, drei Dreiecke einbeschreibt, so schneiden sich die correspondirenden Seiten von je zweien dieser Dreiecke in drei Punkten, welche in einer geraden Linie r liegen, und die drei den Dreieckpaaren entsprechenden geraden Linien r schneiden sich wieder in einem Punkte d.

Der Charakter der Figur spricht sich in diesem Satze aber nicht so deutlich aus als in den aufgestellten identischen Gleichungen (1). Denn aus dem Satze ist es nicht sogleich ersichtlich, wie man umgekehrt von den drei geraden Linien r ausgehend, welche sich in dem Punkte d schneiden, in umgekehrter Richtung, ohne die Figur zu verlassen, zu dem, dem Punkte d entsprechenden Punkte δ gelangen muss.

Dass die Punkte δ und d in der Figur gleichberechtigt sind, ersieht man aus den identischen Gleichungen (1) sofort, wenn man die geometrische Interpretation derselben in umgekehrter Ordnung, von der letzten Gleichung ausgehend, unternimmt. Die Punkte δ und d sind desshalb conjugirte Punkte.

Ebenso wie die Punkte δ und d in der Steiner'schen Figur einander entsprechen, so entsprechen einander auch je zwei von den 20 Punkten R, wie die Zusammenstellung derselben in (3) angiebt, zum Beispiel die Punkte α^0 und α_0.

Um dieses leichter einzusehen, wiederholen wir nur die 20 identischen Gleichungen in veränderter Reihenfolge:

$$\alpha^0)\ b - c - \varrho = 0$$

$$\begin{array}{lll}
\beta^0)\ a + \varrho' = c & \gamma^0)\ a - \varrho'' = b & \delta)\ -\varrho' - \varrho'' = \varrho \\
\gamma_{\prime})\ c'' - r' = c & \beta_{\prime})\ b'' - r' = b & \alpha'')\ b'' - c'' = \varrho \\
\gamma_{\prime\prime})\ c' + r'' = c & \beta_{\prime\prime})\ b' + r'' = b & \alpha')\ b' - c' = \varrho \\
\gamma')\ b' + \varrho'' = a' & \gamma'')\ b'' + \varrho'' = a'' & \beta_0)\ b' - b'' = r \\
\beta')\ c' - \varrho' = a' & \beta'')\ c'' - \varrho' = a'' & \gamma_0)\ c' - c'' = r \\
\alpha_{\prime\prime})\ a - r'' = a' & \alpha_{\prime})\ a + r' = a'' & d)\ -r' - r'' = r
\end{array}$$

$$\alpha_0)\ a' - a'' - r = 0.$$

Denn die geometrische Interpretation dieser Gleichungen nach Art der Gleichungen (1) ergiebt, dass, wenn man von den drei geraden

Linien b, c, ϱ ausgeht, welche sich in dem Punkte α^0 schneiden, man in der Steiner'schen Figur auf die geraden Linien a', a'', r geführt wird, welche sich in dem dem Punkte α^0 entsprechenden Punkte α_0 schneiden.

Es vereinfacht sich demnach die Anschauung der Steiner'schen Figur, wenn man die ältere Bezeichnung der 20 Steiner'schen Punkte aufgiebt und, wie von Schröter in seiner Geometrie p. 166 bereits geschehen, nunmehr von den 10 Steiner'schen Punktepaaren R und den 15 Steiner'schen geraden Linien S spricht.

Diese Bezeichnung wird sich mehr noch empfehlen, wenn man die Steiner'sche Figur nicht, wie hier, von ihrem Ursprunge, den 6 Punkten auf einem Kegelschnitte, trennt und es unternimmt, nach Anleitung in Crelle's Journal Bd. 68 pag. 205 [1]) und mit Hülfe des Uebertragungs-Principes in Schlömilch's Journal 11. Jahrgang p. 425 [2]), die Resolventen des 10. und 15. Grades von Lagrange, Traité de la résolution des équations numériques p. 260, einer algebraischen Gleichung des 6. Grades geometrisch zu construiren.

Die discutirte Steiner'sche Figur ging von drei geraden Linien ϱ aus, welchen irgend drei Dreiecke abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ einbeschrieben waren. Nimmt man aber Abstand von dem dritten einbeschriebenen Dreiecke und definirt die drei Ausdrücke $a''b''c''$ durch die identischen Gleichungen:

$$a''+b+c'=0, \qquad b''+c+a'=0, \qquad c''+a+b'=0,$$

so sieht man, dass in (1) die Gleichungen α'') β'') γ'') aus den vorhergehenden und den die Ausdrücke a'' b'' c'' definirenden Gleichungen folgen. Es ist desshalb das Dreieck mit den Seiten $a''=0$, $b''=0$, $c''=0$ ebenfalls den drei geraden Linien ϱ einbeschrieben, jedoch nicht willkürlich, sondern bedingt durch die beiden ersten Dreiecke. Die Figur wird hierdurch eine specielle Steiner'sche, und ihr Charakter drückt sich ebenfalls durch die 20 identischen Gleichungen (1) aus, aber mit Anschluss der identischen Gleichungen:

---

1) [Seite 554 dieser Ausgabe.]
2) [Seite 531 dieser Ausgabe.]

$$4.\quad \begin{cases} a'' + b + c' = 0 \quad & b'' + c + a' = 0 \quad & c'' + a + b' = 0, \\ a'' + b' + c = 0 \quad & b'' + c' + a = 0 \quad & c'' + a' + b = 0, \end{cases}$$

welche einfache Folgen aus den kurz vorhergehenden sind.

Die Gleichungen $\alpha_{,,})$, $\beta_{,,})$, $\gamma_{,,})$ beweisen, dass die geraden Linien aa', bb', cc' die gegenüber liegenden Seiten eines Pascal'schen Sechseckes sind, welche sich paarweise in drei Punkten der Pascal'schen Linie r'' schneiden. In diesem Sechsecke sind, wie die Gleichungen (4) darthun, a'' b'' c'' die Diagonalen, welche die gegenüber liegenden Ecken des Sechseckes verbinden.

Geht man nun in der Beschreibung der speciellen Steiner'schen Figur, welche in den angegebenen 26 Gleichungen ihren analytischen Ausdruck hat, nicht von den drei geraden Linien ϱ aus, welchen drei Dreiecke einbeschrieben wurden, sondern von dem genannten Pascal'schen Sechsecke, so lässt sich dieselbe durch folgenden Satz ausdrücken:

Wenn man in einem Pascal'schen Sechsecke die drei Diagonalen zieht, welche die gegenüber liegenden Ecken verbinden, so bilden die geraden Seiten des Sechseckes, die ungeraden Seiten und die drei Diagonalen drei Dreiecke, welche dreien von einem Punkte ausgehenden geraden Linien ϱ einbeschrieben sind. Die entsprechenden Seiten je zweier von diesen Dreiecken schneiden sich paarweise in einer geraden Linie r, und die drei geraden Linien r schneiden sich wieder in einem Punkte.

Die Erweiterung dieses Satzes oder, analytisch gefasst, die Erweiterung der 26 den Satz beweisenden identischen Gleichungen wird der Gegenstand des folgenden Abschnittes sein.

2.

Wenn R die Determinante bedeutet: $R = \Sigma \pm u_0^0 u_1^1 \ldots u_m^m$, so hat man bekanntlich:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u_\varkappa^\lambda \, \partial u_{\varkappa'}^{\lambda'}} \cdot R = \frac{\partial R}{\partial u_\varkappa^\lambda} \, \frac{\partial R}{\partial u_{\varkappa'}^{\lambda'}} - \frac{\partial R}{\partial u_\varkappa^{\lambda'}} \, \frac{\partial R}{\partial u_{\varkappa'}^{\lambda}}.$$

Die Ausdrücke, aus welchen die Gleichung zusammengesetzt ist, sind sämmtlich Determinanten. Führt man die Bezeichnungen ein: $\triangle$, $(\alpha\gamma, \beta\delta)$, $(\alpha\beta)$ für die Determinanten:

$$5. \quad \triangle = \begin{vmatrix} u_0^0 & .. & u_n^0 \\ . & . & . \\ u_0^n & .. & u_n^n \end{vmatrix}, \quad (\alpha\gamma, \beta\delta) = \begin{vmatrix} u_0^0 & .. & u_n^0, & \alpha_0, & \gamma_0 \\ . & . & . & . & . \\ u_0^n & .. & u_n^n, & \alpha_n, & \gamma_n \\ \beta_0 & .. & \beta_n, & 0, & 0 \\ \delta_0 & .. & \delta_n, & 0, & 0 \end{vmatrix}, \quad (\alpha\beta) = \begin{vmatrix} u_0^0 & .. & u_n^0, & \alpha_0 \\ . & . & . & . \\ u_0^n & .. & u_n^n, & \alpha_n \\ \beta_0 & .. & \beta_n, & 0 \end{vmatrix},$$

so hat man auf Grund der angegebenen Gleichung:

$$6. \qquad \triangle(\alpha\gamma, \beta\delta) = (\alpha\beta)(\gamma\delta) - (\alpha\delta)(\gamma\beta).$$

Diese Gleichung unter der Bezeichnung (5) wird der Ausgangspunkt sein der nachfolgenden Entwickelungen. Sie lehrt, dass die Determinante $(\alpha\gamma, \beta\delta)$ nur ihr Vorzeichen ändert, wenn man die Buchstaben α und γ oder die Buchstaben β und δ mit einander vertauscht, was auch an der Determinante selber in (5) zu Tage tritt.

Wenn man in der Gleichung (6) die Buchstaben β und γ mit einander vertauscht und in der daraus hervorgehenden Gleichung wieder die Buchstaben β und δ mit einander vertauscht, so erhält man:

$$\triangle(\alpha\beta, \gamma\delta) = (\alpha\gamma)(\beta\delta) - (\alpha\delta)(\beta\gamma)$$
$$\triangle(\alpha\delta, \gamma\beta) = (\alpha\gamma)(\delta\beta) - (\alpha\beta)(\delta\gamma).$$

Die Differenz der beiden Gleichungen giebt unter der Voraussetzung, dass $u_\varkappa^\lambda = u_\lambda^\varkappa$, dass also die Determinante $\triangle$ eine symmetrische sei, weil dann $(\beta\delta) = (\delta\beta)$ ist, mit Rücksicht auf (6) folgendes Resultat:

$$\triangle\{(\alpha\beta, \gamma\delta) - (\alpha\delta, \gamma\beta)\} = (\alpha\beta)(\gamma\delta) - (\alpha\delta)(\gamma\beta) = \triangle(\alpha\gamma, \beta\delta),$$

und mit Unterdrückung des Factors $\triangle$ haben wir:

$$7.^* \qquad (\alpha\beta, \gamma\delta) = (\alpha\gamma, \beta\delta) + (\alpha\delta, \gamma\beta).$$

Von dieser Gleichung wird in dem Folgenden kein Gebrauch gemacht werden. Ich habe sie aber nicht unterdrücken wollen, weil sie beweist, dass man, wie von dem Multiplications-Theorem der Determinanten, so auch, unter Beschränkungen, von dem Additions-Theorem der Determinanten sprechen kann. Wie das Product zweier Determinanten sich wieder als eine Determinante darstellt, welche zusammengesetzt ist aus den Elementen der Factoren, so stellt sich hier die Summe

zweier Determinanten dar als eine Determinante, zusammengesetzt aus den Elementen der Summanden.

Eine zweite ähnlich gebildete Gleichung leitet man unter der gleichen Voraussetzung $u^\lambda_\varkappa = u^\varkappa_\lambda$ aus den beiden oben aus (6) hervorgegangenen Gleichungen ab, wenn man die erste mit $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$ multiplicirt und die zweite mit $(\alpha\delta)(\gamma\beta)$ multiplicirte Gleichung abzieht. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf (6):

$$\begin{aligned}\triangle\{(\alpha\beta,\gamma\delta)(\alpha\beta)(\gamma\delta) - (\alpha\delta,\gamma\beta)(\alpha\delta)(\gamma\beta)\} &= (\alpha\gamma)(\beta\delta)\{(\alpha\beta)(\gamma\delta) - (\alpha\delta)(\gamma\beta)\} \\ &= \triangle(\alpha\gamma)(\beta\delta)(\alpha\gamma,\beta\delta),\end{aligned}$$

und mit Unterdrückung des Factors $\triangle$:

$$8.^* \qquad (\alpha\beta,\gamma\delta)(\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\alpha\gamma,\beta\delta)(\alpha\gamma)(\beta\delta) + (\alpha\delta,\gamma\beta)(\alpha\delta)(\gamma\beta),$$

eine Gleichung, welche wegen ihrer Beschränkung eben so wenig als die vorhergehende (7*) in die folgenden Entwickelungen einzugreifen berufen ist.

Um eine andere Art von Determinanten-Gleichungen abzuleiten, welche der eben gemachten Voraussetzung nicht bedürfen, setzen wir in (6) für die Buchstaben β und γ respective ζ und ε. Dadurch geht die genannte Gleichung über in:

$$\triangle(\alpha\varepsilon,\zeta\delta) = (\alpha\zeta)(\varepsilon\delta) - (\alpha\delta)(\varepsilon\zeta).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(\gamma\beta)$ und zieht sie von der mit $(\varepsilon\zeta)$ multiplicirten Gleichung (6) ab, so erhält man:

$$\triangle\{(\varepsilon\zeta)(\alpha\gamma,\beta\delta) - (\gamma\beta)(\alpha\varepsilon,\zeta\delta)\} = (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta) - (\gamma\beta)(\varepsilon\delta)(\alpha\zeta).$$

Der linke Theil dieser identischen Gleichung ist das Product zweier Factoren, von welchen der erste $\triangle$ sich nicht ändert, wenn die Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ verändert werden. Der andere Factor ϱ'':

$$\varrho'' = (\varepsilon\zeta)(\alpha\gamma,\beta\delta) - (\gamma\beta)(\alpha\varepsilon,\zeta\delta)$$

ändert sich jedoch zugleich mit den Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots \zeta$. Vertauscht man aber diese Buchstaben in der Weise, dass der rechte Theil der vorhergehenden identischen Gleichung ungeändert bleibt, so wird durch

die gleiche Vertauschung auch ϱ'' ungeändert bleiben, wenngleich die Form dieses Ausdruckes sich ändert.

Der rechte Theil der angegebenen identischen Gleichung bleibt aber ungeändert, wenn man für die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ respective setzt $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \alpha, \beta$ oder $\varepsilon, \zeta, \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Man hat daher:

$$9. \qquad \triangle \varrho'' = (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta) - (\gamma\beta)(\varepsilon\delta)(\alpha\zeta)$$

$$10. \qquad \begin{cases} \varrho'' = (\varepsilon\zeta)(\alpha\gamma,\ \beta\delta) - (\gamma\beta)(\alpha\varepsilon,\ \zeta\delta) \\ = (\alpha\beta)(\gamma\varepsilon,\ \delta\zeta) - (\varepsilon\delta)(\gamma\alpha,\ \beta\zeta) \\ = (\gamma\delta)(\varepsilon\alpha,\ \zeta\beta) - (\alpha\zeta)(\varepsilon\gamma,\ \delta\beta). \end{cases}$$

Hieraus entspringt nun durch cyclische Vertauschung der Buchstaben $\alpha, \gamma, \varepsilon$ ein ganzes System identischer Gleichungen. Denn setzt man $\gamma, \varepsilon, \alpha$ für $\alpha, \gamma, \varepsilon$, so wird:

$$11. \qquad \triangle \varrho = (\gamma\beta)(\varepsilon\delta)(\alpha\zeta) - (\varepsilon\beta)(\alpha\delta)(\gamma\zeta)$$

$$12. \qquad \begin{cases} \varrho = (\alpha\zeta)(\gamma\varepsilon,\ \beta\delta) - (\varepsilon\beta)(\gamma\alpha,\ \zeta\delta) \\ = (\gamma\beta)(\varepsilon\alpha,\ \delta\zeta) - (\alpha\delta)(\varepsilon\gamma,\ \beta\zeta) \\ = (\varepsilon\delta)(\alpha\gamma,\ \zeta\beta) - (\gamma\zeta)(\alpha\varepsilon,\ \delta\beta). \end{cases}$$

Setzt man $\varepsilon, \alpha, \gamma$ für $\alpha, \gamma, \varepsilon$, so gehen (9) und (10) über in:

$$13. \qquad \triangle \varrho' = (\varepsilon\beta)(\alpha\delta)(\gamma\zeta) - (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta)$$

$$14. \qquad \begin{cases} \varrho' = (\gamma\zeta)(\varepsilon\alpha,\ \beta\delta) - (\alpha\beta)(\varepsilon\gamma,\ \zeta\delta) \\ = (\varepsilon\beta)(\alpha\gamma,\ \delta\zeta) - (\gamma\delta)(\alpha\varepsilon,\ \beta\zeta) \\ = (\alpha\delta)(\gamma\varepsilon,\ \zeta\beta) - (\varepsilon\zeta)(\gamma\alpha,\ \delta\beta). \end{cases}$$

Addirt man endlich (9), (11), (13), so erhält man:

$$15. \qquad \varrho + \varrho' + \varrho'' = 0.$$

Hieraus entspringt nun ein zweites System identischer Gleichungen, wenn man die Buchstaben δ und ζ mit einander vertauscht. Bezeichnet man nämlich die Ausdrücke, in welche $\varrho'', \varrho, \varrho'$ durch diese Vertauschungen übergehen, respective mit r'', r', r, so erhält man aus (9) bis (15) folgendes System:

16. $$\triangle r'' = (\alpha\beta)(\gamma\zeta)(\varepsilon\delta) - (\gamma\beta)(\varepsilon\zeta)(\alpha\delta)$$

17. $$\begin{cases} r'' = (\varepsilon\delta)(\alpha\gamma,\ \beta\zeta) - (\gamma\beta)(\alpha\varepsilon,\ \delta\zeta) \\ \quad = (\alpha\beta)(\gamma\varepsilon,\ \zeta\delta) - (\varepsilon\zeta)(\gamma\alpha,\ \beta\delta) \\ \quad = (\gamma\zeta)(\varepsilon\alpha,\ \delta\beta) - (\alpha\delta)(\varepsilon\gamma,\ \zeta\beta) \end{cases}$$

18. $$\triangle r' = (\gamma\beta)(\varepsilon\zeta)(\alpha\delta) - (\varepsilon\beta)(\alpha\zeta)(\gamma\delta)$$

19. $$\begin{cases} r' = (\alpha\delta)(\gamma\varepsilon,\ \beta\zeta) - (\varepsilon\beta)(\gamma\alpha,\ \delta\zeta) \\ \quad = (\gamma\beta)(\varepsilon\alpha,\ \zeta\delta) - (\alpha\zeta)(\varepsilon\gamma,\ \beta\delta) \\ \quad = (\varepsilon\zeta)(\alpha\gamma,\ \delta\beta) - (\gamma\delta)(\alpha\varepsilon,\ \zeta\beta) \end{cases}$$

20. $$\triangle r = (\varepsilon\beta)(\alpha\zeta)(\gamma\delta) - (\alpha\beta)(\gamma\zeta)(\varepsilon\delta)$$

21. $$\begin{cases} r = (\gamma\delta)(\varepsilon\alpha,\ \beta\zeta) - (\alpha\beta)(\varepsilon\gamma,\ \delta\zeta) \\ \quad = (\varepsilon\beta)(\alpha\gamma,\ \zeta\delta) - (\gamma\zeta)(\alpha\varepsilon,\ \beta\delta) \\ \quad = (\alpha\zeta)(\gamma\varepsilon,\ \delta\beta) - (\varepsilon\delta)(\gamma\alpha,\ \zeta\beta) \end{cases}$$

22. $$r + r' + r'' = 0.$$

Um über dieses Chaos von Gleichungen einen Ueberblick zu gewinnen, führen wir die Bezeichnungen ein:

23. $$\begin{cases} a = (\varepsilon\zeta)(\gamma\alpha,\ \delta\beta) & a' = (\alpha\beta)(\varepsilon\gamma,\ \zeta\delta) & a'' = (\gamma\delta)(\varepsilon\alpha,\ \zeta\beta) \\ b = (\gamma\beta)(\varepsilon\alpha,\ \delta\zeta) & b' = (\varepsilon\delta)(\alpha\gamma,\ \zeta\beta) & b'' = (\alpha\zeta)(\varepsilon\gamma,\ \delta\beta) \\ c = (\alpha\delta)(\varepsilon\gamma,\ \beta\zeta) & c' = (\gamma\zeta)(\alpha\varepsilon,\ \delta\beta) & c'' = (\varepsilon\beta)(\alpha\gamma,\ \delta\zeta). \end{cases}$$

Hierdurch kommen nämlich alle Gleichungen (9) bis (22) zurück auf die 20 Gleichungen (1) mit Ausschluss der 6 folgenden Gleichungen, welche die 6 Ausdrücke ϱ und r definiren:

24. $$\begin{cases} \triangle\varrho = (\gamma\beta)(\varepsilon\delta)(\alpha\zeta) - (\varepsilon\beta)(\alpha\delta)(\gamma\zeta) \\ \triangle\varrho' = (\varepsilon\beta)(\alpha\delta)(\gamma\zeta) - (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta) \\ \triangle\varrho'' = (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta) - (\gamma\beta)(\varepsilon\delta)(\alpha\zeta) \\ \triangle r = (\varepsilon\beta)(\alpha\zeta)(\gamma\delta) - (\alpha\beta)(\gamma\zeta)(\varepsilon\delta) \\ \triangle r' = (\gamma\beta)(\varepsilon\zeta)(\alpha\delta) - (\varepsilon\beta)(\alpha\zeta)(\gamma\delta) \\ \triangle r'' = (\alpha\beta)(\gamma\zeta)(\varepsilon\delta) - (\gamma\beta)(\varepsilon\zeta)(\alpha\delta). \end{cases}$$

An den 9 Determinanten-Ausdrücken (23) kann man die Bemerkung machen, dass dieselben in einander übergehen, aber das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, wenn man entweder irgend zwei von den Buchstaben α, γ, ε oder irgend zwei von den Buchstaben β, δ, ζ mit einander vertauscht.

Von diesen Eigenschaften der 9 Determinanten-Ausdrücke (23) werden wir Gebrauch machen zur Entscheidung der Frage, ob dieselben so allgemein sind, dass sie nur den 20 Gleichungen (1) genügen, oder ob sie auch den Bedingungen (4) oder ähnlichen Bedingungen unterworfen sind. Das letztere trifft zu, und es wird unsere Aufgabe sein, dieses nachzuweisen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke irgend einen der Ausdrücke, welche nach (4) verschwinden, zum Beispiel den Ausdruck E:

$$25. \qquad E = a + b' + c'',$$

so stellt sich derselbe nach (23) so dar:

$$26. \qquad E = (\varepsilon\zeta)(\alpha\gamma, \beta\delta) + (\varepsilon\delta)(\alpha\gamma, \zeta\beta) + (\varepsilon\beta)(\alpha\gamma, \delta\zeta).$$

Man hat aber nach (6) und mit Vertauschung der Buchstaben in dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} \triangle(\alpha\gamma, \beta\delta) &= (\alpha\beta)(\gamma\delta) - (\alpha\delta)(\gamma\beta) \\ \triangle(\alpha\gamma, \zeta\beta) &= (\alpha\zeta)(\gamma\beta) - (\alpha\beta)(\gamma\zeta) \\ \triangle(\alpha\gamma, \delta\zeta) &= (\alpha\delta)(\gamma\zeta) - (\alpha\zeta)(\gamma\delta). \end{aligned}$$

Multiplicirt man demnach die Gleichung (26) mit $\triangle$, so stellt sich der rechte Theil der Gleichung als eine Determinante dar wie folgt:

$$27. \qquad \triangle E = \begin{vmatrix} (\alpha\beta), & (\alpha\delta), & (\alpha\zeta) \\ (\gamma\beta), & (\gamma\delta), & (\gamma\zeta) \\ (\varepsilon\beta), & (\varepsilon\delta), & (\varepsilon\zeta) \end{vmatrix},$$

welche beweist, dass E nur sein Vorzeichen ändert, wenn man irgend zwei Buchstaben α, γ, ε oder irgend zwei Buchstaben β, δ, ζ mit einander vertauscht.

Diese Vertauschungen lassen nun aus (25) folgende 6 identische Gleichungen hervorgehen:

$$28.\quad \begin{cases} a''+b+c'=E & b''+c+a'=E & c''+a+b'=E \\ a''+b'+c=E & b''+c'+a=E & c''+a'+b=E, \end{cases}$$

Gleichungen, welche in die Gleichungen (4) vollständig übergehen, wenn E verschwindet. Dieses trifft aber wohl nur zu, wenn $n=1$, wie nachgewiesen werden soll.

Denkt man sich die Determinante $\triangle E$ entwickelt, so wird ein beliebiges Glied der Entwickelung nur die Form haben können:

$$C\alpha_a\gamma_c\varepsilon_e\,.\,\beta_b\delta_d\zeta_f.$$

Dieses eine Glied bedingt, weil die Determinante auch zwischen den Buchstaben β, δ, ζ alternirt, andere Glieder mit abwechselnden Vorzeichen, deren Summe ist:

$$C\alpha_a\gamma_c\varepsilon_e\,.\,\Sigma\pm\beta_b\delta_d\zeta_f,$$

und diese Summe, als ein Glied der Entwickelung aufgefasst, bedingt, weil die Determinante auch zwischen den Buchstaben α, γ, ε alternirt, wieder Glieder, deren Summe ist:

$$C\Sigma\pm\alpha_a\gamma_c\varepsilon_e\,.\,\Sigma\pm\beta_b\delta_d\zeta_f.$$

Da nun im Falle $n=1$ die Indices a, c, e und die Indices b, d, f nur die Zahlen 0 und 1 bedeuten können, in welchem Falle sowohl der erste als der zweite Factor neben C verschwindet, so sieht man, dass das aus der Entwickelung der Determinante $\triangle E$ hervorgehobene Glied nicht vorkommen kann, dass also die Determinante selber verschwindet. Der in (5) definirte Ausdruck $\triangle$ verschwindet nicht. Es muss desshalb E verschwinden. Dadurch gehen nun die Gleichungen (28) über in die Gleichungen (4).

In dem allgemeinen Falle, wenn $n>1$, lässt sich für das Verschwinden von E ein gleicher Beweis nicht führen, und wir müssen an Stelle der Gleichungen (4) die Gleichungen (28) gelten lassen.

Zum Schlusse führen wir noch ein System Gleichungen vor, welches sich aus (16) und (17) ergiebt, wenn man die Buchstaben $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$ der Reihe nach verändert in $\varepsilon\ \zeta\ \beta\ \gamma\ \delta\ \alpha$ oder in $\beta\ \zeta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \alpha$, und annimmt, dass r'' durch diese Veränderung übergeht in $-r_0$ oder in $-r_,$:

29. $$\triangle r'' = (\alpha\beta)(\gamma\zeta)(\varepsilon\delta) - (\gamma\beta)(\varepsilon\zeta)(\alpha\delta)$$

30. $$\begin{cases} r'' = (\varepsilon\delta)(\alpha\gamma,\ \beta\zeta) - (\gamma\beta)(\alpha\varepsilon,\ \delta\zeta) \\ \quad = (\alpha\beta)(\gamma\varepsilon,\ \zeta\delta) - (\varepsilon\zeta)(\gamma\alpha,\ \beta\delta) \\ \quad = (\gamma\zeta)(\varepsilon\alpha,\ \delta\beta) - (\alpha\delta)(\varepsilon\gamma,\ \zeta\beta) \end{cases}$$

31. $$-\triangle r_0 = (\delta\gamma)(\beta\zeta)(\varepsilon\alpha) - (\beta\gamma)(\varepsilon\zeta)(\delta\alpha)$$

32. $$\begin{cases} -r_0 = (\varepsilon\alpha)(\delta\beta,\ \gamma\zeta) - (\beta\gamma)(\delta\varepsilon,\ \alpha\zeta) \\ \quad = (\delta\gamma)(\beta\varepsilon,\ \zeta\alpha) - (\varepsilon\zeta)(\beta\delta,\ \gamma\alpha) \\ \quad = (\beta\zeta)(\varepsilon\delta,\ \alpha\gamma) - (\delta\alpha)(\varepsilon\beta,\ \zeta\gamma) \end{cases}$$

33. $$-\triangle r_, = (\varepsilon\delta)(\gamma\zeta)(\beta\alpha) - (\gamma\delta)(\beta\zeta)(\varepsilon\alpha)$$

34. $$\begin{cases} -r_, = (\beta\alpha)(\varepsilon\gamma,\ \delta\zeta) - (\gamma\delta)(\varepsilon\beta,\ \alpha\zeta) \\ \quad = (\varepsilon\delta)(\gamma\beta,\ \zeta\alpha) - (\beta\zeta)(\gamma\varepsilon,\ \delta\alpha) \\ \quad = (\gamma\zeta)(\beta\varepsilon,\ \alpha\delta) - (\varepsilon\alpha)(\beta\gamma,\ \zeta\delta). \end{cases}$$

Unter der ausdrücklichen Annahme, dass $\triangle$ eine symmetrische Determinante sei, geht dann aus (29), (31), (33) die einfache Gleichung hervor:

35*. $$r_0 + r_, + r'' = 0.$$

Die aufgeführten identischen Determinanten-Gleichungen sind vielfacher geometrischer Deutungen fähig, von welchen wir nur eine hervorheben wollen. Setzen wir zu diesem Zwecke $n = 1$ und lassen die Grössen u lineare Ausdrücke der Coordinaten eines variabeln Punktes bedeuten, so werden Determinanten-Ausdrücke von der Form $(\alpha\beta)$ die Repräsentanten von geraden Linien sein, welche irgend 6 auf dem Kegelschnitte $\triangle = 0$ gelegene Punkte $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$ paarweise verbinden, denn nach (6) verschwindet $\triangle$, wenn $(\alpha\beta)$ und $(\alpha\delta)$ verschwinden oder $(\alpha\beta)$ und $(\gamma\beta)$. Es ist also $(\alpha\beta) = 0$ die Gleichung der geraden Linie, welche

die Punkte α und β des Kegelschnittes verbindet. Geht man nun von dem, dem Kegelschnitte einbeschriebenen Sechsecke $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$ aus, so beweisen die aufgeführten Determinanten-Gleichungen bis (28) den am Ende des vorhergehenden Abschnittes angegebenen Satz. Unter derselben Annahme $n = 1$ und unter der Beschränkung, dass $\triangle$ eine symmetrische Determinante sei, welche Beschränkung jeder Kegelschnitt gestattet, beweisen die mit (29) anhebenden Gleichungen, dass dem Kegelschnitte 3 Sechsecke $\varepsilon\,\zeta\,\gamma\,\beta\,\alpha\,\delta$, $\varepsilon\,\zeta\,\beta\,\gamma\,\delta\,\alpha$, $\beta\,\zeta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha$ einbeschrieben sind, deren Pascal'sche Linien $r''\,r_0\,r_{,}$ sich in einem Kirkman'schen Punkte schneiden.

München, im Februar 1872.

44.

Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, und den confocalen Kegelschnitten.

[Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften, Band 11, III. Abtheilung, Seite 1—24.]

Man hat in der Geometrie der Ebene zwei Sätze, welche, wenn man sie mit einander vergleicht, lebhaft an das Princip der Reciprocität erinnern:

Die vier gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kreisen werden durch die gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise halbirt.

Die Tangenten in jedem der vier Schnittpunkte zweier confocalen Kegelschnitte stehen auf einander senkrecht.

Die Vermuthung, dass die genannten beiden Sätze nichts anderes seien, als reciproke Sätze, wird noch bestätigt, wenn man erwägt, dass zwei Kreise Kegelschnitte sind, welche sich in vier Punkten schneiden (von welchen allerdings zwei Schnittpunkte im Unendlichen liegen), während zwei confocale Kegelschnitte von denselben vier geraden Linien berührt werden (die freilich imaginär sind); und dass Kegelschnitte, welche sich in denselben vier Punkten schneiden, nach dem Gesetze der Reciprocität Kegelschnitten entsprechen, welche dieselben vier geraden Linien berühren.

Wenn die gehegte Vermuthung zur Wahrheit werden soll, so muss sich ein Kegelschnitt auffinden lassen, in Rücksicht auf welchen, als

Directrix genommen, Kreise mit gemeinschaftlicher Secante als reciproke Figuren confocalen Kegelschnitten entsprechen. Findet sich wirklich eine solche Directrix, so werden sich nicht allein die beiden hervorgehobenen Sätze als reciproke Sätze darstellen, sondern noch eine grosse Zahl anderer Sätze. Man wird sogar in der Lage sein, aus den bekannten Sätzen über Kreise mit gemeinschaftlicher Secante etwa noch unbekannte Sätze über confocale Kegelschnitte zu entdecken, wie umgekehrt.

Wir werden nachweisen, dass der Kreis die gesuchte Directrix ist.

Da bei dieser Gelegenheit neben der Directrix noch verschiedene andere Kreise auftreten, so wird es sich empfehlen, denjenigen Kreis mit beliebigem Radius, welcher als Directrix gewählt werden soll, zum Unterschiede von anderen Kreisen immer nur mit dem Namen der Directrix zu bezeichnen und seinen Radius als die Längeneinheit zu nehmen. Wenn wir alsdann den Mittelpunkt e der Directrix als den Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems wählen, auf welches sich unsere Gleichungen beziehen sollen, so haben wir die Gleichung der Directrix in homogenen Punktcoordinaten:

$$1. \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

und wenn wir die Coordinaten irgend eines Poles mit x, y, z und die Coordinaten seiner Polare mit u, v, w bezeichnen, so haben wir nach (20) der siebenzehnten Vorlesung[1]) zwischen ihnen die Relationen:

$$2. \qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = -w.$$

Die Gleichung irgend eines Kreises

$$3. \qquad x^2 + y^2 + (ax + by + cz)z = 0$$

enthält drei willkürliche Constanten a, b, c, welche sowohl die Coordinaten des Mittelpunktes, als den Radius des Kreises bestimmen, wie umgekehrt.

1) Die Citate beziehen sich auf meine „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene", Leipzig, Teubner 1873, und auf die Fortsetzung derselben, betitelt: „Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte", Leipzig, Teubner 1874.

Setzen wir für x, y, z die Ausdrücke (2) in (3), so erhalten wir

3*. $$u^2 + v^2 - (au + bv - cw)\,w = 0,$$

die Gleichung der reciproken Polare des Kreises in Liniencoordinaten.

Diese Gleichung lässt sich aus zwei Gleichungen zusammensetzen:

$$(au + bv - cw)\,w = 0, \qquad u^2 + v^2 = 0.$$

Die erste Gleichung drückt ein Punktepaar aus, von dem ein Punkt $w = 0$ der Mittelpunkt e der Directrix (1) ist. Mit diesem Punktepaare ist nach der einundzwanzigsten Vorlesung der Kegelschnitt (3*) confocal. Es ist mithin die reciproke Polare (3*) des Kreises (3) ein Kegelschnitt, von dem ein Brennpunkt mit dem Mittelpunkte e der Directrix zusammenfällt. Was den zweiten Punkt e' des Paares anbetrifft, so lassen sich seine Coordinaten α, β aus der Gleichung ablesen: $\alpha = -\frac{a}{c}$, $\beta = -\frac{b}{c}$. Mit diesem Punktepaare ist, auf Grund der Zusammensetzung der Gleichung (3*) aus den darauf folgenden Gleichungen, der Kegelschnitt (3*) confocal, und die Gleichung (3*) mit den willkürlichen Constanten a, b, c stellt alle möglichen Kegelschnitte dar, von welchen ein Brennpunkt e mit dem Mittelpunkte der Directrix zusammenfällt.

Nennen wir nun *focale Kegelschnitte* solche, welche einen Brennpunkt gemein haben, so können wir sagen:

4. *Die reciproken Polaren aller Kreise, bezogen auf einen beliebigen Kreis als Directrix, sind focale Kegelschnitte, deren gemeinsamer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Directrix zusammenfällt.*

Die reciproken Polaren aller focalen Kegelschnitte, bezogen auf einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt der gemeinsame Brennpunkt ist, sind Kreise.

Die in dem Vorhergehenden betrachteten focalen Kegelschnitte (3*) werden im Speciellen confocale Kegelschnitte, wenn wir die Coordinaten α und β des zweiten Brennpunktes e' als gegeben betrachten, dagegen die Constante c variiren lassen. Führen wir desshalb die gegebenen Coordinaten, indem wir setzen $a = -\alpha c$, $b = -\beta c$, in die Gleichungen der reciproken Polaren (3) und (3*) ein, so gehen dieselben über in:

5. $$x^2 + y^2 - c\,(\alpha x + \beta y - z)\,z = 0.$$

5*. $$u^2 + v^2 + c\,(\alpha u + \beta v + w)\,w = 0.$$

Die letzte Gleichung (5*) mit dem veränderlichen Parameter c drückt confocale Kegelschnitte aus, deren Brennpunkte e und e' sind. Es erhebt sich nun die Frage, welche Eigenschaften ihre reciproken Polaren, die Kreise (5), haben werden.

Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir, dass für $z = 1$ sämmtliche Kreisgleichungen (5) die in der dreizehnten Vorlesung definirte Normalform haben. Fixirt man daher irgend zwei von diesen Kreisgleichungen und zieht die eine von der anderen ab, so erhält man auf Grund der vierzehnten Vorlesung die Gleichung der gemeinschaftlichen Secante S:

6. $$\alpha x + \beta y - 1 = 0$$

der beiden fixirten Kreise und zugleich aller Kreise, deren analytischer Ausdruck die Gleichung (5) mit der willkürlichen Constante c ist. Es sind demnach die reciproken Polaren confocaler Kegelschnitte in Rücksicht auf die Kreisdirectrix, deren Mittelpunkt in einem der gemeinschaftlichen Brennpunkte liegt, Kreise mit gemeinschaftlicher Secante.

Man wird sich nun fragen, welche Lage die genannte gemeinschaftliche Secante zu den Brennpunkten der confocalen Kegelschnitte hat? Aus ihrer Gleichung (6) wird ersichtlich, dass dieselbe nichts anderes ist, als die Polare des Brennpunktes e', dessen Coordinaten α und β sind, rücksichtlich der Directrix (1).

Die gemachten Bemerkungen fassen wir zusammen in dem einen Satze:

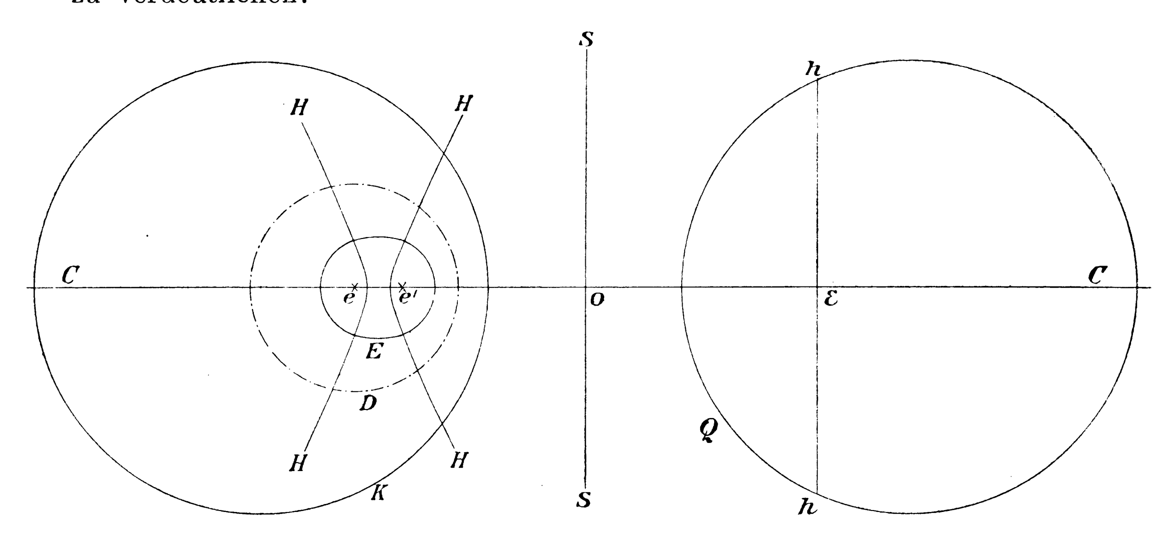
7. *Die reciproken Polaren von confocalen Kegelschnitten rücksichtlich einer beliebigen Kreisdirectrix, deren Mittelpunkt in einem der gemeinschaftlichen Brennpunkte liegt, sind Kreise mit gemeinschaftlicher Secante, und letztere ist die Polare des andern Brennpunktes.*

Die oben aufgeworfene Frage kehren wir nur um, wenn wir uns folgende Aufgabe stellen: „Wenn ein System von Kreisen (5) gegeben ist mit gemeinschaftlicher Secante S, so soll die Kreisdirectrix gefunden werden, in Rücksicht auf welche die reciproken Polaren der gegebenen Kreise confocale Kegelschnitte sind.“ Wir beantworten die aufgeworfene Frage mit dem Hinweis auf die vierzehnte Vorlesung, aus welcher ersichtlich ist, dass unter den Kreisen (5) mit gemeinschaftlicher Secante zwei Kreise sich auszeichnen, deren Radien verschwinden. Ihre Mittelpunkte

wurden dort Grenzpunkte genannt, und es ergaben sich zwei Grenzpunkte, die gleiche Abstände von der gemeinschaftlichen Secante haben. Nun findet sich aber unter den Kreisen (5) mit der gemeinschaftlichen Secante S ein Kreis, dessen Radius verschwindet, wenn c verschwindet. Sein Mittelpunkt fällt, wie aus seiner Gleichung ersichtlich ist, mit dem Mittelpunkte e der Directrix zusammen. Es ist mithin der Punkt e ein Grenzpunkt des Systems (5) von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante. Daraus entspringt der umgekehrte Satz:

8. ***Die reciproken Polaren von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante rücksichtlich einer beliebigen Kreisdirectrix, deren Mittelpunkt mit einem der Grenzpunkte zusammenfällt, sind confocale Kegelschnitte. Der eine gemeinsame Brennpunkt ist der Mittelpunkt der Directrix, der andere ist der Pol der gemeinschaftlichen Secante.***

Die folgende Figur ist dazu bestimmt, die reciproken Sätze (7) und (8) zu verdeutlichen:



Man erblickt in der Figur zwei Kreise, K und Q, welche absichtlich von gleicher Grösse angenommen sind. Die gerade Linie CC ist die Centrallinie, welche die Mittelpunkte der Kreise verbindet. Auf ihr steht in o die gemeinschaftliche Secante SS senkrecht und ist von jedem der beiden Kreise gleich weit entfernt. Die Punkte e und ε, welche auf der Centrallinie C von o ebenfalls gleich weit abstehen, stellen die Grenz-

punkte des Systemes der Kreise mit gemeinschaftlicher Secante dar. Um den Grenzpunkt e als Mittelpunkt ist die Kreisdirectrix D beschrieben mit einem beliebigen Radius, welcher aber als die Längeneinheit anzunehmen ist. Der Punkt e' soll den Pol der geraden Linie SS rücksichtlich der Directrix vorstellen. Die reciproke Polare des Kreises K ist durch die Ellipse E angedeutet, und die reciproke Polare des Kreises Q soll die mit der Ellipse E confocale Hyperbel H vorstellen. Die in dem Punkte ε auf der Centrallinie CC errichtete Senkrechte schneidet den Kreis Q in den Punkten hh, deren Bedeutung dem Folgenden vorbehalten bleibt.

Obwohl die Gleichungen (5) und (5*) der reciproken Polaren einfach genug sind, so wollen wir sie doch, um Rechnungen zu ersparen, dadurch noch einfacher machen, dass wir den Brennpunkt e', dessen Coordinaten α und β sind, in die x-Axe des Coordinatensystems verlegen, indem wir $\beta = 0$ setzen. Hierdurch gehen die genannten Gleichungen, wenn wir zugleich an Stelle des Parameters c den Parameter λ durch die Relation $c\lambda + 1 = 0$ einführen, über in:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{\lambda}(\alpha x - z)\, z = 0 \tag{9.}$$

$$u^2 + v^2 - \frac{1}{\lambda}(\alpha u + w)\, w = 0, \tag{9*.}$$

und es wird in der Figur $ee' = \alpha$, $eo = \frac{1}{\alpha}$, weil die Punkte e' und 0 harmonische Pole der Directrix sind, und $e\varepsilon = \frac{2}{\alpha}\cdot$

Um nun die Bedeutung der geraden Linien hh in der Figur festzustellen, bemerken wir, dass die Gleichung der Polare eines gegebenen Punktes x_1, y_1, z_1 für den Kreis (9) ist:

$$x_1\left(x + \frac{\alpha}{2\lambda} z\right) + y_1 y + \frac{z_1}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{2} x - z\right) = 0,$$

welche Gleichung übergeht in folgende von λ unabhängige Gleichung:

$$\frac{\alpha}{2} x - z = 0,$$

wenn der gegebene Punkt mit dem Punkte e zusammenfällt.

Dieses ist aber gerade die Gleichung der geraden Linie hh, welche von dem Punkte e um $\frac{2}{\alpha}$ absteht. Wir drücken dieses als Satz aus, wie folgt:

10. *Die Polaren eines Grenzpunktes in einem Systeme von Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, fallen mit derjenigen geraden Linie zusammen, welche in dem anderen Grenzpunkte auf der Centrallinie senkrecht steht.*

Es sind daher der Grenzpunkt e und jeder beliebige Punkt auf der geraden Linie hh harmonische Pole für das ganze System von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante. Es folgt daraus aber noch, dass die Schnittpunkte h, h der gleich bezeichneten geraden Linie mit dem Kreise Q die Berührungspunkte der von dem Grenzpunkte e an den Kreis gezogenen Tangenten sind. Für die Directrix wird diese gerade Linie hh die Polare des Halbirungspunktes M der geraden Linie ee', welcher Punkt zugleich Mittelpunkt aller confocalen Kegelschnitte (9*) ist, weil $eM = \frac{\alpha}{2}$ und $e\varepsilon = \frac{2}{\alpha}$. Da nun die Polaren aller Punkte auf der geraden Linie hh, rücksichtlich der Directrix D, durch den Punkt M gehen und die Polaren der Schnittpunkte $h\,h$ Tangenten der Hyperbel H werden, so sieht man, dass die Polaren der Punkte h, h, rücksichtlich der Directrix D, die Asymptoten der Hyperbel H sind. Es wird ferner der Kreis Q durch seine Polare hh des Punktes e in zwei Theile getheilt. Die Polaren aller Punkte des einen Theiles, rücksichtlich der Directrix, werden Tangenten des einen Zweiges der Hyperbel HH, die den Punkten des andern Theiles entsprechenden Polaren berühren den andern Zweig der Hyperbel.

Die reciproke Polare des Kreises K auf der linken Seite der gemeinschaftlichen Secante SS wurde in der Figur als die Ellipse E aufgeführt, die dem Kreise Q auf der andern Seite der gemeinschaftlichen Secante entsprechende reciproke Polare wurde als die Hyperbel HH bezeichnet. Dieses wird seine Rechtfertigung finden, wenn wir auf die Natur der Kreise (9) und ihrer reciproken Polaren (9*) näher eingehen.

Wir entnehmen aus der Gleichung (9) den Abstand A des Mittelpunktes des durch die Gleichung ausgedrückten Kreises und seinen Radius R:

$$11. \qquad A = -\frac{\alpha}{2\lambda}, \quad R^2 = \left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass mit wachsendem Werthe von λ von 0 bis $+\infty$ sowohl die Entfernungen A der Mittelpunkte der Kreise (9) von dem Grenzpunkte e als auch die Radien R von ∞ bis 0 abnehmen. Die Kreise selbst füllen den Theil der Ebene aus, welcher auf der linken Seite der gemeinschaftlichen Secante SS liegt.

Lässt man λ weiter von 0 bis $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ abnehmen, so liegen die Kreise (9) auf der rechten Seite der gemeinschaftlichen Secante und ihre Radien sowohl als die Entfernungen der Mittelpunkte von dem Grenzpunkte ε nehmen von ∞ bis 0 ab. Diese Kreise erfüllen wieder den rechts von der gemeinschaftlichen Secante gelegenen Theil der Ebene, so dass die ganze Ebene ausgefüllt wird durch die Kreise (9), welchen alle Werthe entsprechen zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$. Die erste Grenze entspricht dem Grenzpunkte e, die andere dem Grenzpunkte ε. Man kann daraus schliessen, dass alle Kreise, für welche λ zwischen den Grenzen $-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ und $-\infty$ liegt, imaginäre Kreise sein müssen. Und in der That weist die letzte Gleichung (11) in den angegebenen Fällen auf imaginäre Radien hin.

Die angegebenen Grenzen für die Kreise (9) und ihre Zwischenstadien müssen auch ihre Bedeutung haben für die reciproken Polaren (9*) der Kreise. Diese zu erforschen, soll unsere nächste Aufgabe sein.

Zu diesem Zwecke übersetzen wir die in Liniencoordinaten gegebene Gleichung (9*) der reciproken Polare des Kreises (9) nach bekannter Regel in eine durch Punktcoordinaten ausgedrückte Gleichung, indem wir die Relationen aufstellen:

$$u - \frac{\alpha}{2\lambda} w = x, \quad v = y, \quad -\frac{\alpha}{2\lambda} u - \frac{1}{\lambda} w = z.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt, wenn wir $z = 1$ setzen:

$$\frac{\frac{1}{\lambda}x - \frac{a}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2} = u, \quad y = v, \quad \frac{-\frac{a}{2\lambda}x - 1}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2} = w.$$

Setzen wir diese Werthe von u, v, w in die Gleichung (9*) ein, so erhalten wir die Gleichung der reciproken Polaren (9*), ausgedrückt durch Punktcoordinaten:

12. $$\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - 1 = 0.$$

Für alle positiven Werthe von λ, welche den Kreisen (9) links von der gemeinschaftlichen Secante entsprechen, werden die confocalen Kegelschnitte (12) Ellipsen, welche die ganze Ebene ausfüllen. Für die negativen Werthe von λ von 0 bis $-\left(\frac{a}{2}\right)^2$, welche den Kreisen (9) rechts von der gemeinschaftlichen Secante entsprechen, liegen confocale Hyperbeln vor, welche ebenfalls die ganze Ebene ausfüllen. Nimmt endlich λ noch weiter ab von $-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ bis $-\infty$, so entsprechen den imaginären Kreisen auch imaginäre reciproke Ellipsen (12).

Damit nun Kreise des Systems (9) leicht aufgefunden werden können, welche gleiche Radien haben, so wollen wir an Stelle des Parameters λ den Parameter k einführen durch die Gleichung

13. $$\frac{1}{\lambda} = k - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^2.$$

Hierdurch geht die Kreisgleichung (9) über in:

14. $$x^2 + y^2 + \left(k - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^2\right)(ax - z) = 0,$$

und die Gleichung (12) der reciproken Polare geht über in:

14*. $$\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 k + \frac{1}{2}} + y^2 - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 k - \frac{1}{2}} = 0.$$

Positive Werthe von k entsprechen dann den Kreisen links von der gemeinschaftlichen Secante, und gleich grosse negative Werthe von k entsprechen gleich grossen Kreisen auf der rechten Seite. Für k zwischen den Grenzen $k = \pm \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2$ giebt es weder reelle Kreise (14), noch reelle, ihnen entsprechende reciproke Polaren (14*).

In dieser Weise werden die reciproke Polare (14*) und die reciproke Polare:

15. $$\frac{\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k + \frac{1}{2}} + y^2 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 k + \frac{1}{2}} = 0$$

irgend zwei gleich grossen Kreisen (14) auf der einen und der andern Seite der gemeinschaftlichen Secante entsprechen. Ziehen wir nun eine von diesen Gleichungen von der anderen ab, so erhalten wir die sehr einfache Gleichung:

16. $$x(x - \alpha) = 0,$$

welche im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden folgende geometrische Interpretation gestattet:

17. *Die reciproken Polaren von zwei gleich grossen Kreisen* (14) *sind confocale Kegelschnitte verschiedener Gattung, welche sich in vier Punkten schneiden, die auf denjenigen beiden geraden Linien liegen, welche auf der Verbindungslinie der Brennpunkte in den Brennpunkten senkrecht stehen.*

Nachdem wir in dem Vorhergehenden die vorstehende Figur in allen ihren Theilen gerechtfertigt haben, so unterbrechen wir unsere Untersuchung, um einige Sätze vorzuführen, die in dem Folgenden gute Dienste leisten werden. Der erste von diesen Sätzen lautet also:

18. *Wenn irgend ein Kegelschnitt als Directrix gegeben ist und in Beziehung auf denselben zwei andere Kegelschnitte als reciproke Polaren vorliegen, so sind die Polaren von zwei harmonischen Polen des einen Kegelschnittes, rücksichtlich der Directrix, für den anderen Kegelschnitt harmonische Polaren, und umgekehrt sind die Pole von zwei harmonischen Polaren des einen Kegelschnittes, rücksichtlich der Directrix, harmonische Pole des anderen Kegelschnittes.*

Stellen wir uns, um den Satz zu beweisen, zwei Kegelschnitte vor, welche reciproke Polaren sein sollen, und für den einen Kegelschnitt liege ein harmonisches Polepaar a, a' vor. Alsdann schneidet die Verbindungslinie der Pole den betreffenden Kegelschnitt in einem Punktepaare b, b', welches harmonisch mit dem Polepaar ist. Diese beiden Punktepaare entsprechen durch die Directrix Polarenpaaren A, A' und B, B', welche nach dem Satze (18) der neunzehnten Vorlesung harmonisch zu einander sind. Da nun B und B' Tangenten des reciproken Kegelschnittes und A und A' harmonisch zu ihnen sind, so sind A und A' nach der Definition harmonische Polaren des reciproken Kegelschnittes.

Auf Grund von (13) der sechszehnten Vorlesung stellt die Gleichung $f - \lambda\varphi = 0$ jeden beliebigen Kegelschnitt dar, welcher durch die Schnittpunkte irgend zweier gegebenen Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ geht. Die Bedingung, dass zwei durch ihre Coordinaten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 gegebenen Punkte harmonische Pole des beliebigen Kegelschnittes seien, wird nach (5) und (9) der siebenzehnten Vorlesung durch die Gleichung $f_{01} - \lambda\varphi_{01} = 0$ ausgedrückt. Da diese Gleichung aber erfüllt wird, wenn $f_{01} = 0$ und $\varphi_{01} = 0$ ist, so können wir, indem wir uns die geometrische Bedeutung der beiden letzten Gleichungen vergegenwärtigen, die reciproken Sätze aussprechen:

19. *Wenn zwei Punkte harmonische Pole sind für irgend zwei gegebene Kegelschnitte, so sind sie auch harmonische Pole für jeden Kegelschnitt, der durch die vier Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte geht.*

20. *Wenn zwei gerade Linien harmonische Polaren sind für irgend zwei gegebene Kegelschnitte, so sind sie auch harmonische Polaren für jeden Kegelschnitt, welcher die vier gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kegelschnitte berührt.*

Aus dem ersten dieser beiden Sätze ergiebt sich, dass jeder beliebig gegebene Punkt seinen harmonischen Pol aufzuweisen hat in dem Systeme von Kegelschnitten, welche durch dieselben vier Punkte gehen. Denn construirt man die Polaren des gegebenen Punktes für zwei dieser Kegelschnitte, so wird der Schnittpunkt derselben der gesuchte harmonische Pol sein. Ebenso hat eine jede gerade Linie ihre harmonische Polare in dem Systeme von Kegelschnitten, welche vier gerade Linien berühren.

Sie ist die Verbindungslinie der Pole der geraden Linie für irgend zwei der genannten Kegelschnitte.

Die vorstehenden allgemeinen Sätze wollen wir nun verwerthen an dem durch die Gleichung (9) ausgedrückten Systeme von Kreisen mit gemeinschaftlicher Secante und dem Systeme der reciproken Polaren (9*).

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, es sei ein harmonisches Polepaar des Systems (9) durch seine Coordinaten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 gegeben. Die Coordinaten ihrer Polaren rücksichtlich der Directrix werden alsdann auf Grund von (2):

$$x_0 = u_0, \quad y_0 = v_0, \quad z_0 = -w_0$$
$$x_1 = u_1, \quad y_1 = v_1, \quad z_1 = -w_1$$

und diese Polaren bilden nach (18) ein Polarenpaar des Systems (9*). Da nun das genannte Polepaar auch ein Polepaar des Kreises (9) für $\lambda = \infty$ sein muss, so haben wir die Relation:

$$x_0 x_1 + y_0 y_1 = 0,$$

welche unter Vermittelung der angegebenen sechs Gleichungen übergeht in:

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0.$$

Diese Gleichung sagt aber nichts anderes aus, als dass das in Rede stehende Polarenpaar des Systems (9*) einen rechten Winkel bildet.

Auf diese Weise entspricht einem jeden Polepaare des Systems (9), durch die Directrix, ein Paar Polaren des Systems (9*), welche auf einander senkrecht stehen. Ebenso entspricht einem jeden Paare Polaren des Systems (9*) ein Polepaar des Systems (9). Denn dass ein jedes Paar Polaren des Systems (9*) einen rechten Winkel bilden muss, folgt daraus, dass dasselbe auch dem Kegelschnitte (9*) für $\lambda = \infty$ angehört, wofür die zuletzt aufgestellte Gleichung die Bedingung ist.

Erinnern wir uns nun des in der vierzehnten Vorlesung doppelt ausgedrückten Satzes von jedem Polepaare des Systems von Kreisen, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden, so können wir folgende beiden Sätze als reciproke Sätze proklamiren:

21. *Die Verbindungslinie eines jeden Paares harmonischer Pole für ein System von Kreisen, welche durch zwei Punkte gehen, wird durch die gemeinschaftliche Secante der Kreise halbirt.*

Ein jedes Paar harmonischer Polaren für ein System von confocalen Kegelschnitten bildet einen rechten Winkel.

Die Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise bilden ein Polepaar für jeden der beiden Kreise, weil die Polare des einen Berührungspunktes immer durch den anderen geht. Ebenso sind die Tangenten in dem Schnittpunkte zweier Kegelschnitte ein Paar Polaren für jeden der beiden Kegelschnitte. Halten wir nun diese Bemerkungen zusammen mit den eben ausgesprochenen reciproken Sätzen, so ergiebt sich daraus die am Anfange unserer Untersuchung vermuthete Reciprocität der Sätze:

22. *Die vier gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kreisen werden durch die gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise halbirt.*

Die Tangenten in jedem der vier Schnittpunkte zweier confocalen Kegelschnitte stehen auf einander senkrecht.

Den letzten Satz haben wir schon in der einundzwanzigsten Vorlesung unter (25) mit anderen Worten ausgedrückt. Dieser Satz war an der angeführten Stelle nur ein Corollar des allgemeinen Satzes (24) über confocale Kegelschnitte: „Wenn man von einem beliebigen Punkte an confocale Kegelschnitte Tangentenpaare legt, so werden die Winkel, welche ein jedes Tangentenpaar bildet, von einem und demselben Linienpaare halbirt."

Es erhebt sich nun die Frage, welcher reciproke Satz diesem allgemeineren Satze entsprechen wird. Die aufgeworfene Frage beantworten wir aus dem Vorhergehenden damit, dass wir das von dem beliebigen Punkte ausgehende Linienpaar, welches die von den Tangentenpaaren gebildeten Winkel halbirt, als Polarenpaar der confocalen Kegelschnitte auffassen. Denn in dieser Auffassung drückt sich die gesuchte Reciprocität schon in den Sätzen (21) aus. Will man jedoch den Wortlaut des angeführten Satzes nicht ändern, so würde sein reciproker Satz so auszusprechen sein: „Wenn man zwei Kreise durch eine gerade Linie schneidet

und auf ihr dasjenige Punktepaar fixirt, welches harmonisch ist mit jedem Schnittpunktepaare, so wird die Verbindungslinie des fixirten Punktepaares durch die gemeinschaftliche Secante der Kreise halbirt."

In dieser Weise sind auch folgende Sätze von minderer Bedeutung reciproke Sätze:

„Wenn zwei Kreise und eine gerade Linie gegeben sind, so giebt es zwei Kreise, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise gehen und zugleich die gegebene gerade Linie berühren. Die Berührungspunkte bilden ein harmonisches Polepaar der Kreise."

„Wenn zwei confocale Kegelschnitte und ein Punkt gegeben sind, so giebt es zwei mit den gegebenen Kegelschnitten confocale Kegelschnitte, welche durch den gegebenen Punkt gehen. Die Tangenten der letzteren in dem gegebenen Punkte bilden ein harmonisches Polarenpaar der confocalen Kegelschnitte."

Wir führen diese Sätze nur auf, weil sie lehren, erstens dasjenige harmonische Polepaar von Kreisen, die sich in denselben beiden Punkten schneiden, zu bestimmen, welches auf einer gegebenen geraden Linie liegt; und zweitens dasjenige harmonische Polarenpaar confocaler Kegelschnitte zu bestimmen, welches sich in einem gegebenen Punkte schneidet. Freilich lässt sich durch einfachere Hülfsmittel dasselbe erreichen.

„Wenn zwei Kreise und ein Punkt gegeben sind, und man construirt einen Kreis, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise und den gegebenen Punkt geht, so verbindet die Tangente desselben in dem gegebenen Punkte diesen Punkt mit seinem harmonischen Pole für die Kreise."

„Wenn zwei confocale Kegelschnitte und eine gerade Linie gegeben sind, und man construirt denjenigen confocalen Kegelschnitt, welcher die gegebene gerade Linie berührt, so bildet die gerade Linie und die in dem Berührungspunkte auf ihr senkrecht stehende gerade Linie ein harmonisches Polarenpaar der confocalen Kegelschnitte."

Aus diesen Sätzen ergiebt sich nun erstens eine Construction des, einem gegebenen Punkte entsprechenden harmonischen Poles für das System von Kreisen, welche sich in zwei gegebenen Punkten schneiden,

und zweitens eine Construction der, einer gegebenen geraden Linie entsprechenden harmonischen Polare in einem Systeme confocaler Kegelschnitte.

Wir haben am Anfange unserer Untersuchung die allgemeinen reciproken Sätze (4) abgelesen aus den Gleichungen (3) und (3*) reciproker Kegelschnitte, rücksichtlich der Kreisdirectrix (1). Es lag dort irgend ein Kreis (3) und eine beliebige Kreisdirectrix (1) vor. Wir specialisiren nun unsere im Vorhergehenden durchgeführte Untersuchung, wenn wir in dem Folgenden annehmen, dass der Mittelpunkt der Kreisdirectrix (1) in der Peripherie des Kreises (3) liegt. In diesem Falle haben wir für den Kreis (3) und seine reciproke Polare (3*) die Gleichungen:

23. $$x^2 + y^2 + (ax + by)\, z = 0,$$

23*. $$u^2 + v^2 - (au + bv)\, w = 0.$$

Da in der letzten Gleichung das mit w^2 multiplicirte Glied fehlt, so können wir auf Grund von (14) der neunzehnten Vorlesung die reciproken Sätze aussprechen:

24. *Die reciproke Polare eines beliebig gegebenen Kreises rücksichtlich einer Kreisdirectrix, deren Mittelpunkt auf der Peripherie des Kreises liegt, ist eine Parabel, deren Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Directrix zusammenfällt.*

Die reciproke Polare einer beliebig gegebenen Parabel rücksichtlich einer Kreisdirectrix, deren Mittelpunkt in dem Brennpunkte der Parabel liegt, ist ein Kreis.

Verlegen wir nun den Mittelpunkt des Kreises (23) in die x-Axe des Coordinatensystems, indem wir setzen $b = 0$, und führen an Stelle des Parameters a den Parameter k ein durch die Gleichung $ak = 2$, so gehen die Gleichungen (23) und (23*) der reciproken Polaren über in:

24. $$x^2 + y^2 + \frac{2}{k}\, xz = 0,$$

24*. $$u^2 + v^2 - \frac{2}{k}\, uw = 0,$$

und die letzte Gleichung, wenn man die Liniencoordinaten ersetzt durch Punktcoordinaten wie folgt:

$$u - \frac{1}{k} w = x, \quad v = y, \quad - \frac{1}{k} u = z,$$

nimmt die Gestalt an:

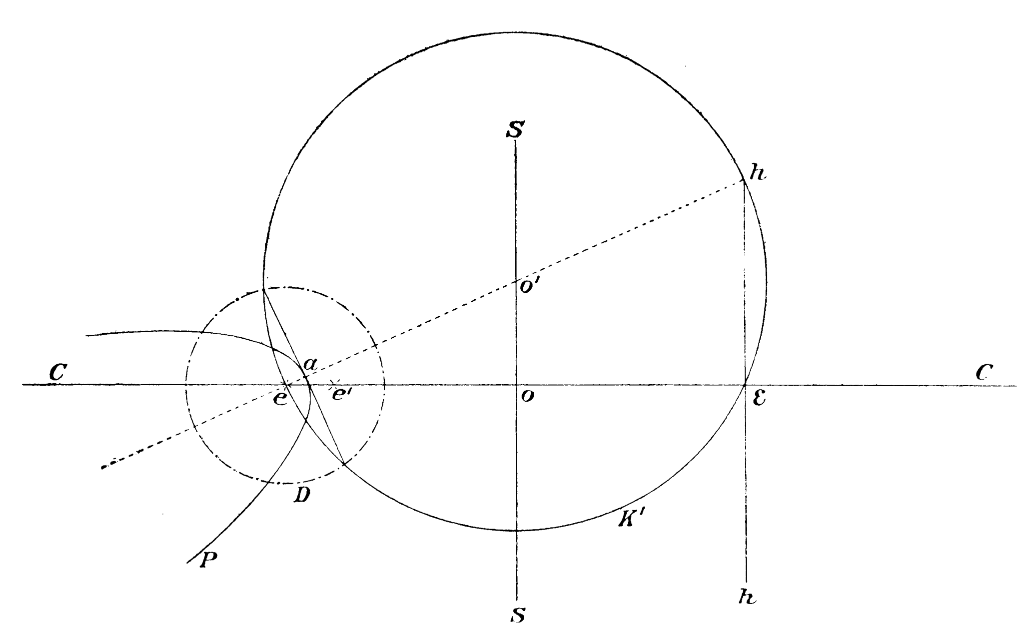
$$25. \qquad y^2 - 2k\left(x + \frac{k}{2}\right) = 0.$$

Dieselbe Gleichung ist am Ende der zweiundzwanzigsten Vorlesung unter (16) als der analytische Ausdruck confocaler Parabeln aufgeführt. Wir schliessen daraus:

26. *Die reciproken Polaren aller Kreise, welche sich in einem gegebenen Punkte berühren, rücksichtlich einer Kreisdirectrix, deren Mittelpunkt der gegebene Berührungspunkt ist, sind confocale Parabeln; und umgekehrt sind die reciproken Polaren aller confocalen Parabeln Kreise, die sich in dem Brennpunkte der Parabeln berühren, wenn der Brennpunkt Mittelpunkt der Kreisdirectrix ist.*

Wenn ein Kreis K' und eine Kreisdirectrix D, deren Mittelpunkt e auf dem Kreise liegt, gegeben sind, so sieht man ohne Weiteres, dass die Centrallinie eo' der beiden Kreise Durchmesser der dem gegebenen Kreise reciproken Parabel P ist. Die Verlängerung der Centrallinie schneidet den gegebenen Kreis in einem Punkte h, dessen Polare, rücksichtlich der Directrix, Tangente der Parabel P in ihrem Scheitel a ist. Der Scheitel a der Parabel und der Punkt h des gegebenen Kreises sind daher harmonische Punkte zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie und der Directrix. Da nun jeder dieser Punkte den anderen bestimmt, so braucht man von der Parabel nur den Scheitel a zu kennen, um umgekehrt den Punkt h des der Parabel reciproken Kreises und damit den Kreis selbst zu bestimmen. Von der angegebenen Construction der Tangente der reciproken Parabel in ihrem Scheitel werden wir in dem Folgenden Gebrauch machen.

Die beschriebene Figur liegt hier zur Ansicht vor. Sie ist zugleich bestimmt, als Ergänzung der ersten Figur in Folgendem zu dienen. Es sind darum gleiche Figurentheile mit gleichen Buchstaben bezeichnet.



Die vorstehenden Entwickelungen beabsichtigten vorzugsweise die in der dreizehnten und vierzehnten Vorlesung über Kreise dargelegten Eigenschaften durch das in der zwanzigsten Vorlesung beschriebene Gesetz der Reciprocität für Kegelschnitte nutzbar zu machen. Das Thema ist keineswegs erschöpft. So sehen wir zum Beispiele, dass in der vierzehnten Vorlesung Kreise auftreten, welche das System Kreise mit gemeinschaftlicher Secante senkrecht schneiden, von welchen noch gar nicht die Rede gewesen ist. Nehmen wir desshalb zum Schlusse unserer Untersuchung die beregten Kreise auf.

Es lagen die Kreise (9) vor mit gemeinschaftlicher Secante. Die Entfernungen e und ε der Grenzpunkt dieser Kreise von dem Mittelpunkte e der Directrix D auf der angenommenen x-Axe waren 0 und $\frac{2}{a}$. Es ist darum die Gleichung des Kreises, der durch die Grenzpunkte geht und seinen Mittelpunkt in der x-Axe hat:

$$\left(x - \frac{1}{a} z\right)^2 + y^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2 z^2 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich nun die Gleichung aller Kreise K', welche das System (9) senkrecht schneiden:

$$27. \qquad \left(x - \frac{1}{\alpha} z\right)^2 + y^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 z^2 + \mu y z = 0,$$

und unter Vermittelung von (2) erhalten wir die Gleichung ihrer reciproken Parabeln:

$$27^*. \qquad \left(u + \frac{1}{\alpha} w\right)^2 + v^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 w^2 - \mu v w = 0,$$

von welchen in der Figur nur die Parabel P vorliegt, deren reciproke Polare der Kreis K' ist mit dem Mittelpunkte o' auf der gemeinschaftlichen Secante SS der Kreise (9).

Die Tangente der Parabel P in ihrem Scheitel a ist die gerade Linie, welche die Schnittpunkte der Kreise D und K' verbindet, denn sie ist die Polare des Punktes h, rücksichtlich der Kreisdirectrix D. Sie geht also durch den Pol M der geraden Linie hh, den wir als den Mittelpunkt der geraden Linie ee' bezeichnet haben. Es liegen demnach die Scheitel der Parabeln (27*) auf einem Kreise, der die gerade Linie eM zum Durchmesser hat. Die in M auf dem Durchmesser senkrecht stehende gerade Linie ist Tangente für sämmtliche Parabeln (27*), weil ihre reciproken Kreise (27) durch den Punkt ε gehen. Diese vorgeführten Thatsachen lassen sich kurz durch folgende Sätze ausdrücken:

28. *Die reciproken Polaren aller Kreise, welche durch zwei beliebig gegebene Punkte gehen, rücksichtlich einer Kreisdirectrix, deren Mittelpunkt in einem der gegebenen Punkte liegt, sind focale Parabeln, deren gemeinsamer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Directrix zusammenfällt, und deren Scheitel auf einem Kreise liegen, der durch den gemeinsamen Brennpunkt geht.*

29. *Die reciproken Polaren aller focalen Parabeln, deren Scheitel auf einem durch den gemeinsamen Brennpunkt gehenden Kreise liegen, rücksichtlich einer um den Brennpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreisdirectrix, sind Kreise, welche sämmtlich durch den Brennpunkt und einen anderen ganz bestimmten Punkt gehen.*

München, im Februar 1874.

Aus dem Nachlass.

1.

Construction der zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftlichen conjugirten Linien.

[Auszug aus einem Manuscript vom Jahre 1837.]

8.

Wenn man aus der Gleichung irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung die Summe der homogenen Glieder des zweiten Grades herausnimmt und sie gleich 0 setzt, so erhält man bekanntlich die Gleichung eines Kegels, der dieselben Systeme conjugirter Linien hat als die Oberfläche und dessen Spitze in den Anfangspunkt der Coordinaten fällt. Man kann daher den Kegel für die Oberfläche substituiren, wenn man aus gegebenen Systemen conjugirter Linien der Oberfläche, ohne die Oberfläche selbst zu Hülfe zu nehmen, gewisse andere Systeme derselben Oberfläche construiren will, wie umgekehrt die Oberfläche statt des Kegels. Da man aber zur Lösung der vorliegenden Aufgabe nur zwei Systeme conjugirter Linien von jeder der gegebenen Oberfläche braucht und eine gegebene Hülfsoberfläche, so werde ich im Folgenden nur die beiden Kegel betrachten, welche dieselben Systeme conjugirter Linien haben als die ihnen entsprechenden Oberflächen, deren gemeinschaftliches System conjugirter Linien gefunden werden soll, und annehmen, dass die Spitzen derselben in den Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems fallen, auf welches die Gleichungen derselben bezogen werden. Die Gleichungen dieser beiden Kegel seien:

1. $$f(x\,y\,z) = 0,$$

2. $$\varphi\,(X\,Y\,Z) = 0.$$

Es ist ein bekannter Satz, dass, wenn man zu einer beliebigen Ebene a die in Beziehung auf (2) conjugirte Linie b durch die Spitze des Kegels (2) legt, diese Linie einen Kegel zweiter Ordnung beschreibt, wenn die Ebene a als Tangentenebene sich um den Kegel (1) bewegt. Denn bezeichnet man die Coordinaten der Linie b mit XYZ und die Coordinaten der Linie, in welcher die Ebene a den Kegel (1) berührt, mit $x\,y\,z$, so hat man folgende Bedingungsgleichungen:

$$f(x\,y\,z) = 0$$

$$3. \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial X} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial Z}. \end{cases}$$

Sucht man nun aus den drei letzten Gleichungen die Werthe von $x\,y\,z$, welche in XYZ lineär werden, und setzt sie in die erste Gleichung, so erhält man wieder eine in Beziehung auf XYZ homogene Gleichung des zweiten Grades. Mithin beschreibt die Linie b einen Kegel zweiter Ordnung.

Betrachtet man die Grössen $x\,y\,z$ als Functionen von XYZ, welche durch die Gleichungen (3) vollständig bestimmt sind, so kann man die Gleichung des genannten Kegels, indem man XYZ als die variabeln Coordinaten ansieht, darstellen wie folgt:

$$4. \qquad \frac{1}{2}\left(X\frac{\partial f}{\partial X} + Y\frac{\partial f}{\partial Y} + Z\frac{\partial f}{\partial Z}\right) = 0. \qquad [f = f(x\,y\,z).]$$

Die Kegel (1), (2), (4) stehen in einer merkwürdigen Verbindung zu einander. Construirt man nämlich irgend ein System conjugirter Ebenen des Kegels (1) und zieht zu jeder dieser Ebenen die in Beziehung auf (2) conjugirte Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so hat man drei Linien, welche ein System conjugirter Linien des Kegels (4) bilden; und umgekehrt, wenn man zu irgend drei conjugirten Linien des Kegels (4) die in Beziehung auf (2) conjugirten Ebenen durch den Anfangspunkt der Coordinaten legt, so bilden diese Ebenen ein System conjugirter Ebenen des Kegels (1). Denn bezeichnet man durch $x_1\,y_1\,z_1$; $x_2\,y_2\,z_2$; ... die Coordinaten der Linien, in welchen irgend ein System, durch den

Anfangspunkt der Coordinaten gelegter, conjugirter Ebenen des Kegels (1) zusammenlaufen, und durch $X_1 Y_1 Z_1$; $X_2 Y_2 Z_2$; ... die Coordinaten der zu diesen Ebenen in Beziehung auf (2) conjugirten Linien, so hat man, wenn man der Bequemlichkeit wegen die Buchstaben $p\,q\,r$ einführt, folgende Bedingungsgleichungen:

$$\alpha)\quad \left\{\begin{array}{lll} f'x_1 = \varphi' X_1 = 2\,p_1 & f'x_2 = \varphi' X_2 = 2\,p_2 & f'x_3 = \varphi' X_3 = 2\,p_3 \\ f'y_1 = \varphi' Y_1 = 2\,q_1 & f'y_2 = \varphi' Y_2 = 2\,q_2 & f'y_3 = \varphi' Y_3 = 2\,q_3 \\ f'z_1 = \varphi' Z_1 = 2\,r_1 & f'z_2 = \varphi' Z_2 = 2\,r_2 & f'z_3 = \varphi' Z_3 = 2\,r_3 \end{array}\right\}$$

$$\beta)\quad \begin{array}{l} x_1 p_2 + y_1 q_2 + z_1 r_2 = 0 \\ x_1 p_3 + y_1 q_3 + z_1 r_3 = 0 \\ x_2 p_3 + y_2 q_3 + z_2 r_3 = 0. \end{array}$$

Man kann nun die Function $f(x_1\,y_1\,z_1)$ mit gleichem Rechte als eine Function von $X_1\,Y_1\,Z_1$ betrachten und sie in Beziehung auf diese Grössen differentiiren, wie wir eben schon die Function $f(x\,y\,z)$ nach $X\,Y\,Z$ differentiirt haben, als sie für eine Function von $p_1\,q_1\,r_1$ nehmen und sie in Beziehung auf diese Grössen differentiiren. Differentiirt man demnach die identische Gleichung:

$$f(x_1\,y_1\,z_1) = x_1\,p_1 + y_1\,q_1 + z_1\,r_1$$

nach p_1, so erhält man:

$$\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial p_1} = 2\left\{p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + q_1 \frac{\partial y_1}{\partial p_1} + r_1 \frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right\} = x_1 + p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + q_1 \frac{\partial y_1}{\partial p_1} + r_1 \frac{\partial z_1}{\partial p_1}$$

oder

$$\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial p_1} = 2\,x_1,$$

und wenn man nach q_1 und r_1 differentiirt:

$$\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial q_1} = 2\,y_1,$$

$$\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial r_1} = 2\,z_1.$$

Es ist ferner:

$$\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial X_1} = \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial X_1} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial X_1} + \frac{\partial f}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial X_1} = 2\left\{x_1\frac{\partial p_1}{\partial X_1} + y_1\frac{\partial q_1}{\partial X_1} + z_1\frac{\partial r_1}{\partial X_1}\right\},$$

$$\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial Y_1} = \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial Y_1} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial Y_1} + \frac{\partial f}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial Y_1} = 2\left\{x_1\frac{\partial p_1}{\partial Y_1} + y_1\frac{\partial q_1}{\partial Y_1} + z_1\frac{\partial r_1}{\partial Y_1}\right\},$$

$$\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial Z_1} = \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial f}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial Z_1} = 2\left\{x_1\frac{\partial p_1}{\partial Z_1} + y_1\frac{\partial q_1}{\partial Z_1} + z_1\frac{\partial r_1}{\partial Z_1}\right\}.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem sie nacheinander mit $X_2 Y_2 Z_2$ multiplicirt worden, und bemerkt, dass:

$$X_2\frac{\partial p_1}{\partial X_1} + Y_2\frac{\partial p_1}{\partial Y_1} + Z_2\frac{\partial p_1}{\partial Z_1} = p_2,$$

$$X_2\frac{\partial q_1}{\partial X_1} + Y_2\frac{\partial q_1}{\partial Y_1} + Z_2\frac{\partial q_1}{\partial Z_1} = q_2,$$

$$X_2\frac{\partial r_1}{\partial X_1} + Y_2\frac{\partial r_1}{\partial Y_1} + Z_2\frac{\partial r_1}{\partial Z_1} = r_2,$$

so erhält man:

$$X_2\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial X_1} + Y_2\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial Y_1} + Z_2\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial Z_1} = 2(x_1 p_2 + y_1 q_2 + z_1 r_2)$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen (β)

$$X_2\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial X_1} + Y_2\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial Y_1} + Z_2\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial Z_1} = 0.$$

Auf ähnliche Art kann man aus den Gleichungen (α) und (β) folgende ableiten:

$$X_3\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial X_1} + Y_3\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial Y_1} + Z_3\frac{\partial f(x_1 y_1 z_1)}{\partial Z_1} = 0,$$

$$X_3\frac{\partial f(x_2 y_2 z_2)}{\partial X_2} + Y_3\frac{\partial f(x_2 y_2 z_2)}{\partial Y_2} + Z_3\frac{\partial f(x_2 y_2 z_2)}{\partial Z_2} = 0.$$

Die drei letzten Gleichungen sind aber die Bedingungen, wenn die Linien $X_1 Y_1 Z_1$; $X_2 Y_2 Z_2$; $X_3 Y_3 Z_3$ ein System conjugirter Linien des Kegels (4) bilden. Da man aber aus diesen Gleichungen und den Gleichungen (α) wiederum die Gleichungen (β) ableiten kann, so folgt hieraus auch der umgekehrte Satz, dass nämlich die Linien $x_1 y_1 z_1$; $x_2 \ldots$

ein System conjugirter Linien des Kegels (1) sind, wenn die Linien $X_1 Y_1 Z_1$; $X_2 \ldots$ ein System conjugirter Linien des Kegels (4) bilden.

Denkt man sich die aus den Gleichungen (3) hervorgehenden Werthe von XYZ in die Gleichung (2) substituirt, so erhält man, wenn man xyz als die variabeln Coordinaten betrachtet, die Gleichung eines Kegels, der dieselben Eigenschaften in Beziehung auf die Kegel (1) und (2) darbietet, als der Kegel (4) in Beziehung auf (2) und (1). Die Gleichung dieses Kegels lässt sich nun darstellen wie folgt:

$$5. \qquad \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0. \qquad [\varphi=\varphi(XYZ).]$$

9.

Das den Oberflächen (1) und (2) gemeinschaftliche System conjugirter, durch den Anfangspunkt der Coordinaten O gelegter Linien hat vier in die Augen fallende Eigenschaften. Es ist nämlich dieses System ein System conjugirter Linien der Kegel (1), (2), (4) und (5). Wenn nun ein Kegel:

$$6. \qquad Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=0$$

auf seiner Oberfläche das den Kegeln (1) und (2) gemeinschaftliche System conjugirter Linien enthalten soll, so wird er demnach auch 4 Bedingungen zu genügen haben. Er wird nämlich ein System conjugirter Linien der Kegel (1), (2), (4) und (5) auf seiner Oberfläche enthalten. Wir haben aber in § 3 gesehen, dass jede von diesen Bedingungen analytisch durch eine lineäre Gleichung zwischen den Coëfficienten A, B, C, A', B', C' ausgedrückt wird. Man erhält also auf diese Weise 4 Bedingungsgleichungen zwischen den Coëfficienten der Gleichung (6), während 3 Bedingungsgleichungen hinreichen, wenn der Kegel (6) auf seiner Oberfläche das den beiden Kegeln (1) und (2) gemeinschaftliche System conjugirter Linien, also 3 bestimmte Linien enthalten soll. Von den 3 Bedingungsgleichungen wird daher eine eine Folge der drei anderen sein. Obgleich diese Behauptung durch das vorangegangene Raisonnement ausser Zweifel gesetzt worden ist, so will ich dennoch der grössern Sicherheit wegen einen

analytischen Beweis aufstellen. Zu diesem Zwecke betrachte man die in § 3 angegebene lineäre Bedingungsgleichung (11), welche zwischen den Coëfficienten des Kegels (10) stattfindet, wenn der Kegel irgend ein System conjugirter Linien der Oberfläche (1) enthält. Man bemerkt leicht, dass wenn § 8, (1) die Gleichung der gegebenen Oberfläche und $\varphi(XYZ) = X^2 + Y^2 + Z^2$ ist, aus der Gleichung (4) die erwähnte Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der Gleichung (6) hervorgeht, wenn man für X^2, Y^2, Z^2, YZ, ZX, XY setzt: A, B, C, A', B', C'. In diesem Falle, wo $\varphi(XYZ) = X^2 + Y^2 + Z^2$, steht jedes System conjugirter Linien des Kegels (4) senkrecht auf einem ihm entsprechenden Systeme conjugirter Ebenen der Oberfläche (1), und jedes System von 3 Linien, welches senkrecht ist auf irgend einem Systeme conjugirter Ebenen der Oberfläche (1), ist ein System conjugirter Linien des Kegels (4). Diesen Kegel nun, aus dessen Gleichung auf die oben beschriebene Art die Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten (6) hervorgeht, welche stattfindet, wenn der Kegel (6) irgend ein System conjugirter Linien des Kegels (1) auf seiner Oberfläche enthält, will ich künftig den reciproken Kegel (1) nennen. Mit jedem Systeme conjugirter Ebenen ist also auch ein System conjugirter Linien des reciproken Kegels gegeben, nämlich das System der auf die drei Ebenen errichteten Lothe.

Wir wollen nun die Gleichungen der reciproken Kegel (1), (2), (4) und (5) nacheinander aufstellen. Zu diesem Zwecke setze man:

$$7. \qquad \begin{aligned} f'x &= \varphi'X = 2p, \\ f'y &= \varphi'Y = 2q, \\ f'z &= \varphi'Z = 2r. \end{aligned}$$

Drückt man nun die Grössen xyz und XYZ in den Functionen $f(xyz)$ und $\varphi(XYZ)$ aus durch pqr, so werde $f(xyz) = F(pqr)$ und $\varphi(XYZ) = \Phi(pqr)$; alsdann sind, wenn man pqr als variable Coordinaten betrachtet:

$$1\text{a.} \qquad F(pqr) = 0,$$

$$2\text{a.} \qquad \Phi(pqr) = 0$$

die Gleichungen der reciproken Kegel (1) und (2).

Da aber

$$F(pqr) = f(xyz) \;= xp + yq + zr,$$
$$\Phi(pqr) = \varphi(XYZ) = Xp + Yq + Zr,$$

so ergeben sich durch Differentiation die Werthe von xyz und XYZ in pqr, nämlich:

$$F'p = 2x \qquad \Phi'p = 2X,$$
$$F'q = 2y \qquad \Phi'q = 2Y,$$
$$F'r = 2z \qquad \Phi'r = 2Z.$$

Denn differentiirt man die erste von jenen beiden Gleichungen nach p, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (7):

$$F'p = 2\left(p\frac{\partial x}{\partial p} + q\frac{\partial y}{\partial p} + r\frac{\partial z}{\partial p}\right) = x + p\frac{\partial x}{\partial p} + q\frac{\partial y}{\partial p} + r\frac{\partial z}{\partial p},$$

also $F'p = 2x$ etc.

Die Gleichung (4) erhält man, wenn man in (1) xyz vermittelst der Gleichungen (7) durch XYZ ausdrückt, oder wenn man in Gleichung (1 a) pqr mittelst der Gleichungen (7) durch XYZ ausdrückt. Sie geht in die Gleichung der reciproken Oberfläche (4) über, wenn man mittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 2u, \; \frac{\partial F}{\partial Y} = 2v, \; \frac{\partial F}{\partial Z} = 2w$$

in ihr XYZ durch uvw ausdrückt und diese Grössen als die variabeln Coordinaten betrachtet. Wenn man aber bemerkt, dass

$$2\left(u\frac{\partial X}{\partial p} + v\frac{\partial Y}{\partial p} + w\frac{\partial Z}{\partial p}\right) = \frac{\partial\Phi(uvw)}{\partial u},$$
$$2\left(u\frac{\partial X}{\partial q} + v\frac{\partial Y}{\partial q} + w\frac{\partial Z}{\partial q}\right) = \frac{\partial\Phi(uvw)}{\partial v},$$
$$2\left(u\frac{\partial X}{\partial r} + v\frac{\partial Y}{\partial r} + w\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = \frac{\partial\Phi(uvw)}{\partial w},$$

so ergeben sich die Relationen, welche zwischen pqr und uvw stattfinden, wenn man die obigen 3 Gleichungen, durch welche uvw in XYZ

bestimmt werden, multiplicirt mit den Differentialquotienten von $X Y Z$ nach $p q r$ genommen, und sie hierauf addirt:

$$\frac{\partial F(p q r)}{\partial p} = \frac{\partial \Phi(u v w)}{\partial u},$$
$$\frac{\partial F(p q r)}{\partial q} = \frac{\partial \Phi(u v w)}{\partial v},$$
$$\frac{\partial F(p q r)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi(u v w)}{\partial w},$$

so dass man nur die aus diesen Gleichungen hervorgehenden Werthe von $p q r$ in die Gleichung (1 a) zu setzen hat, um die Gleichung des reciproken Kegels (4) zu erhalten. Vertauscht man nun in der Gleichung (1 a) und den oben aufgestellten 3 Gleichungen $p q r$ mit $u v w$, um die Gleichung des reciproken Kegels (4) durch dieselben Coordinaten ausgedrückt zu erhalten, als die Gleichungen der reciproken Kegel (1) und (2), so hat man in der Gleichung:

4 a. $$F(u v w) = 0$$

die Werthe von $u v w$ auszudrücken durch $p q r$ mittelst folgender 3 Gleichungen:

α) $$F'u = \Phi'p,\quad F'v = \Phi'q,\quad F'w = \Phi'r,$$

um die Gleichung des reciproken Kegels (4) zu erhalten.

Auf dieselbe Weise findet man, dass die Gleichung

5 a. $$\Phi(U V W) = 0$$

in die Gleichung des reciproken Kegels (5) übergeht, wenn man $U V W$ ausdrückt durch $p q r$ mittelst der Gleichungen

β) $$\Phi'U = F'p,\quad \Phi'V = F'q,\quad \Phi'W = F'r.$$

Setzt man nun in den Gleichungen (1 a), (2 a), (4 a), (5 a) für $p^2, q^2, r^2, qr, rp, pq$: A, B, C, A', B', C', so erhält man die gesuchten 4 lineären Bedingungsgleichungen zwischen den Coëfficienten des Kegels (6), von denen oben behauptet wurde, dass jede eine Folge der 3 anderen sei. Diese Behauptung wird gerechtfertigt sein, sobald man nachgewiesen haben wird, dass die Summe der 4 Functionen $F(p\,q\,r)$, $\Phi(p\,q\,r)$, $F(u\,v\,w)$, $\Phi(U\,V\,W)$, nachdem sie mit gewissen Constanten multiplicirt worden, identisch $= 0$ ist.

Um dieses zu beweisen, leiten wir folgende Relationen aus α) und β) ab:

a)
$$\begin{aligned}
\Phi'p &= F'p\frac{\partial u}{\partial p} + F'q\frac{\partial v}{\partial p} + F'r\frac{\partial w}{\partial p},\\
\Phi'q &= F'p\frac{\partial u}{\partial q} + F'q\frac{\partial v}{\partial q} + F'r\frac{\partial w}{\partial q},\\
\Phi'r &= F'p\frac{\partial u}{\partial r} + F'q\frac{\partial v}{\partial r} + F'r\frac{\partial w}{\partial r},
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
F'p &= \Phi'p\frac{\partial U}{\partial p} + \Phi'q\frac{\partial V}{\partial p} + \Phi'r\frac{\partial W}{\partial p},\\
F'q &= \Phi'p\frac{\partial U}{\partial q} + \Phi'q\frac{\partial V}{\partial q} + \Phi'r\frac{\partial W}{\partial q},\\
F'r &= \Phi'p\frac{\partial U}{\partial r} + \Phi'q\frac{\partial V}{\partial r} + \Phi'r\frac{\partial W}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Denn multiplicirt man die Gleichungen α) mit $p\,q\,r$ und addirt sie, so erhält man:

$$2\,\Phi(p\,q\,r) = u\,F'p + v\,F'q + w\,F'r,$$

und wenn man nach p differentiirt:

$$2\,\Phi'p = F'p\frac{\partial u}{\partial p} + F'q\frac{\partial v}{\partial p} + F'r\frac{\partial w}{\partial p} + F'u.$$

Da aber $F'u = \Phi'p$ ist, so erhält man:

$$\Phi'p = F'p\frac{\partial u}{\partial p} + F'q\frac{\partial v}{\partial p} + F'r\frac{\partial w}{\partial p},$$

und auf ähnliche Art die übrigen Gleichungen a) und b).

Wenn man die Gleichungen a) nach $F'p$, $F'q$, $F'r$ auflöst und der Kürze wegen setzt:

$$\frac{1}{N}=\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial q}\right)+\frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial p}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial q}-\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial p}\right),$$

so erhält man:

$$F'p=\Phi'pN\left(\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial q}\right)+\Phi'q\,N\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial p}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\Phi'r\,N\left(\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial q}-\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial p}\right),$$

$$F'q=\Phi'pN\left(\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial q}\right)+\Phi'q\,N\left(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\Phi'r\,N\left(\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}-\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p}\right),$$

$$F'r=\Phi'p\,N\left(\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial q}\right)+\Phi'q\,N\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\Phi'r\,N\left(\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}-\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}\right).$$

Aus der Vergleichung dieser Relationen mit b) ergeben sich folgende 9 neue:

$$\text{c)}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial p}&=N\left(\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial q}\right),\\
\frac{\partial V}{\partial p}&=N\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial p}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial r}\right),\\
\frac{\partial W}{\partial p}&=N\left(\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial q}-\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial p}\right),\\
\frac{\partial U}{\partial q}&=N\left(\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial q}\right),\\
\frac{\partial V}{\partial q}&=N\left(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\\
\frac{\partial W}{\partial q}&=N\left(\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}-\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p}\right),\\
\frac{\partial U}{\partial r}&=N\left(\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial q}\right),\\
\frac{\partial V}{\partial r}&=N\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial r}\right),\\
\frac{\partial W}{\partial r}&=N\left(\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}-\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}\right).
\end{aligned}\right.$$

Setzt man ferner der kürzeren Bezeichnung wegen:

$$P=N\left\{\Phi(p\,q\,r)\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial r}\right]-F(u\,v\,w)\right\},$$

$$Q=F(p\,q\,r)\cdot\left[\frac{\partial U}{\partial p}+\frac{\partial V}{\partial q}+\frac{\partial W}{\partial r}\right]-\Phi(U\,V\,W),$$

und differentiirt nach p, so wird:

$$\frac{\partial P}{\partial p} = N\left\{\Phi' p\left(\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) - \left(\Phi' q \frac{\partial v}{\partial p} + \Phi' r \frac{\partial w}{\partial p}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = F' p\left(\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial W}{\partial r}\right) - \left(F' q \frac{\partial V}{\partial p} + F' r \frac{\partial W}{\partial p}\right).$$

Addirt man nun die Gleichungen a), nachdem sie nacheinander mit

$$\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad -\frac{\partial v}{\partial p}, \quad -\frac{\partial w}{\partial p}$$

multiplicirt worden, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen c)

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial p},$$

und auf ähnliche Art

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial q},$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial r}.$$

Da aber

$$2P = p\frac{\partial P}{\partial p} + q\frac{\partial P}{\partial q} + r\frac{\partial P}{\partial r},$$

$$2Q = p\frac{\partial Q}{\partial p} + q\frac{\partial Q}{\partial q} + r\frac{\partial Q}{\partial r},$$

so ist

$$P = Q,$$

mithin ist jede von den Gleichungen (1a), (2a), (4a), (5a) eine Folge der 3 übrigen.

10.

Wenn wir durch:

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0, \qquad P = 0$$

die in Beziehung auf die Coëfficienten der Gleichungen (6) linearen Gleichungen bezeichnen, welche aus den Gleichungen (1a), (2a), (4a), (5a) dadurch hervorgehen, dass man für p^2, q^2, r^2, qr, rp, pq setzt: A, B, C, A', B', C', so haben wir im vorhergehenden Paragraphen gesehen, dass sie nur die Stelle von 3 Gleichungen vertreten, weil jede eine Folge der 3 übrigen ist. Diese Gleichungen bestimmen den Kegel (6) nicht voll-

ständig. Wenn man aber noch die Bedingung hinzufügt, dass er eine gegebene Oberfläche, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten O geht, in einer ebenen Curve schneiden soll, so wird der Kegel ein bestimmter. Denn wenn:

$$8.\quad \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\alpha' yz+2\beta' zx+2\gamma' xy+2\alpha'' x+2\beta'' y+2\gamma'' z=0$$

die Gleichung der gegebenen Oberfläche und

$$\text{A)}\qquad Ux+Vy+Wz+1=0$$

die Gleichung der Ebene ist, in welcher jene Schnittcurve des Kegels und der Oberfläche liegt, so ist nach § 4, (14)

$$9.\qquad \begin{aligned} 2\alpha'' U &= \alpha + A, & \beta'' W + \gamma'' V &= \alpha' + A',\\ 2\beta'' V &= \beta + B, & \gamma'' U + \alpha'' W &= \beta' + B',\\ 2\gamma'' W &= \gamma + C, & \alpha'' V + \beta'' U &= \gamma' + C'. \end{aligned}$$

Setzt man nun diese Werthe von A, B, C, A', B', C' in die obigen 4 Gleichungen $L=0$, $M=0, \ldots$, so bestimmen dieselben die Werthe von $U V W$, während aus den Gleichungen (9) die Werthe von A, B, C hervorgehen.

Unter den Bedingungen (9) und $L=0$ ist die Gleichung (6) der allgemeine analytische Ausdruck eines Kegels, welcher die Oberfläche (8) in einer ebenen Curve schneidet und auf seiner Oberfläche irgend ein System conjugirter durch O gelegter Linien des Kegels (1) enthält, während die Gleichung (A) die Ebene darstellt, in welcher jene Curve liegt. Da aber die Gleichung $L=0$ in eine lineäre Gleichung in Beziehung auf $U V W$ übergeht, wenn man für A, B, C die Werthe aus (9) substituirt, so geht die durch den Schnitt des Kegels (6) und der Oberfläche (8) gelegte Ebene durch einen festen Punkt a. Legt man nun durch den Punkt O irgend ein System conjugirter Linien des Kegels (1) und durch die 3 Schnittpunkte dieses Systems mit Oberfläche (8) eine Ebene, so muss diese Ebene durch den Punkt a gehen, weil der Kegel, dessen Spitze in O liegt und der die der Ebene und der Oberfläche (8) gemeinschaftliche Curve auf seiner Oberfläche enthält, den Bedingungen (9) und $L=0$ genügt. Wenn man umgekehrt durch den Punkt a irgend eine Ebene legt und durch den Schnitt dieser Ebene mit Oberfläche (8) einen Kegel, dessen Spitze in O liegt, so wird dieser Kegel den Bedingungen (9) und $L=0$ genügen. Der Punkt a kann mit Hülfe dreier

gegebener Systeme durch O gelegter conjugirter Linien des Kegels (1) leicht construirt werden. Denn legt man durch die 3 Schnittpunkte eines jeden Systems mit Oberfläche (8) eine Ebene, so erhält man 3 Ebenen, welche sich in dem Punkte a schneiden.

Unterwirft man den Kegel (6) den Bedingungen (9) und einzeln den Bedingungen $M = 0$, $N = 0$, $R = 0$, so kann man leicht folgende Sätze herleiten: Wenn man durch den Punkt O irgend ein System conjugirter Linien des Kegels (2) legt und durch die 3 Schnittpunkte dieses Systems mit Oberfläche (8) eine Ebene, so geht diese Ebene durch einen festen Punkt b. Wenn man umgekehrt durch den Punkt b irgend eine Ebene legt und durch den Schnitt dieser Ebene mit Oberfläche (8) einen Kegel, der seine Spitze in O hat, so genügt dieser Kegel den Bedingungen (9) und $M = 0$. Legt man durch den Punkt O irgend ein System conjugirter Linien des Kegels (4) und durch die 3 Schnittpunkte dieses Systems und Oberfläche (8) eine Ebene, so geht die Ebene durch einen festen Punkt c. Wenn man durch diesen Punkt eine Ebene legt und durch den Schnitt derselben mit Oberfläche (8) einen Kegel, der seine Spitze in O hat, so genügt dieser Kegel den Bedingungen (9) und $N = 0$. Wenn man endlich durch den Punkt O irgend ein System conjugirter Linien des Kegels (5) gehen lässt und die 3 Schnittpunkte dieses Systems mit Oberfläche (8) durch eine Ebene verbindet, so geht die Ebene durch einen festen Punkt. Legt man durch diesen Punkt d irgend eine Ebene und durch den Schnitt der Ebene und der Oberfläche (8) einen Kegel, dessen Spitze in O liegt, so genügt dieser Kegel den Bedingungen (9) und $R = 0$. Die 4 Punkte $a\,b\,c\,d$, von denen die 3 letzten mit Hülfe dreier Systeme conjugirter Linien der Kegel (2), (4), (5) auf dieselbe Weise construirt werden können als der Punkt a mittelst dreier Systeme conjugirter Linien des Kegels (1), liegen in einer Ebene, weil von den Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $R = 0$ eine aus den 3 übrigen folgt. Wenn man nun die Punkte $a\,b\,c\,d$ durch eine Ebene A verbindet und durch die der Ebene A und der Oberfläche (8) gemeinschaftliche Curve, welche wir mit u bezeichnen wollen, einen Kegel legt, der seine Spitze in O hat, so enthält dieser Kegel auf seiner Oberfläche das durch O gelegte gemeinschaftliche System conjugirter Linien der Kegel (1) und (2); denn er genügt allen Bedingungen (9) und $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $R = 0$.

11.

Nachdem wir im vorhergehenden Paragraphen sowohl die Gleichung der Ebene A bestimmt, als auch die Construction derselben angedeutet haben, so wollen wir gegenwärtig die Oberfläche (8) zu gleicher Zeit mit dem Kegel (6) variiren lassen und, während wir die Ebene A als constant betrachten, untersuchen, ob diese Oberfläche eine Kugel werden könne, welche die Ebene A in einer solchen Curve schneidet, dass, wenn man durch sie und durch O als Spitze den Kegel (6) legt, dieser Kegel das gemeinschaftliche System conjugirter durch O gelegter Linien der Oberflächen (1) und (2) enthält. Zu diesem Zwecke wollen wir setzen:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1; \quad \alpha' = \beta' = \gamma' = 0; \quad \alpha'' = -X, \ \beta'' = -Y, \ \gamma'' = -Z.$$

Alsdann geht die Gleichung (8) über in die Gleichung

$$10. \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2x\,X - 2y\,Y - 2z\,Z = 0$$

einer Kugel, deren Mittelpunkt die zu bestimmenden Coordinaten XYZ hat, und die Gleichungen (9) in

$$11. \qquad \begin{aligned} A &= -1 - 2XU, & A' &= -YW - ZV, \\ B &= -1 - 2YV, & B' &= -ZU - XW, \\ C &= -1 - 2ZW, & C' &= -XV - YU. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen drücken die Bedingung aus, dass der Kegel (6) durch den Schnitt der Kugel (10) und der Ebene A hindurchgehe. Damit endlich der Kegel (6) auf seiner Oberfläche das den Oberflächen (1) und (2) gemeinschaftliche System conjugirter Linien enthalte, muss noch den 4 Gleichungen

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0, \qquad P = 0$$

Genüge geschehen, welche, wie wir in § 9 bewiesen haben, nur die Stelle von 3 Gleichungen vertreten. Wir haben also so viele von einander unabhängige Gleichungen als unbekannte Grössen. Setzen wir, um diese zu bestimmen, die Werthe von A, B, C, A', B', C' aus (11) in jene 4 Gleichungen, welche dadurch übergehen mögen in

$$L_1 = 0, \qquad M_1 = 0, \qquad N_1 = 0, \qquad P_1 = 0,$$

so kann man aus ihnen die Werthe von XYZ finden, welche wiederum die Werthe der Coëfficienten der Gleichung (6) mittelst der Gleichungen (11) bestimmen. Es kommt nun alles darauf an, den Mittelpunkt P der gesuchten Kugel zu construiren. Denn da sie durch den Punkt O hindurchgeht, so kennt man mit dem Mittelpunkte zugleich auch den Radius, mithin auch die ganze Kugel.

Wenn man in den Gleichungen

$$L_1 = 0, \qquad M_1 = 0, \qquad N_1 = 0, \qquad P_1 = 0$$

XYZ als variable Coordinaten betrachtet, so sind jene Gleichungen die analytischen Ausdrücke von 4 Ebenen, die sich in dem gesuchten Mittelpunkte P der Kugel schneiden. Diese Ebenen lassen sich leicht construiren. Denn wenn man setzt:

$$F(p\,q\,r) = \varkappa p^2 + \lambda q^2 + \mu r^2 + 2\varkappa' q r + 2\lambda' r p + 2\mu' p r,$$

so wird die Gleichung $L_1 = 0$ nichts anderes als:

$$U(\varkappa X + \mu' Y + \lambda' Z) + V(\mu' X + \lambda Y + \varkappa' Z) + W(\lambda' X + \varkappa' Y + \mu Z) + \frac{\varkappa + \lambda + \mu}{2} = 0.$$

Diese Ebene ist aber, da die Cosinus des Lothes der Ebene A sich wie UVW verhalten, in Beziehung auf den reciproken Kegel (1) conjugirt zu diesem Lothe. Mit Hülfe dieses Kegels kann man also die Richtung der gesuchten Ebene finden, und man hat nur noch einen Punkt derselben zu suchen, um ihre Lage im Raume zu bestimmen. Zu diesem Zwecke zertheile man die Gleichung derselben in folgende:

$$\varkappa\left(X + \frac{1}{2U}\right) + \mu' Y + \lambda' Z = 0,$$

$$\mu' X + \lambda\left(Y + \frac{1}{2V}\right) + \varkappa' Z = 0,$$

$$\lambda' X + \varkappa' Y + \mu\left(Z + \frac{1}{2W}\right) = 0.$$

Diese drei Ebenen schneiden sich offenbar in einem Punkte der gesuchten Ebene. Die erste ist aber in Beziehung auf den reciproken Kegel (1) conjugirt zur x-Axe des Coordinatensystems und geht durch die Mitte des durch die Ebene A abgeschnittenen Stückes dieser Axe.

Die zweite Ebene geht durch die Mitte des von der Ebene A abgeschnittenen Stückes der y-Axe und ist conjugirt zu dieser Linie. Die dritte Ebene geht durch die Mitte des von der Ebene A abgeschnittenen Stückes der z-Axe und ist zu dieser Linie conjugirt. Construirt man nun diese drei Ebenen, so gibt ihr Durchschnitt einen Punkt der gesuchten Ebene $L_1 = 0$. Da aber das Coordinatensystem, welches wir zu Grunde legten, keiner Bedingung weiter unterworfen wurde, als dass es rechtwinkelig sein sollte, so wird man ein beliebiges anderes System von drei durch O gelegten, auf einander rechtwinkeligen Linien substituiren können und auf diese Weise so viele Punkte der gesuchten Ebene erhalten, als man will. Es reicht hin, die Construction der Ebene $L_1 = 0$ mit Hilfe der bekannten Stücke des reciproken Kegels (1) hier angegeben zu haben, denn man erhält auf gleiche Weise die Ebenen $M_1 = 0$, $N_1 = 0$, $P_1 = 0$, wenn man für den reciproken Kegel (1) nach der Reihe die reciproken Kegel (2), (4), (5) substituirt. Diese 4 Ebenen schneiden sich nun in dem gesuchten Punkt P. Beschreibt man um ihn als den Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius OP, so schneidet diese Kugel die Ebene A in einem Kreise u_1. Dieser Kreis begegnet aber der Curve u in 4 Punkten. Verbindet man diese mit dem Punkte O durch 4 gerade Linien, so sind drei von ihnen die gesuchten conjugirten Linien der Kegel (1) und (2). Denn da sowohl der Kegel, welcher die Curve u auf seiner Oberfläche enthält, als der, welcher die Curve u_1 enthält, wenn ihre Spitzen in den Punkt O fallen, das den Kegeln (1) und (2) gemeinschaftliche System conjugirter Linien auf ihrer Oberfläche enthalten, so schneiden sich dieselben in den gesuchten conjugirten Linien der beiden Kegel (1) und (2).

12.

Die vorangegangenen Betrachtungen ergeben nun folgende Lösung der Aufgabe:

> Zur Construction des zweien Oberflächen (1) und (2) gemeinschaftlichen Systems conjugirter Linien sind gegeben von jeder Oberfläche zwei Systeme conjugirter Linien und eine Hilfsoberfläche (8).

Wir können annehmen, dass die 4 gegebenen Systeme conjugirter Linien der Flächen (1) und (2) durch irgend einen Punkt O der Oberfläche (8) hindurchgehen. Da aber aus zwei Systemen conjugirter Linien einer Oberfläche zugleich mehrere andere derselben Fläche auf die einfachste in § 7 beschriebene Art gefunden werden, so wollen wir annehmen, dass von jeder der Oberflächen (1) und (2) *drei* Systeme conjugirter durch den Punkt O gelegter Ebenen gegeben seien. Verbindet man je zwei Linien desselben Systems durch Ebenen, so erhält man drei Systeme conjugirter Ebenen der Oberflächen (1) und (2). Man errichte ferner in dem Punkte O auf die Ebenen Lothe; alsdann ist jedes System von 3 Lothen, welches einem System conjugirter Ebenen der Oberflächen (1) oder (2) entspricht, ein System conjugirter Linien der reciproken Oberflächen (1) oder (2), so dass wir auf diese Weise von jeder der reciproken Oberflächen (1) und (2) drei Systeme conjugirter Linien erhalten. Man construire hierauf zu jeder der 9 Ebenen, welche die drei Systeme conjugirter Ebenen der Oberfläche (1) bilden, nach der im § 7 angegebenen Methode mit Hilfe der gegebenen Oberfläche (8) die in Beziehung auf Oberfläche (2) conjugirten Linien. Je drei von diesen, einem System conjugirter Ebenen der Oberfläche (1) entsprechenden Linien bilden ein System conjugirter Linien der Oberfläche (4), so dass wir also drei Systeme conjugirter Linien dieser Fläche erhalten. Auf ähnliche Art können wir drei Systeme conjugirter Linien der Fläche (5) erhalten, indem wir zu den conjugirten Ebenen der Fläche (2) die ihnen in Bezug auf die Fläche (1) conjugirten Linien suchen. Jedes von den drei Systemen conjugirter Linien der Fläche (1) schneidet die Fläche (8) in drei Punkten. Wenn wir je drei solcher Punkte durch eine Ebene verbinden, so erhalten wir drei Ebenen, welche sich in einem Punkte a schneiden. Auf dieselbe Weise bestimmen die drei Systeme conjugirter Linien der Oberflächen (2), (4) und (5) die Punkte b, c, d. Die drei Punkte $a\,b\,c$ verbinden wir durch eine Ebene A — diese geht auch durch den Punkt d — und bezeichnen die der Ebene und der Fläche (8) gemeinschaftliche Curve mit u. Wir legen ferner durch den Punkt O drei Systeme auf einander senkrecht stehender Linien, halbiren die Stücke dieser Linien, welche durch die Ebene A und den Punkt O begrenzt werden, und bezeichnen durch $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$, $\alpha'''\beta'''\gamma'''$ die Halbirungs-

punkte des ersten, zweiten und dritten Systems. Durch diese 9 Punkte lege man der Reihe nach 9 Ebenen, welche in Bezug auf die reciproke Fläche (1) conjugirt sind zu den Linien $O\alpha'$, $O\beta'$, $O\gamma'$, $O\alpha''$ ... und verbinde die Schnittpunkte der drei ersten, der drei folgenden und der drei letzten durch eine Ebene L_1. Wenn wir für die reciproke Fläche (1) die reciproken Oberflächen (2), (4) und (5) substituiren, so erhalten wir auf gleiche Weise drei Ebenen M_1, N_1, P_1. Diese vier Ebenen schneiden sich in einem und demselben Punkte P. Um ihn als Mittelpunkt beschreibe man mit dem Radius OP eine Kugel, welche die Ebene A in einem Kreise u' schneiden mag. Verbindet man alsdann die vier Schnittpunkte der Curven u und des Kreises u' durch gerade Linien mit dem Punkt O, so sind drei von diesen die gesuchten conjugirten Linien der Oberflächen (1) und (2).

2.

Beweis einiger Sätze von Chasles.

[Aus einem Diarium aus der Zeit 1844 bis November 1845.]

I.

Es sei U die Gleichung eines [nicht zerfallenden] Kegelschnittes, $u=0$, $v=0$, $w=0$ die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks. Dann wird U von der Form

$$U = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw.$$

Wir setzen der Kürze halber

$$1.\qquad \begin{aligned} u' &= a_{11}u + b'_{12}v + b'_{13}w & u'' &= a_{11}u + b''_{12}v + b''_{13}w \\ v' &= b'_{21}u + a_{22}v + b'_{23}w & v'' &= b''_{21}u + a_{22}v + b''_{23}w \\ w' &= b'_{31}u + b'_{32}v + a_{33}w & w'' &= b''_{31}u + b''_{32}v + a_{33}w. \end{aligned}$$

Alsdann können wir die 12 unbestimmten Constanten b, welche diese Ausdrücke enthalten und drei noch hinzutretende weitere $\varkappa$, λ, μ so bestimmen, dass die folgenden Gleichungen identische werden:

$$U - \varkappa vw \equiv \frac{1}{a_{11}}u'u''$$

$$U - \lambda wu \equiv \frac{1}{a_{22}}v'v''$$

$$U - \mu uv \equiv \frac{1}{a_{33}}w'w''.$$

Denn hieraus entstehen 18 Gleichungen, von denen 3 identische sind, so dass gerade so viele Gleichungen übrig bleiben, als Constanten zu bestimmen sind. Von diesen Gleichungen heben wir nur diejenigen her-

vor, welche zur Bestimmung der Grössen b'_{23}, b''_{23} und b'_{32}, b''_{32} dienen, weil wir die übrigen aus ihnen wegen der Symmetrie unseres Verfahrens leicht bilden können. Diese sind

$$2\,a_{23} = b'_{23} + b''_{23} \qquad 2\,a_{23} = b'_{32} + b''_{32}$$
$$a_{22}\,a_{33} = b'_{23}\,b''_{23} \qquad a_{22}\,a_{33} = b'_{32}\,b''_{32}.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass die beiden verschiedenen Constanten b'_{23} und b''_{23} wie die beiden b'_{32} und b''_{32} als Wurzeln der quadratischen Gleichung bestimmt sind:

2. $$b_{23}^2 - 2\,a_{23}\,b_{23} + a_{22}\,a_{33} = 0.$$

Ebenso sind b'_{13}, b'_{31}, b''_{13}, b''_{31} die Wurzeln der Gleichung

2. $$b_{13}^2 - 2\,a_{13}\,b_{13} + a_{33}\,a_{11} = 0,$$

und die b'_{12}, b'_{21}, b''_{12}, b''_{21} die Wurzeln von

2. $$b_{12}^2 - 2\,a_{12}\,b_{12} + a_{11}\,a_{22} = 0.$$

[Wenn 6 von den Schnittpunkten der 3 Linien $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ mit den 3 Linien $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$ in die 6 Schnittpunkte der drei ersten Linien und des Kegelschnittes $U = 0$ fallen sollen, so muss $b'_{12} = b'_{21}$, $b'_{13} = b'_{31}$, $b'_{23} = b'_{32}$, $b''_{12} = b''_{21}$, $b''_{13} = b''_{31}$, $b''_{23} = b''_{32}$ gesetzt werden.][1])

Man sieht dann, dass durch die Gleichungen $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$ die ungeraden Seiten eines dem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks P' dargestellt werden, dessen gerade Seiten durch die Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ gegeben sind. Ebenso sind $u = 0$, $v'' = 0$, $w = 0$, $u'' = 0$, $v = 0$, $w'' = 0$ die Gleichungen der Seiten eines dem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks P''.

Die gegenüber liegenden Seiten des Sechsecks P' schneiden sich auf der durch die Gleichung

3. $$\frac{u}{b'_{23}} + \frac{v}{b'_{31}} + \frac{w}{b'_{12}} = 0$$

gegebenen Linie, die des Sechsecks P'' auf der Linie, deren Gleichung

4. $$\frac{u}{b''_{23}} + \frac{v}{b''_{31}} + \frac{w}{b''_{12}} = 0$$

ist.

---

1) [Einschaltung des Herausgebers.]

Wir haben bisher nur eines Paares dem Kegelschnitt einbeschriebener Sechsecke P' und P'' Erwähnung gethan, deren gerade Seiten u, v, w gegeben sind. Die ungeraden Seiten u', v', w' des einen, welche zugleich Diagonalen des andern, und die ungeraden Seiten u'', v'', w'' des andern, welche zugleich Diagonalen des ersten sind, wurden durch die Gleichungen (1) auf die angegebene Art bestimmt. Diese Ausdrücke ändern sich aber, wenn man die Wurzeln b'_{23}, b''_{23} derselben quadratischen Gleichung (2) mit einander vertauscht, mithin auch die gesuchten ungeraden Seiten. Durch diese Vertauschung erhält man daher ein zweites Paar dem Kegelschnitt einbeschriebener Sechsecke, mit den gegebenen geraden Seiten $u, v, w,$ und ein drittes und viertes Paar, wenn man b'_{31} mit b''_{31} oder b'_{12} mit b''_{12} vertauscht. Man kann also 8 verschiedene, dem Kegelschnitt einbeschriebene Sechsecke finden, wenn der Kegelschnitt und die geraden Seiten gegeben sind. Diese Sechsecke bilden 4 Paar Sechsecke von der Art, dass die ungeraden Seiten des einen die Diagonalen des andern sind, und die ungeraden Seiten des zweiten die Diagonalen des ersten. Fügen wir zu jedem Paar Sechsecke noch das Sechseck bei, welches aus den ungeraden Seiten des Sechseckpaares gebildet ist, so haben wir 4 Gruppen von 3 Sechsecken, von denen wir eine gemeinschaftliche Eigenschaft nachweisen können. Die 3 Pascal'schen Linien, welche der ersten Gruppe entsprechen, schneiden sich in einem Punkte p, dessen Coordinaten durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$3. \qquad \frac{u}{b'_{23}} + \frac{v}{b'_{31}} + \frac{w}{b'_{12}} = 0,$$

$$4. \qquad \frac{u}{b''_{23}} + \frac{v}{b''_{31}} + \frac{w}{b''_{12}} = 0.$$

Addiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (2):

$$a_{11}\, a_{23}\, u + a_{22}\, a_{31}\, v + a_{33}\, a_{12}\, w = 0,$$

welches die Gleichung einer geraden Linie s ist, die durch den Punkt p hindurchgeht. Da diese Gleichung aber ungeändert bleibt, wenn man die Wurzeln ein und derselben Gleichung (2) mit einander vertauscht, so wird diese Linie durch die 4 Punkte p gehen, welche den 4 Gruppen von Sechsecken entsprechen.

II.

Wenn man einer Oberfläche zweiter Ordnung ein Tetraëder umbeschreibt und die Tangirungspunkte der Seitenflächen mit den gegenüber liegenden Ecken durch vier gerade Linien verbindet, so sind diese vier Linien die Generatricen eines Hyperboloïds.[1])

Bezeichnen wir durch $u\,v\,w\,r$ Ebenencoordinaten rücksichtlich desjenigen Tetraëders, welches der Oberfläche umbeschrieben ist, so wird die Gleichung der Oberfläche, bezogen auf diese Coordinaten, die Quadrate der Variabeln $u\,v\,w\,r$ nicht enthalten, mithin von der Form:

$$F(u\,v\,w\,r) = b_{12}\,u\,v + b_{13}\,u\,w + b_{14}\,u\,r + b_{23}\,v\,w + b_{24}\,v\,r + b_{34}\,w\,r.$$

Die Coordinaten der Tangirungspunkte der Seitenflächen des Tetraëders sind demnach:

1.	0	b_{12}	b_{13}	b_{14}
2.	b_{12}	0	b_{23}	b_{24}
3.	b_{13}	b_{23}	0	b_{34}
4.	b_{14}	b_{24}	b_{34}	$0,$

die Gleichung einer Ebene, welche den Punkt (1) mit der gegenüber liegenden Ecke verbindet, wird von der Form

$$b\,y + c\,z + d\,p = 0, \tag{5.}$$

und die Coëfficienten b, c, d müssen der Gleichung genügen

$$b\,b_{12} + c\,b_{13} + d\,b_{14} = 0.$$

Die Coordinaten von Punkten auf den drei Linien, welche die Punkte 2, 3, 4 mit den gegenüber liegenden Ecken verbinden, sind nun

II.	b_{12}	y	b_{23}	b_{24}
III.	b_{13}	b_{23}	z	b_{34}
IV.	b_{14}	b_{24}	b_{34}	$p,$

wo y, z, p beliebige Grössen bedeuten.

---

1) [Chasles, Aperçu histor. Note XXXII (2. Aufl., Seite 400 ff.), wo sich auch die andern hier gegebenen Sätze finden.]

Die Ebene (5) schneidet nun jede dieser Linien in einem Punkte, für welche Punkte y, z, p bestimmte Werthe annehmen. Diese Werthe ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} by \quad + c b_{23} + d b_{24} &= 0 \\ b b_{23} + cz \quad + d b_{34} &= 0 \\ b b_{24} + c b_{34} + dp \quad &= 0. \end{aligned}$$

Fügt man hiezu noch die obige Gleichung:

$$b b_{12} + c b_{13} + d b_{14} = 0,$$

so hat man die Bedingungen, unter welchen die Schnittpunkte der Ebene (5) und der 3 Linien II, III, IV in einer geraden Linie liegen. Da nun die Ebene (5) eine beliebig durch den Tangirungspunkt (1) und die gegenüber liegende Ecke des Tetraëders gelegte war, so wird man leicht sehen, dass die genannten vier Linien die Generatricen eines Hyperboloïds sind.

Statt des umbeschriebenen Tetraëders kann man auch ein beliebiges nehmen, dann müssen aber statt der Tangirungspunkte der Seitenflächen die Pole derselben genommen werden. Der Beweis ändert sich hiebei nur sehr wenig.

III.

Sei $U = 0$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung; $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $r = 0$ die Gleichungen der Seitenflächen eines Tetraëders. Man kann dann

$$1. \qquad U = a_{11} u^2 + a_{22} v^2 + a_{33} w^2 + a_{44} r^2 + 2 a_{12} u v + \cdots + 2 a_{34} w r$$

setzen.

Hieraus ergeben sich die Gleichungen der Polarebenen der Ecken des Tetraëders

$$2. \qquad \begin{aligned} a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w + a_{14} r &= 0 \\ a_{21} u + a_{22} v + a_{23} w + a_{24} r &= 0 \\ a_{31} u + a_{32} v + a_{33} w + a_{34} r &= 0 \\ a_{41} u + a_{42} v + a_{43} w + a_{44} r &= 0. \end{aligned}$$

Wenn man die Coëfficienten a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} in der Diagonale als Veränderliche betrachtet, so stellt jede von den angegebenen Gleichungen ein System Ebenen dar, welche sich in einer Linie schneiden, die in einer der Seitenflächen des Tetraëders gelegen ist. Diese vier Linien, welche resp. mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet sein mögen, sind dieselben, in welchen sich die Seitenflächen des Tetraëders mit den Polarebenen der gegenüber liegenden Ecken schneiden. Durch die drei ersten α, β, γ kann man unendlich viele gerade Linien ε legen, welche jede von ihnen schneiden. Man kann also die Coëfficienten a_{11}, a_{22}, a_{33} in den drei ersten der obigen Gleichungen als so bestimmt annehmen, dass die ersten drei Ebenen sich in einer Linie ε schneiden. Dann lassen sich aber drei Grössen a, b, c dergestalt bestimmen, dass

$$
3. \quad \begin{aligned}
a_{11}\,a + a_{21}\,b + a_{31}\,c &= 0 \\
a_{12}\,a + a_{22}\,b + a_{32}\,c &= 0 \\
a_{13}\,a + a_{23}\,b + a_{33}\,c &= 0 \\
a_{14}\,a + a_{24}\,b + a_{34}\,c &= 0
\end{aligned}
$$

ist. Diese Gleichungen lassen erkennen, dass, wenn man setzt $u = a$, $v = b$, $w = c$, $r = 0$, den vier Gleichungen (2) Genüge geschieht. Diese Werthe liefern also einen Punkt, der zugleich in der Linie ε und in der Linie δ liegt. Mithin schneidet jede Linie ε, welche durch die drei Linien α, β, γ hindurchgeht, auch die Linie δ. Woraus wiederum folgt, dass die vier Linien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sich als Generatricen derselben Erzeugung eines Hyperboloïds betrachten lassen.

Dieses ist der Lehrsatz von Chasles, welchen derselbe in seiner Geschichte der Geometrie ausdrückt wie folgt:

> *Wenn im Raum ein Tetraëder und eine Fläche zweiter Ordnung gegeben sind, so sind die Durchschnittslinien der Seitenflächen des Tetraëders resp. mit den Polarebenen der gegenüber liegenden Eckpunkte vier Generatricen ein und derselben Erzeugungsart eines Hyperboloïds.*

Wir wollen uns aber nicht benügen, den Satz bewiesen zu haben, sondern die Gleichung des Hyperboloïds selbst bestimmen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, es sei

$$V = b_{11} u^2 + b_{22} v^2 + \cdots + 2 b_{34} w r = 0$$

die Gleichung des gesuchten Hyperboloïds. Alsdann müssen sich acht lineare, homogene Functionen a, b, c, d, A, B, C, D der Variabeln u, v, w, r der Art bestimmen lassen, dass folgende Gleichungen identisch werden:

$$4. \qquad \begin{aligned} Au - \frac{a}{2}\frac{\partial U}{\partial u} &\equiv V \\ Bv - \frac{b}{2}\frac{\partial U}{\partial v} &\equiv V \\ Cw - \frac{c}{2}\frac{\partial U}{\partial w} &\equiv V \\ Dr - \frac{d}{2}\frac{\partial U}{\partial r} &\equiv V. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$a = a_1 u + a_2 v + a_3 w + a_4 r$$

und vergleicht in der ersten Gleichung die Terme, welche u nicht enthalten, so erhält man:

$$\begin{aligned} a_2 a_{12} + b_{22} &= 0 \qquad & a_2 a_{13} + a_3 a_{12} + 2 b_{23} &= 0 \\ a_3 a_{13} + b_{33} &= 0 & a_2 a_{14} + a_4 a_{12} + 2 b_{24} &= 0 \\ a_4 a_{14} + b_{44} &= 0 & a_3 a_{14} + a_4 a_{13} + 2 b_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Jede der drei andern Gleichungen (4) liefert ebenfalls 6 Gleichungen, so dass im Ganzen 24 Gleichungen vorliegen, woraus sich die folgenden Werthe von 6 der gesuchten Coëfficienten ergeben:

$$\begin{aligned} b_{22} &= a_{21} a_{23} a_{24} \qquad & 2 b_{23} &= a_{23}(a_{13} a_{24} + a_{12} a_{34}) \\ b_{33} &= a_{31} a_{32} a_{34} & 2 b_{24} &= a_{24}(a_{12} a_{34} + a_{14} a_{23}) \\ b_{44} &= a_{41} a_{42} a_{43} & 2 b_{34} &= a_{34}(a_{13} a_{24} + a_{14} a_{23}). \end{aligned}$$

Die Werthe der übrigen Coëfficienten in dem Ausdruck V kann man nach Analogie aus den obigen herleiten. Setzt man diese Werthe in V ein, so erhält man die Gleichung des gesuchten Hyperboloïds

$$\begin{aligned} V = a_{12} a_{13} a_{14} u^2 + a_{21} a_{23} a_{24} v^2 + \cdots + a_{12}(a_{13} a_{24} + a_{14} a_{23}) uv + \cdots \\ + a_{34}(a_{13} a_{24} + a_{14} a_{23}) wr = 0. \end{aligned}$$

Dass dies die Gleichung des gesuchten Hyperboloïds ist, lässt sich auch a posteriori einsehen. Denn setzt man $u = 0$, so zerfällt V in das Product zweier lineärer Factoren

$$(a_{21} v + a_{31} w + a_{41} r) \left(\frac{v}{a_{34}} + \frac{w}{a_{42}} + \frac{r}{a_{23}} \right) a_{34} a_{42} a_{23}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass V verschwindet, wenn $u = 0$ und $\frac{\partial U}{\partial u} = 0$ u. s. w., woraus folgt, dass die 4 Linien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf dem durch jene Gleichung dargestellten Hyperboloïde liegen; und da, wie leicht zu bemerken, sie sich gegenseitig nicht schneiden, so werden dieselben die Generatricen derselben Erzeugungsart des Hyperboloïds.

Aus jener Zerlegung in Factoren gehen auch die Generatricen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ der zweiten Erzeugungsart des Hyperboloïds hervor, welche in den Seitenflächen des betrachteten Tetraëders liegen. Bezeichnet man nämlich mit $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ veränderliche Coëfficienten, so stellen die Gleichungen

$$5. \quad \begin{aligned} A_{11} u + \frac{v}{a_{34}} + \frac{w}{a_{42}} + \frac{r}{a_{23}} &= 0 \\ \frac{u}{a_{34}} + A_{22} v + \frac{w}{a_{41}} + \frac{r}{a_{13}} &= 0 \\ \frac{u}{a_{24}} + \frac{v}{a_{41}} + A_{33} w + \frac{r}{a_{12}} &= 0 \\ \frac{u}{a_{23}} + \frac{v}{a_{31}} + \frac{w}{a_{12}} + A_{44} r &= 0 \end{aligned}$$

vier Systeme Ebenen dar, welche sich resp. mit den Ebenen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $r = 0$ in den Generatricen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ der zweiten Erzeugungsart schneiden.

IV.

Das Tetraëder und die Oberfläche zweiter Ordnung lassen sich noch auf eine andere Art mit einander in Verbindung bringen, wenn man die 12 Schnittpunkte der 6 Kanten des Tetraëders mit der Oberfläche in's Auge fasst.

Setzt man nämlich der Kürze wegen:

$$6.\quad \begin{aligned} u' &= a_{11}u + b'_{12}v + b'_{13}w + b'_{14}r \\ v' &= b'_{21}u + a_{22}v + b'_{23}w + b'_{24}r \\ w' &= b'_{31}u + b'_{32}v + a_{33}w + b'_{34}r \\ r' &= b'_{41}u + b'_{42}v + b'_{43}w + a_{44}r \end{aligned}$$

$$7.\quad \begin{aligned} u'' &= a_{11}u + b''_{12}v + b''_{13}w + b''_{14}r \\ v'' &= b''_{21}u + a_{22}v + b''_{23}w + b''_{24}r \\ w'' &= b''_{31}u + b''_{32}v + a_{33}w + b''_{34}r \\ r'' &= b''_{41}u + b''_{42}v + b''_{43}w + a_{44}r \end{aligned}$$

und

$$8.\quad \begin{aligned} A &= a_2 wr + a_3 rv + a_4 vw \\ B &= b_1 wr + b_3 ru + b_4 uw \\ C &= c_1 vr + c_2 ru + c_4 uv \\ D &= d_1 vw + d_2 wu + d_3 uv, \end{aligned}$$

so kann man die 36 neuen Constanten, welche die Ausdrücke $u', v' \ldots u'', v'' \ldots A, B \ldots$ enthalten, so bestimmen, dass folgende Gleichungen identisch erfüllt werden:

$$9.\quad \begin{aligned} U - A &\equiv \frac{1}{a_{11}} u'u'' \\ U - B &\equiv \frac{1}{a_{22}} v'v'' \\ U - C &\equiv \frac{1}{a_{33}} w'w'' \\ U - D &\equiv \frac{1}{a_{44}} r'r''. \end{aligned}$$

Denn entwickelt man diese Gleichungen, so erhält man so viele nicht identische Gleichungen, als zu bestimmende Constanten vorhanden sind, und 4 identische Gleichungen. Von den ersteren heben wir diejenigen hervor, welche zur Bestimmung der Coëfficienten $b'_{12}, b''_{12}, b'_{21}, b''_{21}$ dienen:

$$\begin{aligned} 2a_{12} &= b'_{12} + b''_{12} & \qquad 2a_{12} &= b'_{21} + b''_{21} \\ a_{11}a_{22} &= b'_{12}b''_{12} & \qquad a_{11}a_{22} &= b'_{21}b''_{21}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die vier Coëfficienten $b'_{12} = b'_{21}$, $b''_{12} = b''_{21}$ Wurzeln der Gleichung

$$b_{12}^2 - 2\,b_{12}\,a_{12} + a_{11}\,a_{22} = 0$$

sind. Die sämmtlichen Coëfficienten $b'_{\varkappa\lambda}$ und $b''_{\varkappa\lambda}$ sind daher Wurzeln folgender sechs quadratischer Gleichungen:

$$\begin{gathered} b_{12}^2 - 2\,b_{12}\,a_{12} + a_{11}\,a_{22} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{34}^2 - 2\,b_{34}\,a_{34} + a_{33}\,a_{44} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Diese analytischen Betrachtungen erlauben folgende geometrische Deutung. Der Ausdruck $A = 0$ stellt einen Kegel dar, welcher auf seiner Oberfläche die drei Kanten des Tetraëders enthält, in denen sich die Ebenen $v = 0$, $w = 0$, $r = 0$ gegenseitig schneiden. Da wir aber A so bestimmt haben, dass $U - A$ in lineäre Factoren zerfällt, so haben wir denjenigen Kegel bestimmt, der die Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Kegelschnitten schneidet, die in den Ebenen $u' = 0$, $u'' = 0$ gelegen sind. Diese Ebenen kann man aber noch leichter bestimmen. Sie sind das Ebenenpaar, welches die sechs Schnittpunkte der bezeichneten drei Kanten des Tetraëders mit der Oberfläche in der Art bestimmt, dass die eine Ebene durch drei Schnittpunkte, die andere durch die drei anderen hindurchgeht. Wir unterlassen, die analoge Deutung der übrigen Gleichungen (9) zu wiederholen.

[Wenn die beiden Ebenen $u' = 0$, $v' = 0$ die Kante $w = 0$, $r = 0$ des gegebenen Tetraëders in *demselben* Punkte treffen sollten, so müsste $\frac{b'_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{b'_{21}}$, also b'_{12} und b'_{21} verschiedene Wurzeln der ersten der Gleichungen (10) sein. Nimmt man daher allgemein $b'_{\varkappa\lambda} = b'_{\lambda\varkappa}$, $b''_{\varkappa\lambda} = b''_{\lambda\varkappa}$, so enthalten die vier Ebenen $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$, $r' = 0$ sowohl, wie die vier Ebenen $u'' = 0$, $v'' = 0$, $w'' = 0$, $r'' = 0$ die 12 Schnittpunkte der Kanten des gegebenen Tetraëders mit der Fläche $U = 0$.][1])

Die Gleichungen $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$, $r' = 0$ stellen dann aber die Polarebenen der Ecken des betrachteten Tetraëders T für die durch die Gleichung

1) [Einschaltung des Herausgebers.]

$$U' = a_{11} u^2 + a_{22} v^2 + \cdots + 2 b'_{12} u v + \cdots + 2 b'_{34} w r = 0$$

ausgedrückte Oberfläche dar; ebenso sind $u'' = 0$, $v'' = 0$, $w'' = 0$, $r'' = 0$ die Gleichungen der Polarebenen der Ecken des Tetraëders T für die durch die Gleichung

$$U'' = a_{11} u^2 + a_{22} v^2 + \cdots + 2 b''_{12} u v + \cdots + 2 b''_{34} w r = 0$$

dargestellte Oberfläche. Jene ersten mögen ein Tetraëder T', diese eines T'' bilden. Nach dem vorhergehenden Lehrsatz werden mithin die Seitenflächen des Tetraëders T ebensowohl von den entsprechenden Seitenflächen des Tetraëders T' in vier geraden Linien geschnitten, die Generatricen einer und derselben Erzeugungsart eines Hyperboloïds V' sind, als von den entsprechenden Seitenflächen des Tetraëders T'' in vier geraden Linien, welche auf gleiche Weise auf einem anderen Hyperboloïd V'' liegen. Die Gleichungen dieser Hyperboloïde kann man nach dem Vorhergehenden leicht bestimmen, wie auch die Gleichungen der Generatricen der zweiten Erzeugungsart dieser Flächen, welche in den Seitenflächen des Tetraëders T liegen. Für das erste Hyperboloïd sind dieselben durch die Gleichungen bestimmt

$$11. \qquad r = 0, \quad \frac{u}{b'_{23}} + \frac{v}{b'_{31}} + \frac{w}{b'_{12}} = 0$$

u. s. w., und für das zweite durch

$$12. \qquad r = 0, \quad \frac{u}{b''_{23}} + \frac{v}{b''_{31}} + \frac{w}{b''_{12}} = 0$$

u. s. w. Man braucht sich nur an die geometrische Deutung der Gleichungen (3) und (4)[1]) zu erinnern, um sich von der Richtigkeit der folgenden Construction der durch das erste Gleichungspaar (11) dargestellten Generatrice des Hyperboloïds U' zu überzeugen. Auf der Seitenfläche r des Tetraëders T, welche die Oberfläche V in einem Kegelschnitt schneidet, begrenzen die drei andern Seitenflächen ein Dreieck. Die drei Seitenflächen $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$ des Tetraëders T' begrenzen auf derselben Seitenfläche von T ein zweites Dreieck. Diese sechs Seiten der beiden Dreiecke lassen sich als die Seiten eines dem genannten Kegel-

1) [Seite 638 dieses Bandes.]

schnitt einbeschriebenen Sechsecks betrachten, dessen gegenüber liegende Seiten sich in drei Punkten schneiden, welche in einer geraden Linie liegen. Diese Linie ist die gesuchte Generatrice der zweiten Erzeugung des Hyperboloïds U' (was sich auch leicht aus der Figur selbst einsehen lässt). Diese Bemerkungen wollen wir in einen Lehrsatz zusammenfassen:

Wenn die sechs Kanten eines irgendwie im Raum gelegenen Tetraëders eine Oberfläche zweiter Ordnung in 12 *Punkten treffen, so liegen diese* 12 *Punkte zu je drei in einer der Seitenflächen eines zweiten Tetraëders, von denen jede drei Punkte enthält, die solchen drei Kanten angehören, welche von einer der Ecken des Tetraëders ausgehen. Diese vier Seitenflächen des zweiten Tetraëders treffen resp. die den genannten Ecken des ersten Tetraëders gegenüber liegenden Seitenflächen in vier Geraden, welche die vier Generatricen einer und derselben Erzeugungsart eines Hyperboloïds sind.*

Dieses Theorem stellt Chasles in seiner Geschichte der Geometrie auf. Wir vervollständigen dasselbe, indem wir also fortfahren:

Jede Seitenfläche des Tetraëders wird von den drei übrigen in drei geraden Linien und von drei der genannten vier Ebenen, welche auf ihr die Generatrice des Hyperboloïds nicht bestimmen, in drei andern geraden Linien geschnitten. Diese sechs Linien lassen sich als die Seiten eines demjenigen Kegelschnitte einbeschriebenen Sechsecks betrachten, welcher durch die Seitenfläche von der Oberfläche abgeschnitten wird. Die gegenüber liegenden Seiten dieses Sechsecks schneiden sich in drei Punkten, die in einer Generatrice der zweiten Erzeugungsart jenes Hyperboloïds liegen.

3.

Aufgabe.

[Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 21, Seite 73—74.]

Nach der vierten meiner Vorlesungen über Homographie, welche von einem neuen Uebertragungsprincip handelt, entspricht jedem Punktepaare auf der Fundamentallinie eindeutig ein Punkt p in der Ebene. Wenn das Punktepaar auf der Fundamentallinie fortrückt, ohne dass das von demselben begrenzte Stück der Fundamentallinie sich der Grösse nach ändert, so soll der geometrische Ort des Punktes p gefunden werden.

Für einen ganz speciellen Fall ist die Auflösung der Aufgabe nach der vierten Vorlesung bekannt. Bildet nämlich das gegebene Punktepaar, welches auf der Fundamentallinie fortrücken soll, einen Doppelpunkt, so entsprechen den Doppelpunkten auf der Fundamentallinie in der Ebene Punkte, welche auf der Directrix liegen. In diesem Falle beschreibt der Punkt p also einen Kegelschnitt. Wir werden nun untersuchen, ob im allgemeinen Falle eine Aenderung eintritt.

Das gegebene Punktepaar, welches auf der Fundamentallinie das gegebene Stück a begrenzen soll, nehmen wir der Einfachheit wegen als das Fundamentalpunktepaar, dessen Gleichungen in der Normalform gegeben sein mögen:

$$T_0 = 0, \qquad T_1 = 0.$$

Die Punkte dieses Paares gehen nach der Verrückung um die Entfernung r in zwei andere über, deren Gleichungen nach (33) der ersten Vorlesung von der Form sind:

$$T_0 - \lambda_0\, T_1 = 0, \qquad T_0 - \lambda_1\, T_1 = 0,$$

$$\lambda_0 = \frac{r}{r-a}, \qquad \lambda_1 = \frac{r+a}{r}.$$

Nehmen wir nun an, dass A, B, C gegebene lineare Ausdrücke in Punktcoordinaten des Punktes p seien, so müssen dieselben der Gleichung genügen:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

wenn man darin für λ setzt λ_0 und λ_1. Wir haben demnach zur Bestimmung des Punktes p die beiden, die willkürliche Grösse r involvirenden Relationen:

$$A(r-a)^2 + Br(r-a) + Cr^2 = 0,$$
$$Ar^2 + Br(r+a) + C(r+a)^2 = 0.$$

Sie stellen zwei Tangenten der Directrix dar, welche sich in dem Punkte p schneiden. Die Elimination von r aus den beiden Gleichungen ergibt:

$$(A+B+C)^2 - (B^2 - 4AC) = 0,$$

somit einen Kegelschnitt als geometrischen Ort des Punktes p.

Da die letzte Gleichung linear zusammengesetzt ist aus der Gleichung $B^2 - 4AC = 0$ der Directrix, und dem Quadrate der Gleichung einer geraden Linie $A + B + C = 0$, so beweist dies, dass der Kegelschnitt, welcher der geometrische Ort des Punktes p ist, die Directrix immer in zwei Punkten berührt.

Man kann darin einen Widerspruch finden. Denn der Berührungspunkt des Kegelschnitts und der Directrix entspricht, weil er auf dem Kegelschnitte liegt, einem Punktepaare auf der Fundamentallinie, welches das Stück a begrenzt; er entspricht zugleich einem Doppelpunkte der Fundamentallinie, weil er der Directrix angehört. Dieser Widerspruch wird allein beseitigt, wenn der Doppelpunkt und das von dem Kegelschnitt herrührende Punktepaar beide im Unendlichen liegen. Nun haben wir aber zwei Berührungspunkte des Kegelschnitts und der Directrix. Da für den zweiten Berührungspunkt dasselbe gilt, so müssen die beiden Berührungspunkte zusammenfallen und die gerade Linie $A + B + C = 0$ Tangente der Directrix sein.

Hieraus schliessen wir endlich, dass der geometrische Ort des Punktes p ein Kegelschnitt ist, welcher die Directrix in einem Punkte vierpunktig berührt, und dieser Berührungspunkt entspricht auf der Fundamentallinie dem Doppelpunkt im Unendlichen. Dasselbe ergibt sich analytisch aus einer der mit r behafteten Gleichungen, wenn man $r = \infty$ setzt.

Von einem andern, unverändert auf der Fundamentallinie fortrückenden Punktepaar lässt sich Gleiches sagen. Daraus ziehen wir den Schluss: Wenn man auf der Directrix den Punkt fixirt, der dem auf der Fundamentallinie unendlich entfernten Punkte entspricht, und einen beliebigen Kegelschnitt construirt, der die Directrix in jenem Punkte vierpunktig berührt, so entsprechen den Punkten des Kegelschnitts Punktepaare auf der Fundamentallinie, deren jedes dasselbe Stück auf der Fundamentallinie begrenzt.

4.

Ueber Sechsecke im Raume.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 85, Seite 304—314.]

Wenn ein Sechseck im Raume die Eigenschaft hat, dass die gegenüber liegenden Seiten desselben sich paarweise schneiden, so ist es ein Brianchon'sches Sechseck, das heisst ein Sechseck, in welchem die drei, die gegenüber liegenden Ecken verbindenden Diagonalen sich in ein und demselben Punkte, dem Brianchon'schen Punkte, schneiden. Umgekehrt lehrt auch die geometrische Anschauung, dass in jedem Brianchon'schen Sechseck die gegenüber liegenden Seiten sich paarweise schneiden.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir annehmen, dass die auf einander folgenden Ecken eines Sechsecks im Raume durch ihre Gleichungen gegeben seien:

1. $$V_1 = 0, \qquad V_2 = 0, \qquad \ldots \qquad V_6 = 0,$$

deren linke Seiten Ausdrücke von der Form bedeuten:

2. $$V_k = \xi_k u + \eta_k v + \zeta_k w + \vartheta_k r.$$

Die Bedingung, dass das Sechseck ein Brianchon'sches sei, wird durch die Identitäten ausgedrückt:

3. $$U_0 \equiv \varrho_1 V_1 + \varrho_4 V_4 \equiv \varrho_2 V_2 + \varrho_5 V_5 \equiv \varrho_3 V_3 + \varrho_6 V_6,$$

wenn wir annehmen, dass $U_0 = 0$ die Gleichung des Brianchon'schen Punktes sei, und unter den sechs Coëfficienten ϱ solche constante Grössen verstehen, welche die Gleichungen (3) zu identischen Gleichungen machen.

Die geometrische Anschauung lehrt ferner, dass in einem Brianchon'schen Sechseck jede der geraden Seiten von jeder der ungeraden Seiten geschnitten wird. Desshalb liegt jedes Brianchon'sche Sechseck mit seinen Seiten ganz auf einem Hyperboloïd, dessen Generatricen entweder die geraden oder die ungeraden Seiten des Sechsecks sind. Eben so einfach führt man auch den geometrischen Beweis des umgekehrten Satzes, dass jedes Sechseck auf einem Hyperboloïde ein Brianchon'sches ist.

Liegt ein Sechseck im Raume, dessen Ecken durch die Gleichungen (1) gegeben seien, mit seinen Seiten ganz auf irgend einem gegebenen Hyperboloïd $\varphi(x, y, z, p) = 0$, so hat man folgende 12 Bedingungen:

$$4. \qquad \begin{cases} \varphi_1 = 0, & \varphi_2 = 0, & \ldots & \varphi_6 = 0, \\ \varphi_{12} = 0, & \varphi_{23} = 0, & \ldots & \varphi_{61} = 0, \end{cases}$$

wenn man annimmt, dass

$$\varphi_1 = \varphi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \vartheta_1), \quad \varphi_{12} = \xi_1 \varphi'(\xi_2) + \eta_1 \varphi'(\eta_2) + \zeta_1 \varphi'(\zeta_2) + \vartheta_1 \varphi'(\vartheta_2)$$

etc. seien. Denn die sechs ersten Gleichungen drücken aus, dass die sechs Ecken des Sechsecks auf dem Hyperboloïd liegen, und die sechs anderen Gleichungen in Verbindung mit den ersten, dass auch die Seiten auf dem Hyperboloïd liegen.

Ist das Hyperboloïd, auf welchem das Brianchon'sche Sechseck liegt, nicht unmittelbar gegeben, so hat man zwischen den Coëfficienten der Function φ zwölf lineare homogene Bedingungsgleichungen (4), aus welchen durch Elimination drei Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der gegebenen sechs Punkte (1) hervorgehen.

Ebenso erhält man drei Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der gegebenen sechs Punkte (1), wenn man die acht, in Rücksicht auf die sechs Unbekannten ϱ linearen und homogenen Gleichungen aufstellt, welche aus den Identitäten (3) unmittelbar folgen, und wenn man hierauf die Unbekannten eliminirt.

Diese drei Bedingungsgleichungen zwischen den sechs gegebenen Punkten (1) müssen nach dem Vorhergehenden äquivalent sein den drei aus dem Systeme (4) abgeleiteten Bedingungsgleichungen.

Wir werden dieses auch analytisch nachweisen, indem wir zeigen, wie aus den identischen Gleichungen (3) die Gleichungen (4) hervorgehen,

und umgekehrt, wie man von dem Systeme (4) zu den Identitäten (3) gelangt.

Welches auch die sechs gegebenen Punkte (1) seien, so kann man die zehn Coëfficienten in der Function φ immer eindeutig so bestimmen, dass sie den neun ersten Gleichungen (4) genügen. Denn es sind dieses lineare und homogene Gleichungen in Rücksicht auf die zehn Coëfficienten. Aus diesen neun Gleichungen und den Identitäten (3) lassen sich dann die drei letzten Gleichungen (4) ableiten wie folgt.

Wir heben aus (3) die Identität hervor:

$$\varrho_1 V_1 - \varrho_2 V_2 \equiv - \varrho_4 V_4 + \varrho_5 V_5.$$

Wir quadriren jede Seite der identischen Gleichung, entwickeln sie hierauf und setzen für die Quadrate und Producte der Variabeln die entsprechenden Coëfficienten der Function φ. Durch diese erlaubte Operation, die wir im Folgenden öfters anwenden werden, geht die Identität, unter Berücksichtigung der neun ersten Gleichungen (4), in die zehnte nicht identische Gleichung (4) über u. s. w.

Nehmen wir umgekehrt an, das Sechseck liege auf dem Hyperboloïd $\varphi = 0$, so finden die zwölf Gleichungen (4) statt. Wir wollen nun aus ihnen die Identitäten (3) herleiten, welche, geometrisch interpretirt, aussagen, dass das Sechseck ein Brianchon'sches sei.

Welches auch die fünf Punkte (1), (2), . . . (5) seien, so kann man die fünf Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_3, \varrho_4, \varrho_5$ immer so bestimmen, dass man identisch hat:

$$\varrho_1 V_1 - \varrho_2 V_2 + \sigma_3 V_3 + \varrho_4 V_4 - \varrho_5 V_5 \equiv 0. \tag{5}$$

Indem man diese Gleichung der Reihe nach mit $V_1, V_2, \ldots V_6$ multiplicirt und für die Quadrate und Producte der Variabeln die Coëfficienten in der Function φ setzt, erhält man die sechs, in Rücksicht auf $\varrho_1, \ldots \varrho_5$ linearen Relationen:

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho_1 \cdot 0 \quad - \varrho_2 \cdot 0 + \sigma_3 \varphi_{13} + \varrho_4 \varphi_{14} - \varrho_5 \varphi_{15} = 0, \\ \varrho_1 \cdot 0 \quad - \varrho_2 \cdot 0 + \sigma_3 \cdot 0 + \varrho_4 \varphi_{24} - \varrho_5 \varphi_{25} = 0, \\ \varrho_1 \cdot \varphi_{13} - \varrho_2 \cdot 0 + \sigma_3 \cdot 0 + \varrho_4 \cdot 0 - \varrho_5 \varphi_{35} = 0, \\ \varrho_1 \cdot \varphi_{14} - \varrho_2 \varphi_{24} + \sigma_3 \cdot 0 + \varrho_4 \cdot 0 - \varrho_5 \cdot 0 = 0, \\ \varrho_1 \cdot \varphi_{15} - \varrho_2 \varphi_{25} + \sigma_3 \varphi_{35} + \varrho_4 \cdot 0 - \varrho_5 \cdot 0 = 0, \\ \varrho_1 \cdot 0 \quad - \varrho_2 \varphi_{26} + \sigma_3 \varphi_{36} + \varrho_4 \varphi_{46} + \varrho_5 \cdot 0 = 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

Setzen wir, um die Unbekannten zu bestimmen, die Werthe von ϱ_2 und ϱ_4 aus der zweiten und vierten Gleichung in die übrigen, so wird:

$$\begin{aligned}
&\varrho_1 \cdot 0 + \sigma_3 \varphi_{13} \varphi_{24} - \varrho_5 (\varphi_{15} \varphi_{24} - \varphi_{14} \varphi_{25}) = 0,\\
&\varrho_1 \varphi_{13} + \sigma_3 \cdot 0 \quad - \varrho_5 \varphi_{35} = 0,\\
&\varrho_1 (\varphi_{15} \varphi_{24} - \varphi_{14} \varphi_{25}) + \sigma_3 \cdot \varphi_{35} \varphi_{24} - \varrho_5 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Es ist demnach

$$\sigma_3 = \frac{(\varphi_{15} \varphi_{24} - \varphi_{14} \varphi_{25}) \varrho_5}{\varphi_{13} \varphi_{24}}, \qquad \sigma_3 = - \frac{(\varphi_{15} \varphi_{24} - \varphi_{14} \varphi_{25}) \varrho_1}{\varphi_{35} \varphi_{24}},$$

woraus der Werth von σ_3 folgt:

$$\sigma_3 = 0,$$

und zugleich, dass

$$\varphi_{14} \varphi_{25} - \varphi_{15} \varphi_{24} = 0. \tag{7.}$$

Die identische Gleichung (5) stellt sich demnach also dar:

$$\varrho_1 V_1 + \varrho_4 V_4 \equiv \varrho_2 V_2 + \varrho_5 V_5, \tag{8.}$$

während aus dem System (6) sich ohne Schwierigkeit ergiebt:

$$\begin{aligned}
&\varrho_1 = \frac{1}{\mu} \varphi_{35}, \qquad \varrho_5 = \frac{1}{\mu} \varphi_{13},\\
&\varrho_2 = \frac{1}{\lambda} \varphi_{46}, \qquad \varrho_4 = \frac{1}{\lambda} \varphi_{26};
\end{aligned} \tag{9.}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \sqrt{\frac{\varphi_{24} \varphi_{46} \varphi_{62}}{\varphi_{13} \varphi_{35} \varphi_{15}}} = \frac{\varphi_{14} \varphi_{26}}{\varphi_{13} \varphi_{15}} = \frac{\varphi_{25} \varphi_{46}}{\varphi_{15} \varphi_{35}} = \frac{\varphi_{24} \varphi_{46}}{\varphi_{14} \varphi_{35}} = \frac{\varphi_{24} \varphi_{26}}{\varphi_{25} \varphi_{13}}. \tag{10.}$$

In ähnlicher Weise, wie wir die identische Gleichung (8) aus dem Systeme (4) abgeleitet haben, können wir auch folgende Identität:

$$\varrho_1 V_1 + \varrho_4 V_4 \equiv \varrho_3 V_3 + \varrho_6 V_6 \tag{11.}$$

beweisen, aus welcher auf die angegebene Art die Werthe der ϱ hervorgehen:

$$\left\{\begin{aligned}
&\varrho_1 = \frac{1}{\mu} \varphi_{35}, \qquad \varrho_3 = \frac{1}{\mu} \varphi_{15}, \qquad \varphi_{14} \varphi_{25} = \varphi_{15} \varphi_{24},\\
&\varrho_4 = \frac{1}{\lambda} \varphi_{26}, \qquad \varrho_6 = \frac{1}{\lambda} \varphi_{24}, \qquad \varphi_{14} \varphi_{36} = \varphi_{13} \varphi_{46},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi_{25} \varphi_{36} = \varphi_{26} \varphi_{35};
\end{aligned}\right. \tag{12.}$$

13. $$\begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} = \sqrt{\frac{\varphi_{24}\varphi_{46}\varphi_{62}}{\varphi_{13}\varphi_{35}\varphi_{51}}} = \frac{\varphi_{14}\varphi_{26}}{\varphi_{13}\varphi_{15}} = \frac{\varphi_{36}\varphi_{24}}{\varphi_{13}\varphi_{35}} = \frac{\varphi_{25}\varphi_{46}}{\varphi_{15}\varphi_{35}} \\ \qquad = \frac{\varphi_{24}\varphi_{46}}{\varphi_{14}\varphi_{35}} = \frac{\varphi_{26}\varphi_{46}}{\varphi_{36}\varphi_{15}} = \frac{\varphi_{24}\varphi_{26}}{\varphi_{25}\varphi_{13}}. \end{cases}$$

Da hier das Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ den gleichen Werth hat wie in (10), so setzen sich aus (8) und (10) die identischen Gleichungen (3) zusammen, die man nun so darstellen kann:

14. $$U_0 \equiv \frac{\varphi_{35}}{\mu} V_1 + \frac{\varphi_{26}}{\lambda} V_4 \equiv \frac{\varphi_{46}}{\lambda} V_2 + \frac{\varphi_{13}}{\mu} V_5 \equiv \frac{\varphi_{15}}{\mu} V_3 + \frac{\varphi_{24}}{\lambda} V_6.$$

Das Vorhergehende handelte von einem Brianchon'schen Sechseck im Raume. Jetzt werden wir irgend ein geradliniges Sechseck im Raume betrachten in Verbindung mit einem beliebig gewählten Punkte.

Die Gleichungen der auf einander folgenden Ecken dieses Sechsecks U seien:

15. $$U_1 = 0, \qquad U_2 = 0, \qquad \dots \qquad U_6 = 0,$$

und die Gleichung des beliebig gewählten Punktes

16. $$U_0 = 0.$$

Wir werden annehmen, U_k sei der Ausdruck

17. $$U_k \equiv x_k u + y_k v + z_k w + p_k r,$$

also x_k, y_k, z_k, p_k die homogenen Coordinaten des Punktes $U_k = 0$.

Dieses vorausgesetzt, so lassen sich zwölf Constanten λ und μ so bestimmen, dass man identisch hat:

18. $$\begin{cases} U_0 \equiv \varrho_1 \lambda_1 U_1 + \varrho_1 \lambda_2 U_2 + \varrho_4 \mu_4 U_4 + \varrho_4 \mu_5 U_5, \\ \quad \equiv \varrho_2 \mu_2 U_2 + \varrho_2 \mu_3 U_3 + \varrho_5 \lambda_5 U_5 + \varrho_5 \lambda_6 U_6, \\ \quad \equiv \varrho_3 \lambda_3 U_3 + \varrho_3 \lambda_4 U_4 + \varrho_6 \mu_6 U_6 + \varrho_6 \mu_1 U_1; \end{cases}$$

denn setzt man die Coëfficienten der vier Variabeln u, v, w, r auf beiden Seiten dieser drei Identitäten einander gleich, so erhält man zwischen

den zwölf Unbekannten λ und μ zwölf lineare nicht homogene Relationen, welchen man genügen kann. Wir werden im Folgenden annehmen, dass die zwölf Constanten λ und μ demgemäss bestimmt seien.

Um das System (18) für die geometrische Interpretation geschickter zu machen, wollen wir mit $V_1 \ldots V_6$ die Ausdrücke bezeichnen:

$$19. \quad \begin{cases} V_1 \equiv \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, & V_3 \equiv \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4, & V_5 \equiv \lambda_5 U_5 + \lambda_6 U_6, \\ V_2 \equiv \mu_2 U_2 + \mu_3 U_3, & V_4 \equiv \mu_4 U_4 + \mu_5 U_5, & V_6 \equiv \mu_6 U_6 + \mu_1 U_1, \end{cases}$$

mit Rücksicht auf welche Bezeichnung die Identitäten (18) sich so darstellen:

$$20. \qquad U_0 \equiv \varrho_1 V_1 + \varrho_4 V_4 \equiv \varrho_2 V_2 + \varrho_5 V_5 \equiv \varrho_3 V_3 + \varrho_6 V_6.$$

Betrachten wir nun die durch die Gleichungen $V_1 = 0, \ldots V_6 = 0$ ausgedrückten Punkte als die auf einander folgenden Ecken eines zweiten Sechsecks V im Raume, so beweisen die Gleichungen (19), dass die auf einander folgenden Ecken dieses Sechsecks V in den auf einander folgenden Seiten des Sechsecks U liegen, d. h. dass das Sechseck V dem Sechseck U einbeschrieben ist. Aus den Gleichungen (20) ist zu ersehen, dass jede der drei Diagonalen des Sechsecks V durch den Punkt $U_0 = 0$ geht. Das Sechseck V ist demnach ein Brianchon'sches Sechseck im Raume. Es lässt sich leicht construiren. Denn legt man durch den gegebenen Punkt $U_0 = 0$ drei gerade Linien, von denen jede ein Paar gegenüber liegender Seiten des gegebenen Sechsecks U schneidet, so werden die sechs Schnittpunkte auf den auf einander folgenden Seiten des Sechsecks U die auf einander folgenden Ecken des Sechsecks V sein.

Da das Sechseck V ein Brianchon'sches ist, so kann man nach dem Hyperboloïde $\varphi = 0$ fragen, auf welchem das Sechseck liegt. Dazu dienen die zwölf Gleichungen (4), von denen man gesehen hat, dass sie nur die Stelle von neun Gleichungen vertreten. Sie sind in Rücksicht auf die Coëfficienten in φ linear und ergeben durch Auflösung die Verhältnisse der zehn Coëfficienten in φ ausgedrückt durch die Coordinaten der sechs Punkte V.

Auf diese Weise ist das Hyperboloïd $\varphi = 0$ dargestellt vermittelst der Coordinaten der sechs Punkte V, die nicht unmittelbar, sondern in secundärer Linie durch die sieben gegebenen Punkte U bestimmt sind.

Es ist jedoch nützlich, das Hyperboloïd $\varphi = 0$ durch die Coordinaten der sieben gegebenen Punkte U direct auszudrücken.

Zu diesem Zwecke ersetzen wir in den sechs ersten Gleichungen (4) die Coordinaten der sechs Punkte V durch ihre Werthe aus den Identitäten (19) und erhalten:

$$21. \quad \begin{cases} \lambda_1^2 \varphi(1) + \lambda_1 \lambda_2 \varphi(12) + \lambda_2^2 \varphi(2) = 0, \\ \mu_2^2 \varphi(2) + \mu_2 \mu_3 \varphi(23) + \mu_3^2 \varphi(3) = 0, \\ \lambda_3^2 \varphi(3) + \lambda_3 \lambda_4 \varphi(34) + \lambda_4^2 \varphi(4) = 0, \\ \mu_4^2 \varphi(4) + \mu_4 \mu_5 \varphi(45) + \mu_5^2 \varphi(5) = 0, \\ \lambda_5^2 \varphi(5) + \lambda_5 \lambda_6 \varphi(56) + \lambda_6^2 \varphi(6) = 0, \\ \mu_6^2 \varphi(6) + \mu_6 \mu_1 \varphi(61) + \mu_1^2 \varphi(1) = 0, \end{cases}$$

wenn wir nämlich mit $\varphi(1)$, $\varphi(12)$ . . . die Ausdrücke bezeichnen:

$$\varphi(1) = \varphi(x_1 y_1 z_1 p_1), \qquad \varphi(12) = x_1 \varphi'(x_2) + y_1 \varphi'(y_2) + z_1 \varphi'(z_2) + p_1 \varphi'(p_2).$$

Das zweite dem genannten Zwecke dienliche System von sechs Relationen geht in ähnlicher Weise aus den sechs letzten Gleichungen (4) hervor. Diese Relationen lassen sich jedoch durch das angegebene System (21) in eine angemessenere Form bringen. Um gleich auf die gewünschte Form zu gelangen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Durch die Verbindung je zweier auf einander folgender Identitäten in (19) gehen die sechs Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mu_2 U_1 - \lambda_2 \mu_3 U_3 &\equiv V_1 \mu_2 - V_2 \lambda_2, \\ \mu_2 \lambda_3 U_2 - \mu_3 \lambda_4 U_4 &\equiv V_2 \lambda_3 - V_3 \mu_3, \\ \lambda_3 \mu_4 U_3 - \lambda_4 \mu_5 U_5 &\equiv V_3 \mu_4 - V_4 \lambda_4, \\ \mu_4 \lambda_5 U_4 - \mu_5 \lambda_6 U_6 &\equiv V_4 \lambda_5 - V_5 \mu_5, \\ \lambda_5 \mu_6 U_5 - \lambda_6 \mu_1 U_1 &\equiv V_5 \mu_6 - V_6 \lambda_6, \\ \mu_6 \lambda_1 U_6 - \mu_1 \lambda_2 U_2 &\equiv V_6 \lambda_1 - V_1 \mu_1. \end{aligned}$$

Quadriren wir beide Theile dieser Gleichungen und setzen hierauf für die Potenzen und Producte der Variabeln u, v, w, r die Coëfficienten der Function φ, so verschwinden mit Rücksicht auf die Relationen (4) die rechten Theile der Gleichungen.

Man hat desshalb:

$$
22. \quad \begin{cases}
\lambda_1^2 \mu_2^2 \varphi(1) - \lambda_1 \mu_2 \lambda_2 \mu_3 \varphi(13) + \lambda_2^2 \mu_3^2 \varphi(3) = 0, \\
\mu_2^2 \lambda_3^2 \varphi(2) - \mu_2 \lambda_3 \mu_3 \lambda_4 \varphi(24) + \mu_3^2 \lambda_4^2 \varphi(4) = 0, \\
\lambda_3^2 \mu_4^2 \varphi(3) - \lambda_3 \mu_4 \lambda_4 \mu_5 \varphi(35) + \lambda_4^2 \mu_5^2 \varphi(5) = 0, \\
\mu_4^2 \lambda_5^2 \varphi(4) - \mu_4 \lambda_5 \mu_5 \lambda_6 \varphi(46) + \mu_5^2 \lambda_6^2 \varphi(6) = 0, \\
\lambda_5^2 \mu_6^2 \varphi(5) - \lambda_5 \mu_6 \lambda_6 \mu_1 \varphi(51) + \lambda_6^2 \mu_1^2 \varphi(1) = 0, \\
\mu_6^2 \lambda_1^2 \varphi(6) - \mu_6 \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \varphi(62) + \mu_1^2 \lambda_2^2 \varphi(2) = 0.
\end{cases}
$$

Es lässt sich auch das System (21) in ähnlicher Weise ableiten aus den Identitäten (19) unter der Voraussetzung der Relationen (4). Denn quadrirt man beide Theile der Gleichungen (19) und setzt hierauf für die Quadrate und Producte der Variabeln die entsprechenden Coëfficienten in der Function φ, so erhält man gerade das System (21).[1]

Die zwölf Gleichungen (21) und (22) sind nichts anderes, als die Relationen (4) in einer anderen Gestalt. Da diese Relationen (4) aber nur die Stelle von neun unabhängigen Gleichungen vertreten, so gilt dasselbe von dem Systeme (21) und (22). Letztere dienen dazu, die Coëfficienten der Function φ in linearer Weise zu berechnen als Ausdrücke der Coordinaten der gegebenen sieben Punkte $U_0, U_1, \ldots U_6$. Die Coordinaten des Punktes U_0 gehen nämlich in die Grössen λ und μ ein, wie sie durch die Identitäten (18) definirt sind; oder deutlicher ausgedrückt, die Coordinaten der sechs Punkte $U_1, U_2, \ldots U_6$ sind direct enthalten in den Grössen $\varphi(1), \ldots \varphi(12), \ldots$ und indirect, zugleich mit den Coordinaten des Punktes U_0, in den zwölf Coëfficienten λ und μ der Identitäten (18).

---

1) Setzt man

$$\lambda_1 : \lambda_2 = -(p:q), \qquad \mu_2 : \mu_3 = -(q:r),$$

also

$$(\lambda_1 \mu_2) : (\lambda_2 \mu_3) = p : r,$$

so nehmen die beiden ersten Gleichungen (21) und die erste Gleichung (22) die elegante Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
p^2 \varphi(1) - p\,q\,\varphi(12) + q^2 \varphi(2) = 0, \\
q^2 \varphi(2) - q\,r\,\varphi(23) + r^2 \varphi(3) = 0, \\
r^2 \varphi(3) - r\,p\,\varphi(31) + p^2 \varphi(1) = 0.
\end{aligned}
$$

Ich weiss aber aus dieser Form keinen weiteren Nutzen zu ziehen.

Wir wollen nun in allen aufgestellten Gleichungen die Grössen

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots \quad \lambda_6, \qquad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots \quad \mu_6$$

resp. verändern in

$$23. \quad \frac{1}{\lambda_1\varphi(1)}, \frac{1}{\lambda_2\varphi(2)}, \ldots \frac{1}{\lambda_6\varphi(6)}, \qquad \frac{1}{\mu_1\varphi(1)}, \frac{1}{\mu_2\varphi(2)}, \ldots \frac{1}{\mu_6\varphi(6)},$$

und die veränderten Gleichungen geometrisch interpretiren.

Es fällt zuerst in die Augen, dass durch die genannten Veränderungen die Gleichungen (21) und (22) ihre Gestalt beibehalten. Die Identitäten (19) werden übergehen in:

$$24. \begin{cases} V^{(1)} \equiv \dfrac{U_1}{\lambda_1\varphi(1)} + \dfrac{U_2}{\lambda_2\varphi(2)}, & V^{(3)} \equiv \dfrac{U_3}{\lambda_3\varphi(3)} + \dfrac{U_4}{\lambda_4\varphi(4)}, & V^{(5)} \equiv \dfrac{U_5}{\lambda_5\varphi(5)} + \dfrac{U_6}{\lambda_6\varphi(6)}, \\ V^{(2)} \equiv \dfrac{U_2}{\mu_2\varphi(2)} + \dfrac{U_3}{\mu_3\varphi(3)}, & V^{(4)} \equiv \dfrac{U_4}{\mu_4\varphi(4)} + \dfrac{U_5}{\mu_5\varphi(5)}, & V^{(6)} \equiv \dfrac{U_6}{\mu_6\varphi(6)} + \dfrac{U_1}{\mu_1\varphi(1)}, \end{cases}$$

wenn wir annehmen, dass $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \vartheta_1$ übergehen in $\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \zeta^{(1)}, \vartheta^{(1)}$ u. s. w. und $V_1, V_2, \ldots$ in $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots$ Da nun die Systeme (21) und (22) äquivalent sind mit den Gleichungen (4) vermittelst der Identitäten (19), die Relationen (21) und (22) aber ungeändert bleiben, so verändert sich das System (4), vermöge der Identitäten (24), in

$$25. \quad \begin{cases} \varphi^{(1)} = 0, & \varphi^{(2)} = 0, & \ldots & \varphi^{(6)} = 0, \\ \varphi^{(12)} = 0, & \varphi^{(23)} = 0, & \ldots & \varphi^{(61)} = 0, \end{cases}$$

wenn wir festsetzen, dass $\varphi^{(1)} = \varphi(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \zeta^{(1)}, \vartheta^{(1)})$,

$$\varphi^{(12)} = \xi^{(1)}\varphi'(\xi^{(2)}) + \eta^{(1)}\varphi'(\eta^{(2)}) + \zeta^{(1)}\varphi'(\zeta^{(2)}) + \vartheta^{(1)}\varphi'(\vartheta^{(2)}) \text{ etc.}$$

Diese Relationen sagen aus, dass die Punkte $V^{(1)} = 0, \ldots V^{(6)} = 0$ die auf einander folgenden Ecken eines zweiten Sechsecks V auf dem Hyperboloïd $\varphi = 0$ sind. Da diese Punkte aber, wie die Identitäten (24) beweisen, auch auf den Seiten des Sechsecks U liegen, so sind sie nichts anderes als die zweiten Schnittpunkte der Seiten des Sechsecks U mit dem Hyperboloïd.

Auch das zweite Sechseck V ist ein Brianchon'sches. Man wird daher sechs Grössen $\varrho^{(1)}, \varrho^{(2)}, \ldots$ so bestimmen können, dass man identisch hat:

$$26. \quad U_7 \equiv \varrho^{(1)}V^{(1)} + \varrho^{(4)}V^{(4)} \equiv \varrho^{(2)}V^{(2)} + \varrho^{(5)}V^{(5)} \equiv \varrho^{(3)}V^{(3)} + \varrho^{(6)}V^{(6)};$$

dabei wird $U_7 = 0$ den Punkt darstellen, in welchem sich die Diagonalen des zweiten Brianchon'schen Sechsecks schneiden.

Die analytische Bestimmung der sechs Coëfficienten $\varrho^{(k)}$ in der einfachsten Gestalt unterliegt noch einigen Schwierigkeiten. Bevor wir daran gehen, wollen wir die bisherigen Ergebnisse in Form eines Satzes kurz wiedergeben:

„Wenn im Raume irgend ein Sechseck U und ein Punkt U_0 gegeben ist, und man durch ihn drei gerade Linien zieht, welche die gegenüber liegenden Seiten des Sechsecks paarweise schneiden, so sind die Schnittpunkte auf den auf einander folgenden Seiten des Sechsecks U die auf einander folgenden Ecken eines Brianchon'schen Sechsecks V, dem der Brianchon'sche Punkt U_0 zugehört. Das einbeschriebene Sechseck V bestimmt unzweideutig ein Hyperboloïd, auf dem es liegt. Dieses Hyperboloïd wird von den Seiten des gegebenen Sechsecks U überdies noch in sechs Punkten geschnitten, die in derselben Reihenfolge die Ecken sind eines zweiten, dem gegebenen einbeschriebenen und auf dem Hyperboloïde liegenden Brianchon'schen Sechsecks V mit einem Brianchon'schen Punkte U_7."

Es bleibt nun noch übrig, die Coëfficienten ϱ in den Identitäten (26) durch die Coordinaten der sieben gegebenen Punkte $U_0, \ldots U_6$ auszudrücken. Diesem Zweck dienen mannigfaltige Relationen, die jetzt entwickelt werden sollen.

Wir quadriren die identischen Gleichungen (20) und setzen hierauf für die Quadrate und Producte der Variabeln die Coëfficienten in der Function φ. Dadurch erhalten wir mit Rücksicht auf (4) die Relationen:

$$\varphi(0) = \varrho_1 \varrho_4 \varphi_{14} = \varrho_2 \varrho_5 \varphi_{25} = \varrho_3 \varrho_6 \varphi_{36}.$$

Multiplicirt man dagegen die Gleichungen (20) nach einander mit den Functionen $V_1 \ldots V_6$ und ersetzt die Quadrate und Producte der Variabeln durch die Coëfficienten in der Function φ, so erhält man mit Bezug auf die zuletzt abgeleiteten Gleichungen

$$27. \quad \begin{aligned} \varphi(0) &= \varrho_1 \varrho_4 \varphi_{14} = \varrho_2 \varrho_5 \varphi_{25} = \varrho_3 \varrho_6 \varphi_{36} = \varrho_1 \varrho_3 \varphi_{13} = \varrho_2 \varrho_4 \varphi_{24} = \varrho_3 \varrho_5 \varphi_{35} \\ &= \varrho_4 \varrho_6 \varphi_{46} = \varrho_5 \varrho_1 \varphi_{51} = \varrho_6 \varrho_2 \varphi_{62}. \end{aligned}$$ [1]

---

1) Diese Relationen ergeben sich auch unmittelbar aus (9)—(13).

Nach (9)—(13) drücken sich die gesuchten Grössen $\varrho^{(k)}$ so aus:

$$
28. \quad \begin{cases}
\varrho^{(1)} = \frac{1}{m}\varphi^{(35)}, \qquad \varrho^{(3)} = \frac{1}{m}\varphi^{(51)}, \qquad \varrho^{(5)} = \frac{1}{m}\varphi^{(13)}, \\
\varrho^{(2)} = \frac{1}{l}\varphi^{(46)}, \qquad \varrho^{(4)} = \frac{1}{l}\varphi^{(62)}, \qquad \varrho^{(6)} = \frac{1}{l}\varphi^{(24)}, \\
\frac{l}{m} = \sqrt{\frac{\varphi^{(24)}\varphi^{(46)}\varphi^{(62)}}{\varphi^{(13)}\varphi^{(35)}\varphi^{(51)}}} = \frac{\varphi^{(14)}\varphi^{(26)}}{\varphi^{(13)}\varphi^{(15)}} = \frac{\varphi^{(25)}\varphi^{(46)}}{\varphi^{(15)}\varphi^{(35)}} = \frac{\varphi^{(36)}\varphi^{(24)}}{\varphi^{(13)}\varphi^{(35)}} \\
\qquad = \frac{\varphi^{(24)}\varphi^{(46)}}{\varphi^{(14)}\varphi^{(35)}} = \frac{\varphi^{(24)}\varphi^{(26)}}{\varphi^{(25)}\varphi^{(13)}} = \frac{\varphi^{(26)}\varphi^{(46)}}{\varphi^{(36)}\varphi^{(15)}}.
\end{cases}
$$

Man sieht, dass es sich hier schliesslich darum handelt, die neun Grössen $\varphi^{(\varkappa\lambda)}$ durch die Coordinaten der sieben gegebenen Punkte $U_0 \ldots U_6$ auszudrücken.

Zu diesem Zwecke kehren wir zu unseren identischen Gleichungen (19) zurück. Indem man je drei auf einander folgende unter ihnen combinirt, leitet man ohne Schwierigkeiten folgende Identitäten ab:

$$
29. \quad \begin{cases}
\mu_2\lambda_3 V_1 - \lambda_2\lambda_3 V_2 + \lambda_2\mu_3 V_3 \equiv \lambda_1\lambda_3\mu_2 U_1 + \lambda_2\lambda_4\mu_3 U_4, \\
\lambda_3\mu_4 V_2 - \mu_3\mu_4 V_3 + \mu_3\lambda_4 V_4 \equiv \mu_2\mu_4\lambda_3 U_2 + \mu_3\mu_5\lambda_4 U_5, \\
\mu_4\lambda_5 V_3 - \lambda_4\lambda_5 V_4 + \lambda_4\mu_5 V_5 \equiv \lambda_3\lambda_5\mu_4 U_3 + \lambda_4\lambda_6\mu_5 U_6, \\
\lambda_5\mu_6 V_4 - \mu_5\mu_6 V_5 + \mu_5\lambda_6 V_6 \equiv \mu_4\mu_6\lambda_5 U_4 + \mu_5\mu_1\lambda_6 U_1, \\
\mu_6\lambda_1 V_5 - \lambda_6\lambda_1 V_6 + \lambda_6\mu_1 V_1 \equiv \lambda_5\lambda_1\mu_6 U_5 + \lambda_6\lambda_2\mu_1 U_2, \\
\lambda_1\mu_2 V_6 - \mu_1\mu_2 V_1 + \mu_1\lambda_2 V_2 \equiv \mu_6\mu_2\lambda_1 U_6 + \mu_1\mu_3\lambda_2 U_3.
\end{cases}
$$

Man kann in diesen Gleichungen die Veränderungen (23) machen, wenn man gleichzeitig die $V_1, V_2, \ldots$ verändert in die $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots$; denn man erhält dadurch Gleichungen, die in einer ähnlichen Behandlung aus dem Systeme (24) hervorgehen.

Aus den Formeln (29) ergeben sich nun folgende Werthe der gesuchten Grössen:

$$
30. \quad \begin{cases}
\varphi^{(13)} = \frac{\varphi_{13}}{\lambda_1^2\lambda_4^2\varphi(1)\varphi(4)}, \quad \varphi^{(24)} = \frac{\varphi_{24}}{\mu_2^2\mu_5^2\varphi(2)\varphi(5)}, \quad \varphi^{(35)} = \frac{\varphi_{35}}{\lambda_3^2\lambda_6^2\varphi(3)\varphi(6)}, \\
\varphi^{(46)} = \frac{\varphi_{46}}{\mu_1^2\mu_4^2\varphi(1)\mu(4)}, \quad \varphi^{(15)} = \frac{\varphi_{15}}{\lambda_2^2\lambda_5^2\varphi(2)\varphi(5)}, \quad \varphi^{(26)} = \frac{\varphi_{26}}{\mu_3^2\mu_6^2\varphi(3)\varphi(6)},
\end{cases}
$$

und zwar in folgender Weise. Wir quadriren die erste der angeführten Formeln und setzen hierauf für die Quadrate und Producte der Variabeln

die Coëfficienten in der Function φ. Wir erhalten derart mit Rücksicht auf das System (4):

$$\lambda_2 \lambda_3 \mu_2 \mu_3 \varphi_{13} = \{(\lambda_1 \lambda_3 \mu_2)^2 \varphi(1) + (\lambda_1 \lambda_3 \mu_2)(\lambda_2 \lambda_4 \mu_3) \varphi(14) + (\lambda_2 \lambda_4 \mu_3)^2 \varphi(4)\}.$$

Macht man in dieser Gleichung die Veränderungen (23) und lässt zugleich φ_{13} in $\varphi^{(13)}$ übergehen, so ergiebt sich:

$$\frac{\varphi^{(13)}}{\lambda_2 \lambda_3 \mu_2 \mu_3} = \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_3 \mu_2)^2 (\lambda_2 \lambda_4 \mu_3)^2 \varphi(1) \varphi(4)} \{(\lambda_1 \lambda_3 \mu_2)^2 \varphi(1) + \dots + (\lambda_2 \lambda_4 \mu_3)^2 \varphi(4)\}.$$

Eliminirt man endlich aus beiden Gleichungen die Parenthese, so hat man die erste Formel in (29) etc.

Setzen wir die Werthe aus (30) in (28), so wird

$$31. \qquad \frac{l}{m} = \pm \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_6} \frac{\lambda}{\mu};$$

aus eben jenen Gleichungen geht noch hervor:

$$32. \qquad \begin{cases} \varrho_1 \varrho_4 \varphi^{(14)} = \dfrac{\lambda_3^2 \lambda_6^2 \mu_3^2 \mu_6^2 \varphi(0) \varphi^2(3) \varphi^2(6)}{l m \Pi \varphi(k)} \\ \varrho_2 \varrho_5 \varphi^{(25)} = \dfrac{\lambda_1^2 \lambda_4^2 \mu_1^2 \mu_4^2 \varphi(0) \varphi^2(1) \varphi^2(4)}{l m \Pi \varphi(k)} \\ \varrho_3 \varrho_6 \varphi^{(36)} = \dfrac{\lambda_2^2 \lambda_5^2 \mu_2^2 \mu_5^2 \varphi(0) \varphi^2(2) \varphi^2(5)}{l m \Pi \varphi(k)} \\ \Pi \varphi(k) = \varphi(1) \varphi(2) \dots \varphi(6). \end{cases}$$

Substituirt man endlich die Werthe von (30) und (31) in (28), so hat man die gesuchten Verhältnisse der sechs Grössen $\varrho^{(1)}, \dots \varrho^{(6)}$ in den identischen Gleichungen (26).

Es bleibt jedoch noch eine Schwierigkeit zu überwinden übrig, nämlich die Bestimmung des Vorzeichens in der Gleichung (31).

5.

Ueber die linearen homogenen Substitutionen, durch welche die Summe der Quadrate von vier Variabeln transformirt wird in die Summe der Quadrate der vier substituirten Variabeln.

[Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 99, Seite 109—127.]

Es sind die Eigenschaften der linearen homogenen Substitutionen, durch welche die Summe der Quadrate von n Variabeln in die Summe der Quadrate von n substituirten Variabeln transformirt wird, wegen ihres häufigen Gebrauches in der Analysis, der Mechanik und der analytischen Geometrie vielfältig untersucht worden. In den Fällen $n = 2$ oder $n = 3$ werden durch jene Substitutionen bekanntlich die Transformationen rechtwinkliger Coordinatensysteme in der Ebene oder im Raume bewirkt. In diesen Fällen handelt es sich darum, nicht bloss die allgemeinen Eigenschaften der linearen homogenen Substitutionen kennen zu lernen, sondern vornehmlich diejenigen, welche jedem einzelnen Falle eigenthümlich sind. Das Bedürfniss einer ähnlichen Discussion des nächsten Falles $n = 4$ lag bisher nicht vor; um diese jedoch zu rechtfertigen, weise ich auf das im Folgenden zu behandelnde Fundamentalproblem aus der Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung hin, welches in jener Discussion zugleich seine Erledigung findet, nämlich aus sieben gegebenen Schnittpunkten dreier Oberflächen zweiter Ordnung den achten zu bestimmen.

Wenn die Gleichungen von acht Punkten im Raume in der Form

$$W_0 = 0, \qquad W_1 = 0, \qquad \ldots \qquad W_7 = 0$$

gegeben sind, wobei

$$W_\varkappa = x_\varkappa u + y_\varkappa v + z_\varkappa w + p_\varkappa r \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots 7)$$

ist, so lassen sich im Allgemeinen acht Factoren $\lambda_\varkappa$ *nicht* so bestimmen, dass man identisch hat:

$$\text{I.} \qquad \lambda_0 W_0^2 + \lambda_1 W_1^2 + \ldots + \lambda_7 W_7^2 \equiv 0.$$

Wenn man aber nur die ersten sieben Punkte als gegeben annimmt, so lässt sich der achte Punkt W_7 immer so bestimmen, dass der Gleichung (I) *identisch* Genüge geschieht. Denn es zerfällt (I) in zehn Gleichungen, durch welche die sieben Verhältnisse der acht Factoren $\lambda_\varkappa$ und die drei Verhältnisse der vier homogenen Coordinaten x_7, y_7, z_7, p_7 des letzten Punktes bestimmt sind.

Dass auf diese Weise nur ein einziger achter Punkt W_7 erhalten wird, lehrt folgende Betrachtung.

Da von den zehn Gliedern der nach den Quadraten und Producten der Variabeln u, v, w, r entwickelten identischen Gleichung (I) jedes einzelne Glied verschwindet, so kann man für die Quadrate und Producte der Variabeln in (I) irgend welche zehn Constanten setzen; die Gleichung wird auch dann noch erfüllt. Wenn nun $F(x, y, z, p) = 0$ die homogene Gleichung irgend einer Oberfläche zweiter Ordnung ist, und man setzt in (I) für die Quadrate und Producte der Variabeln resp. die Coëfficienten aus der Gleichung der Oberfläche, so geht (I) über in:

$$\text{II.} \qquad \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_7 F_7 = 0,$$

vorausgesetzt, dass $F_\varkappa$ den Ausdruck $F(x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa, p_\varkappa)$ bedeutet.

Beschränken wir nun die zehn Coëfficienten in der Gleichung der Oberfläche zweiter Ordnung durch die sieben Gleichungen:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad \ldots \qquad F_6 = 0,$$

welche ausdrücken, dass die Oberfläche durch die sieben ersten beliebig gewählten Punkte gehen soll, so folgt aus (II) die Gleichung

$$F_7 = 0,$$

welche aussagt, dass alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch sieben im Raume beliebig gewählte Punkte hindurchgehen, auch noch einen achten Schnittpunkt gemeinsam haben, der durch jene sieben bestimmt ist.

Dass dieser achte Punkt sogar *linear* bestimmt ist, folgt daraus, dass irgend drei Oberflächen zweiter Ordnung sich nur in acht Punkten schneiden. Die identische Gleichung (I) tritt hiernach als die analytische Bedingung dafür auf, dass die acht Punkte W_0, W_1, ... W_7 die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung sind.

Um (I) in eine für die folgenden Untersuchungen bequemere Form zu bringen, setzen wir:

$$\sqrt{\lambda_1}\,W_1 = U_1, \quad \sqrt{\lambda_3}\,W_3 = U_3, \quad \sqrt{\lambda_5}\,W_5 = U_5, \quad \sqrt{\lambda_7}\,W_7 = U_7;$$
$$\sqrt{-\lambda_2}\,W_2 = U_2, \quad \sqrt{-\lambda_4}\,W_4 = U_4, \quad \sqrt{-\lambda_6}\,W_6 = U_6, \quad \sqrt{-\lambda_0}\,W_0 = U_0.$$

Durch diese Substitutionen geht (I) in eine neue identische Gleichung über, und wir können sagen:

Wenn acht Punkte im Raume die Schnittpunkte von drei Oberflächen zweiter Ordnung sein sollen, so müssen die Gleichungen derselben von der Art sein, dass ihre linken Seiten mit gewissen Factoren multiplicirt der identischen Gleichung

$$U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 \equiv U_2^2 + U_4^2 + U_6^2 + U_0^2$$

Genüge leisten.

Nun weiss man aber, wenn $U_2 = 0$, $U_4 = 0$, $U_6 = 0$, $U_0 = 0$ die Gleichungen von irgend vier im Raume gegebenen Punkten sind, welche nicht in einer Ebene liegen, und $U = 0$ die Gleichung irgend eines anderen Punktes ist, dass sich die Coëfficienten a, b, c, d so bestimmen lassen, dass man hat

$$U = a\,U_2 + b\,U_4 + c\,U_6 + d\,U_0.$$

In solcher Weise lassen sich also die linken Seiten der Gleichungen $U_1 = 0$, $U_3 = 0$, $U_5 = 0$, $U_7 = 0$ ausdrücken durch die linken Seiten der Gleichungen $U_2 = 0$, $U_4 = 0$, $U_6 = 0$, $U_0 = 0$. Diese Ausdrücke sind nichts anderes als lineare homogene Substitutionen, durch welche die Summe der Quadrate von vier Variabeln transformirt wird in die Summe der Quadrate von vier substituirten Variabeln.

Da nun diese Substitutionen nach den vorangegangenen Andeutungen geometrisch zugleich die Bedingung für die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung ausdrücken, so leuchtet es ein, dass das

Studium der genannten Substitutionen nothwendiger Weise auch auf die Lösung des Fundamentalproblems aus der Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung führen muss:

Wenn von den acht Schnittpunkten dreier Oberflächen zweiter Ordnung sieben gegeben sind, den achten linear zu construiren.

Die folgende Discussion der Substitutionen von der bezeichneten Art führt auf eine grosse Menge von Formeln, die aber ohne Rechnung aus einander hervorgehen. Ein Theil von ihnen ist auch nur der besseren Uebersicht wegen aufgenommen worden. Denn jedes System von Formeln geht aus einer einzigen Formel des Systems durch blosse Veränderung nach einem gewissen Princip hervor, welches in der Symmetrie des Problems seinen Ursprung hat.

1.

Es seien

$$1.\qquad \begin{cases} U_1 = a U_2 + b U_4 + c U_6 + d U_0, \\ U_3 = a' U_2 + b' U_4 + c' U_6 + d' U_0, \\ U_5 = a'' U_2 + b'' U_4 + c'' U_6 + d'' U_0, \\ U_7 = a''' U_2 + b''' U_4 + c''' U_6 + d''' U_0 \end{cases}$$

die linearen homogenen Substitutionen, welche die folgende Gleichung zu einer identischen machen:

$$2.\qquad U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 \equiv U_2^2 + U_4^2 + U_6^2 + U_0^2.$$

Um die Eigenschaften dieser Substitutionen zu erforschen, denken wir uns (1) in (2) eingesetzt und differentiiren hierauf die in Rücksicht auf U_2, U_4, U_6, U_0 identische Gleichung einzeln nach diesen Variabeln. Dadurch erhalten wir:

$$3.\qquad \begin{cases} U_2 = a U_1 + a' U_3 + a'' U_5 + a''' U_7, \\ U_4 = b U_1 + b' U_3 + b'' U_5 + b''' U_7, \\ U_6 = c U_1 + c' U_3 + c'' U_5 + c''' U_7, \\ U_0 = d U_1 + d' U_3 + d'' U_5 + d''' U_7. \end{cases}$$

Es sind dieses die Auflösungen der Gleichungen (1), wenn man in letzteren die Grössen U_2, U_4, U_6, U_0 als die Unbekannten betrachtet; man kann daher die Substitutionen (3) an Stelle der Substitutionen (1) nehmen, weil aus ihnen durch Auflösung wieder die Substitutionen (1) hervorgehen.

Zwischen den 16 Coëfficienten in den Substitutionen (1) finden die Gleichungen statt:

$$4. \quad \begin{cases} 1 = a^{(\varkappa)} a^{(\varkappa)} + b^{(\varkappa)} b^{(\varkappa)} + c^{(\varkappa)} c^{(\varkappa)} + d^{(\varkappa)} d^{(\varkappa)}, \\ 0 = a^{(\varkappa)} a^{(\lambda)} + b^{(\varkappa)} b^{(\lambda)} + c^{(\varkappa)} c^{(\lambda)} + d^{(\varkappa)} d^{(\lambda)}, \end{cases}$$

wenn wir mit $(\varkappa)$ und (λ) irgend zwei von den Indices $'$, $''$, $'''$, $^{(0)}$ bezeichnen und den Index $^{(0)}$ ganz fortlassen; eine Vorschrift, die auch im Folgenden aufrecht erhalten werden soll.

Der blosse Hinblick auf die Substitutionen (1) und (3) lehrt, dass dieselben in einander übergehen, wenn man die Horizontalreihen der Coëfficienten mit den Verticalreihen und gleichzeitig die Variabeln U_2, U_4, U_6, U_0 respective mit U_1, U_3, U_5, U_7 vertauscht. Dieselbe Vertauschung wird auch in allen Gleichungen zulässig sein, welche aus den Substitutionen hervorgehen. Wir können daher sagen, *dass es erlaubt sei, in allen aus den Substitutionen* (1) *oder* (3) *hervorgehenden Gleichungen folgende gleichzeitige Vertauschungen zu machen:*

$$5. \quad \begin{cases} a', \ a'', \ a'''; \ b'', \ b'''; \ c'''; \ U_2, \ U_4, \ U_6, \ U_0 \\ \text{mit} \\ b, \ c, \ d; \ c', \ d'; \ d''; \ U_1, \ U_3, \ U_5, \ U_7. \end{cases}$$

Durch diese Vertauschungen geht aus dem Gleichungssystem (4) ein anderes hervor, von welchem wir nur zwei Gleichungen wirklich hinschreiben:

$$6. \quad \begin{cases} 1 = aa + a'a' + a''a'' + a'''a''', \\ 0 = ab + a'b' + a''b'' + a'''b''', \end{cases}$$

weil die anderen aus ihnen durch Veränderung der Buchstaben a oder b in b, c, d folgen.

Die Substitutionen (1) ändern sich ebensowenig, wenn man zwei von den Buchstaben a, b, c, d mit einander vertauscht und gleichzeitig die ihnen entsprechenden Variabeln; z. B. a mit b und U_2 mit U_4.

Da dasselbe auch von den vier Indices $'$, $''$, $'''$, $^{(0)}$ gilt, so sprechen wir den Satz aus:

7. *Es ist erlaubt, in allen aus den Substitutionen* (1) *oder* (3) *abgeleiteten Gleichungen irgend zwei von den vier Buchstaben a, b, c, d, oder irgend zwei von den vier Indices* $'$, $''$, $'''$, $^{(0)}$ *mit einander zu vertauschen, wenn man gleichzeitig die ihnen entsprechenden Variabeln vertauscht.*

Diese Regel bedarf jedoch einer Einschränkung auf Grund einer jetzt einzuführenden Bestimmung.

Bezeichnen wir mit Δ die Determinante aus den sechzehn Coëfficienten der Substitutionen (1):

$$8. \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix},$$

multipliciren diese Determinante mit sich selbst und bilden aus dem Product wieder eine Determinante, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (4) und (6) die Einheit. Man hat demnach:

$$\Delta^2 = 1,$$

und daher $\Delta = \pm 1$. Wir werden aber fortan setzen

$$9. \qquad \Delta = +1,$$

worin keine Beschränkung liegt, weil in dem anderen Falle nur einer der acht Variabeln das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben ist, um ihn auf den vorliegenden zurückzuführen.

Die Gleichung (9), welche doch auch aus den Substitutionen (1) hervorgegangen ist, macht wegen der willkürlichen Annahme $\Delta = +1$ eine Ausnahme von der Regel (7), und desshalb auch jede Gleichung, zu deren Bildung die Gleichung (9) verwendet wird. Denn wollte man die Regel (7) auf (9) anwenden, so würde Δ das Vorzeichen ändern. Es bleibt aber die Gleichung (9) ungeändert, wenn man *zwei* mal die Vertauschungen (7) macht. Will man demnach die Gleichung (9) und

alle aus ihr und den Substitutionen hervorgehenden Gleichungen einer gemeinsamen Regel unterwerfen, so muss diese so ausgedrückt werden:

10. *Es ist erlaubt, in allen Gleichungen des Problems eine zweimalige Vertauschung* (7) *zu machen.*

Die Regel (5) gilt immer, weil bei ihrer Anwendung die Determinante Δ sich nicht ändert.

Um die bekannten Formeln des Problems zu vervollständigen, führen wir schliesslich die folgenden ein:

$$11. \qquad a^{(\varkappa)} = \frac{\partial \Delta}{\partial a^{(\varkappa)}}, \quad b^{(\varkappa)} = \frac{\partial \Delta}{\partial b^{(\varkappa)}}, \quad c^{(\varkappa)} = \frac{\partial \Delta}{\partial c^{(\varkappa)}}, \quad d^{(\varkappa)} = \frac{\partial \Delta}{\partial d^{(\varkappa)}}.$$

Man erhält dieselben, wenn man die Gleichungen (1) direct auflöst und unter Berücksichtigung von $\Delta = 1$ die Auflösungen mit den auf einem anderen Wege gefundenen Gleichungen (3) vergleicht.

Dieser Paragraph sollte nur die allgemeinen Eigenschaften der in Rede stehenden Substitutionen vergegenwärtigen. Die dem Falle $n = 4$ eigenthümlichen sind in dem folgenden Paragraphen enthalten.

2.

Es ist ein bekannter Satz aus der Determinanten-Theorie (Crelle's Journal, Bd. 22, S. 302), dass aus

$$R = \Sigma \pm a_0^{(0)} a_1^{(1)} \dots a_n^{(n)}$$

sich ergiebt

$$R \frac{\partial^2 R}{\partial a_p^{(q)} \partial a_r^{(s)}} = \frac{\partial R}{\partial a_p^{(q)}} \frac{\partial R}{\partial a_r^{(s)}} - \frac{\partial R}{\partial a_r^{(q)}} \frac{\partial R}{\partial a_p^{(s)}}.$$

Wenn nun, wie in dem vorliegenden Fall, $R = \Delta = 1$ ist, so hat man

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_p^{(q)} \partial a_r^{(s)}} = \frac{\partial R}{\partial a_p^{(q)}} \frac{\partial R}{\partial a_r^{(s)}} - \frac{\partial R}{\partial a_r^{(q)}} \frac{\partial R}{\partial a_p^{(s)}}.$$

Diese eine Gleichung ist die Quelle eines ganzen Systems von Gleichungen für den angegebenen Fall; um alle diese Gleichungen in einer übersichtlichen Form darzustellen, werden wir die Bezeichnung brauchen:

$$(a^{(\varkappa)} b^{(\lambda)}) \equiv a^{(\varkappa)} b^{(\lambda)} - a^{(\lambda)} b^{(\varkappa)}, \qquad (a^{(\varkappa)} c^{(\lambda)}) \equiv a^{(\varkappa)} c^{(\lambda)} - a^{(\lambda)} c^{(\varkappa)}$$

u. s. w.

Man hat dann unter Berücksichtigung von (11):

$$12.\quad \begin{cases} (a\,b') = (c''\,d'''), & (a\,c') = (b'''\,d''), & (a\,d') = (b''\,c'''), \\ (a\,b'') = (c'''\,d'), & (a\,c'') = (b'\,d'''), & (a\,d'') = (b'''\,c'), \\ (a\,b''') = (c'\,d''), & (a\,c''') = (b''\,d'), & (a\,d''') = (b'\,c''), \\ (a'\,b'') = (c\,d'''), & (a'\,c'') = (b'''\,d), & (a'\,d'') = (b\,c'''), \\ (a'\,b''') = (c''\,d), & (a'\,c''') = (b\,d''), & (a'\,d''') = (b''\,c), \\ (a''\,b''') = (c\,d'), & (a''\,c''') = (b'\,d), & (a''\,d''') = (b\,c'). \end{cases}$$

Von diesen 18 Gleichungen braucht man nur eine einzige abzuleiten; alle andern gehen aus ihr nach dem Principe (10) hervor. Das Princip (7) der einmaligen Vertauschung findet hier keine Anwendung, weil die Gleichungen (12) aus der Gleichung (9) hervorgegangen sind. Will man jedoch durch einmalige Vertauschung aus einer dieser Gleichungen die übrigen herleiten, so hat man nach jeder Vertauschung das Vorzeichen der einen Seite der Gleichung in das entgegengesetzte zu verwandeln.

Die Substitutionen (1) sind Relationen zwischen den vier geraden Variabeln U_2, U_4, U_6, U_0 und einer von den ungeraden Variabeln U_1, U_3, U_5, U_7. Durch Elimination einer geraden Variabeln aus zwei von den Gleichungen (1) erhält man Relationen zwischen drei geraden und zwei ungeraden Variabeln. Von diesen Relationen heben wir nur die drei hervor, welche aus je zweien der drei ersten Gleichungen durch Elimination der Variabeln U_0 hervorgehen. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke mit G_1, G_3, G_5 die Ausdrücke:

$$13.\quad \begin{cases} G_1 \equiv (a'\,d'')\,U_2 + (b'\,d'')\,U_4 + (c'\,d'')\,U_6 - d''\,U_3 + d'\,U_5, \\ G_3 \equiv (a''\,d)\,U_2 + (b''\,d)\,U_4 + (c''\,d)\,U_6 - d\,U_5 + d''\,U_1, \\ G_5 \equiv (a\,d')\,U_2 + (b\,d')\,U_4 + (c\,d')\,U_6 - d'\,U_1 + d\,U_3, \end{cases}$$

so haben wir die gesuchten Relationen:

$$14.\qquad G_1 = 0, \qquad G_3 = 0, \qquad G_5 = 0.$$

Ebenso erhalten wir aus je zweien der drei ersten Gleichungen (3) durch Elimination der Variabeln U_7, wenn wir setzen:

$$15.\quad \begin{cases} G_2 \equiv (b\,c''')\,U_1 + (b'\,c''')\,U_3 + (b''\,c''')\,U_5 - c'''\,U_4 + b'''\,U_6, \\ G_4 \equiv (c\,a''')\,U_1 + (c'\,a''')\,U_3 + (c''\,a''')\,U_5 - a'''\,U_6 + c'''\,U_2, \\ G_6 \equiv (a\,b''')\,U_1 + (a'\,b''')\,U_3 + (a''\,b''')\,U_5 - b'''\,U_2 + a'''\,U_4, \end{cases}$$

die zwischen drei ungeraden und zwei geraden Variabeln bestehenden Relationen:

$$16. \qquad G_2 = 0, \qquad G_4 = 0, \qquad G_6 = 0.$$

Es sind (14) und (16) alle möglichen linearen Relationen zwischen drei geraden und zwei ungeraden oder zwischen drei ungeraden und zwei geraden von den sechs Variabeln $U_1, U_2, \ldots U_6$.

Um die Uebersicht der angegebenen beiden Formelsysteme zu erleichtern, stellen wir ein Princip auf, von welchem auch später Gebrauch gemacht werden soll, und welches sich folgendermassen aussprechen lässt:

Es ist erlaubt, in allen Formeln des Problems ohne Ausnahme folgende gleichzeitige Veränderungen zu machen:

$$17. \quad \begin{cases} a,\ b,\ c,\ d; \quad a',\ b',\ c',\ d'; \quad a'',\ b'',\ c'',\ d''; \quad a''',\ b''',\ c''',\ d''' \\ \textit{in} \\ b',\ c',\ a',\ d'; \quad b'',\ c'',\ a'',\ d''; \quad b,\ c,\ a,\ d; \quad b''',\ c''',\ a''',\ d''', \\ \qquad U_1,\ U_3,\ U_5; \quad U_2,\ U_4,\ U_6; \quad U_0,\ U_7; \\ \qquad \textit{in} \\ \qquad U_3,\ U_5,\ U_1; \quad U_4,\ U_6,\ U_2; \quad U_0,\ U_7. \end{cases}$$

Denn durch diese Veränderungen werden weder die Substitutionen noch die Determinante $\varDelta$ geändert. Gleichzeitig mit diesen Veränderungen gehen aber

$$18. \qquad \begin{cases} G_1,\ G_3,\ G_5; \quad G_2,\ G_4,\ G_6 \\ \text{in} \\ G_3,\ G_5,\ G_1; \quad G_4,\ G_6,\ G_2 \end{cases}$$

über.

Zwischen irgend fünf von den sechs Variabeln $U_1, U_2, \ldots U_6$ existirt nur eine einzige Gleichung. Findet man noch eine zweite lineare Gleichung zwischen denselben fünf Variabeln, so kann sie nur durch einen Factor von der ersten sich unterscheiden; das heisst, die Coëfficienten der Variabeln in der einen Gleichung müssen den entsprechenden Coëfficienten in der anderen Gleichung proportional sein.

Man kann auf diese Weise durch Elimination einer geraden Variabeln aus zwei Gleichungen des Systems (14) eine Gleichung des Systems (16)

herleiten; und ebenso durch Elimination einer ungeraden Variabeln aus zwei Gleichungen des Systems (16) eine Gleichung des Systems (14). Mit anderen Worten: Jedes gerade G wird sich linear ausdrücken lassen durch zwei ungerade G, und ebenso jedes ungerade G durch zwei gerade G. Diese Ausdrücke sind folgende:

$$19. \quad \begin{cases} (a\,d'')\,G_1 + (a'\,d'')\,G_3 \equiv d''\,G_2, \\ (b'd\;)\,G_3 + (b''d\;)\,G_5 \equiv d\;\;G_4, \\ (c''d'\,)\,G_5 + (c\;\,d'\,)\,G_1 \equiv d'\;\,G_6, \end{cases}$$

und:

$$20. \quad \begin{cases} (a\;\,c''')\,G_2 + (b\;\,c''')\,G_4 \equiv c'''\,G_1, \\ (b'\,a''')\,G_4 + (c'\;a''')\,G_6 \equiv a'''\,G_3, \\ (c''\,b''')\,G_6 + (a''\,b''')\,G_2 \equiv b'''\,G_5. \end{cases}$$

Es genügt, von diesen identischen Gleichungen eine, etwa die erste herzuleiten; die anderen ergeben sich aus ihr nach den aufgestellten Principien von selbst. Die letzten beiden Gleichungen (19) gehen aus der ersten durch die Veränderungen (17) und (18) hervor. Aus den identischen Gleichungen (19) ergeben sich die Gleichungen (20) durch die Vertauschungen (5), welche, wie bereits erwähnt, ohne Ausnahme gelten. Denn diese Vertauschungen verlangen, wie aus (13) und (15) ersichtlich ist, die gleichzeitigen Vertauschungen

$$21. \quad \begin{cases} \text{von } G_1,\; G_3,\; G_5 \\ \text{mit } G_2,\; G_4,\; G_6. \end{cases}$$

Es bleibt also nur übrig, die erste identische Gleichung (19) wirklich abzuleiten. Multiplicirt man, um aus den ersten beiden Gleichungen (14) U_2 zu eliminiren, die erste mit $(a d'')$, die zweite mit $(a' d'')$ und addirt, so erhält man:

$$\{(b'\,d'')\,(a d'') + (b''\,d)\,(a'\,d'')\}\,U_4 + \{(c'\,d'')\,(a d'') + (c''\,d)\,(a'\,d'')\}\,U_6$$
$$- d''\,(a d'')\,U_3 + \{d'\,(a d'') - d\,(a'\,d'')\}\,U_5 + d''\,(a'\,d'')\,U_1 = 0.$$

Da diese Gleichung sich von der Gleichung $G_2 = 0$ nur durch einen Factor unterscheiden kann, und da nach (12) $(a'\,d'') = (b\,c''')$ ist, so lehrt der Vergleich der Coëfficienten der Variabeln U_1 in beiden Gleichungen, dass d'' der Factor von G_2 sein muss. Dadurch hat man die erste identische Gleichung (19) wirklich nachgewiesen.

Aus dem Vergleich der Coëfficienten gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichungen (19) und (20) gehen zwei verschiedene Arten von Relationen zwischen den Coëfficienten der Substitutionen hervor.

Eine Relation der ersten Art erhält man, wenn man die Coëfficienten der Variabeln U_5 auf beiden Seiten der ersten identischen Gleichung (19) einander gleich setzt:

$$d'(ad'') - d(a'd'') = d''(b''c'''),$$

welche mit Rücksicht auf (12) in

$$22. \qquad d(a'd'') + d'(a''d) + d''(ad') \equiv 0$$

übergeht. Diese Gleichung, welche von selbst einleuchtet, wenn man für die Determinanten ihre Werthe setzt, repräsentirt ein ganzes System von Gleichungen, da man in ihr die Vertauschungen (7) so oft machen kann, als man will. Eine Relation der zweiten Art erhält man durch Gleichsetzen der Coëfficienten der Variabeln U_6 auf beiden Seiten der ersten identischen Gleichung (19):

$$(c'd'')(ad'') + (c''d)(a'd'') = b'''d''.$$

Will man aus dieser Gleichung eine neue richtige Gleichung ableiten, so hat man in ihr eine zweimalige Vertauschung (7) zu machen. Man bringt sie jedoch mit Zuziehung der Gleichungen (12) auf die Form:

$$23. \qquad (ab''')(ad'') + (a'b''')(a'd'') = b'''d'',$$

in welcher eine einmalige Vertauschung ausreicht. Diese Gleichung bleibt nämlich absolut ungeändert, wenn man die beiden Indices 0 und 1 mit einander vertauscht. Man kann also diese Vertauschung der genannten beiden Indices immer für eine der zwei verlangten Vertauschungen nehmen.

Auch die Gleichung (23) repräsentirt ein ganzes System von Gleichungen, da man in ihr die Vertauschungen (7) beliebig oft wiederholen kann. Die Verificirung derselben mit Hülfe der Formeln des § 1 verlangt einige Rechnung.

Mit dem bisher entwickelten analytischen Apparat ausgerüstet, wenden wir uns nun zu der geometrischen Interpretation der Substitutionen und zu der Erforschung der gegenseitigen Lage der acht Durchschnittspunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung.

3.

Wir gehen aus von der in der Einleitung den acht Variabeln U_0, $U_1, \ldots U_7$ untergelegten Bedeutung, nach welcher die acht Gleichungen:

$$24. \qquad U_0 = 0, \qquad U_1 = 0, \qquad \ldots \qquad U_7 = 0$$

die Gleichungen von irgend acht Punkten darstellen, in welchen sich drei beliebige Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, vorausgesetzt, dass die Substitutionen (1) und (3) die Gleichung (2) zu einer identischen machen.

Um die Substitutionen in eine für die geometrische Interpretation geschickte Form zu bringen, leiten wir aus den drei ersten Gleichungen (1), durch Elimination einer geraden Variabeln aus je zwei Gleichungen, die folgenden ab:

$$\begin{aligned}
(c''d\;)\,U_0 &= c''\,U_1 - (ac'')\,U_2 + (b''c)\,U_4 - c\,U_5,\\
(b'd'')\,U_0 &= (a'b'')\,U_2 - b''\,U_3 + b'\,U_5 - (b'c'')\,U_6,\\
(a\;d'\,)\,U_0 &= a\,U_3 - (ab')\,U_4 + (a'c)\,U_6 - a'\,U_1.
\end{aligned}$$

Ebenso gehen aus den drei ersten Gleichungen (3) die folgenden hervor:

$$\begin{aligned}
(a'b''')\,U_7 &= (ab')\,U_1 - b'\,U_2 + a'\,U_4 - (a'b'')\,U_5,\\
(a'''c\;)\,U_7 &= c\,U_2 - (a'c)\,U_3 + (ac'')\,U_5 - a\,U_6,\\
(b''c''')\,U_7 &= (b'c'')\,U_3 - c''\,U_4 + b''\,U_6 - (b''c)\,U_1.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen nehmen eine übersichtlichere Gestalt an, wenn man folgende Bezeichnungen einführt:

$$25. \quad \begin{cases}
V_1 \equiv c''\,U_1 - (ac'')\,U_2,\\
V_2 \equiv (a'b'')\,U_2 - b''\,U_3,\\
V_3 \equiv a\,U_3 - (ab')\,U_4,\\
V_4 \equiv (b''c)\,U_4 - c\,U_5,\\
V_5 \equiv b'\,U_5 - (b'c'')\,U_6,\\
V_6 \equiv (a'c)\,U_6 - a'\,U_1,
\end{cases}
\qquad
26. \quad \begin{cases}
V^{(1)} \equiv (ab')\,U_1 - b'\,U_2,\\
V^{(2)} \equiv c\,U_2 - (a'c)\,U_3,\\
V^{(3)} \equiv (b'c'')\,U_3 - c''\,U_4,\\
V^{(4)} \equiv a'\,U_4 - (a'b'')\,U_5,\\
V^{(5)} \equiv (ac'')\,U_5 - a\,U_6,\\
V^{(6)} \equiv b''\,U_6 - (b''c)\,U_1.
\end{cases}$$

Diese Bezeichnungen sind so gewählt, dass durch die Vertauschungen (17) sich

$$27.\quad \begin{cases} V_1,\ V_3,\ V_5;\quad V_2,\ V_4,\ V_6;\quad V^{(1)},\ V^{(3)},\ V^{(5)};\quad V^{(2)},\ V^{(4)},\ V^{(6)} \\ \text{in} \\ V_3,\ V_5,\ V_1;\quad V_4,\ V_6,\ V_2;\quad V^{(3)},\ V^{(5)},\ V^{(1)};\quad V^{(4)},\ V^{(6)},\ V^{(2)} \end{cases}$$

verändern. Nach Einführung dieser Bezeichnungen gehen die obigen sechs Gleichungen in die folgenden über:

$$28.\quad \begin{cases} (c''d)\,U_0 = V_1 + V_4, \\ (b'd'')\,U_0 = V_2 + V_5, \\ (ad')\,U_0 = V_3 + V_6, \end{cases} \qquad 29.\quad \begin{cases} (a'b''')\,U_7 = V^{(1)} + V^{(4)}, \\ (a'''c)\,U_7 = V^{(2)} + V^{(5)}, \\ (b''c''')\,U_7 = V^{(3)} + V^{(6)}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich geometrisch interpretiren, wie folgt: Die sechs Punkte im Raume:

$$U_1 = 0,\qquad U_2 = 0,\qquad \ldots\qquad U_6 = 0,$$

deren Lage unbeschränkt ist, kann man, um sie sich zu vergegenwärtigen, als die auf einander folgenden Ecken eines Sechsecks im Raume U betrachten, dessen Seiten nicht in derselben Ebene liegen.

Die Gleichungen:

$$V_1 = 0,\qquad V_2 = 0,\qquad \ldots\qquad V_6 = 0$$

sind auf Grund der Bezeichnungen (25) die Gleichungen der Ecken eines dem Sechseck U in derselben Reihenfolge einbeschriebenen Sechsecks V_*. Ebenso sind nach den Bezeichnungen (26)

$$V^{(1)} = 0,\qquad V^{(2)} = 0,\qquad \ldots\qquad V^{(6)} = 0$$

die Gleichungen der Ecken eines demselben Sechseck U in derselben Reihenfolge einbeschriebenen zweiten Sechsecks V^*. Dadurch sind jedoch die beiden Sechsecke V_* und V^* nicht vollständig definirt. Ihre eigentliche Bedeutung erhalten sie erst durch die geometrische Interpretation der Gleichungen (28) und (29). Denn diese Gleichungen beweisen, dass die Verbindungslinien der gegenüber liegenden Ecken des Sechsecks V_* durch den Punkt $U_0 = 0$, und die Verbindungslinien der gegenüber liegenden Ecken des Sechsecks V^* durch den Punkt $U_7 = 0$ gehen.

Ist demnach das Sechseck U gegeben, zugleich mit dem Punkte $U_0 = 0$, so lassen sich daraus die Ecken des einbeschriebenen Sechsecks V_*

unzweideutig construiren. Denn lässt man von dem Punkte $U_0 = 0$ drei gerade Linien ausgehen, welche die gegenüber liegenden Seiten des Sechsecks U schneiden, so werden die Schnittpunkte auf den gegenüber liegenden Seiten die gegenüber liegenden Ecken des Sechsecks V_* sein.

Ebenso lässt sich das Sechseck V^* construiren, wenn das Sechseck U und der Punkt $U_7 = 0$ gegeben sind.

Aus der Construction dieser beiden Sechsecke V_* und V^* erkennt man, dass sie Brianchon'sche Sechsecke sind, das heisst, dass ihre drei Diagonalen, welche die gegenüber liegenden Ecken eines derselben verbinden, sich in einem und demselben Punkte schneiden. Es haben aber Brianchon'sche Sechsecke die Eigenschaft, dass ihre gegenüber liegenden Seiten sich paarweise schneiden. In dem vorliegenden Falle liest man diese Eigenschaft ohne weiteres ab aus den drei Gleichungen, welche aus (28) durch Elimination von U_0, oder welche aus (29) durch Elimination von U_7 hervorgehen. Sie ergiebt sich aber auch unmittelbar aus der Definition des Brianchon'schen Sechsecks.

Es schneidet hiernach jede gerade Seite jede ungerade Seite des Brianchon'schen Sechsecks; und wenn man die drei geraden Seiten oder die drei ungeraden Seiten des Sechsecks als die Generatrices eines Hyperboloïds nimmt, so liegt das Sechseck auf dem durch dasselbe unzweideutig bestimmten Hyperboloïde.

Von den beiden Brianchon'schen Sechsecken V_* und V^* liegt also jedes auf einem durch dasselbe bestimmten Hyperboloïde H_* und H^*. Dass diese Hyperboloïde nicht verschieden sind, sondern in ein und dasselbe H zusammenfallen, soll in dem folgenden Paragraphen bewiesen werden durch Interpretation einiger noch zu erwähnenden analytischen Formeln.

4.

Da in (25) und (26) mehrmals vier von den zwölf Symbolen V Ausdrücke von dreien der sechs Symbole U sind, so kann man jene drei Symbole U eliminiren und erhält lineare homogene Gleichungen zwischen vier Symbolen V. Diese Elimination giebt mit Zuziehung der Gleichungen (23):

$$30.\quad \begin{cases} \dfrac{(ab')\,V_1 - c''\,V^{(1)}}{(a'''c'')(a'''b')} + \dfrac{(a'c)\,V_2 - b''\,V^{(2)}}{(a'''c)(a'''b'')} = 0, \\[2ex] \dfrac{(b'c'')\,V_3 - a\,V^{(3)}}{(b'''a)(b'''c'')} + \dfrac{(b''a')\,V_4 - c\,V^{(4)}}{(b'''a')(b'''c)} = 0, \\[2ex] \dfrac{(c''a)\,V_5 - b'\,V^{(5)}}{(c'''b')(c'''a)} + \dfrac{(cb'')\,V_6 - a'\,V^{(6)}}{(c'''b'')(c'''a')} = 0, \end{cases}$$

$$31.\quad \begin{cases} \dfrac{c\,V_2 - (a'b'')\,V^{(2)}}{(a'''b'')(a'''c)} + \dfrac{c''\,V_3 - (ab')\,V^{(3)}}{(b'''c'')(b'''a)} = 0, \\[2ex] \dfrac{a'\,V_4 - (b''c)\,V^{(4)}}{(b'''c)(b'''a')} + \dfrac{a\,V_5 - (b'c'')\,V^{(5)}}{(c'''a)(c'''b')} = 0, \\[2ex] \dfrac{b''\,V_6 - (ca')\,V^{(6)}}{(c'''a')(c'''b'')} + \dfrac{b'\,V_1 - (c''a)\,V^{(1)}}{(a'''b')(a'''c'')} = 0. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen reichen zwei hin, um aus ihnen durch die Veränderungen (17) und (27) die übrigen abzuleiten.

Wenn man versucht, noch andere homogene Gleichungen zwischen vier von den zwölf Symbolen V abzuleiten, so wird man auf folgende zwölf Ausdrücke H geführt:

$$32.\quad \begin{cases} H_1 \equiv (a'd'')\,a\,V_2 + (b'd'')\,a''\,V_3 + (ac''')(c'd''')\,V^{(4)} + (a'b'')(c''d')\,V^{(5)}, \\ H_3 \equiv (b''d)\,b'\,V_4 + (c''d)\,b\,V_5 + (b'a''')(a''d''')\,V^{(6)} + (b''c)(ad'')\,V^{(1)}, \\ H_5 \equiv (cd')\,c''\,V_6 + (ad')\,c'\,V_1 + (c''b''')(bd''')\,V^{(2)} + (ca')(b'd)\,V^{(3)}, \end{cases}$$

$$33.\quad \begin{cases} H_2 \equiv (b'c''')(b''c)\,V_3 + (ab'')(b'''c'')\,V_4 + (b'''c'')\,b\,V^{(5)} + (b'''c)\,a\,V^{(6)}, \\ H_4 \equiv (a''c''')(ac')\,V_5 + (b'c)(c'''a)\,V_6 + (c'''a)\,c'\,V^{(1)} + (c'''a')\,b'\,V^{(2)}, \\ H_6 \equiv (ab''')(a'b'')\,V_1 + (a'c'')(a'''b')\,V_2 + (a'''b')\,a''\,V^{(3)} + (a'''b'')\,c''\,V^{(4)}, \end{cases}$$

$$34.\quad \begin{cases} H^{(1)} \equiv (a'd'')(b''c')\,V^{(2)} + (b'd'')(b'c)\,V^{(3)} + (b'd'')\,c'\,V_4 + (c'd'')\,c\,V_5, \\ H^{(3)} \equiv (b''d)(ca'')\,V^{(4)} + (c''d)(c''a')\,V^{(5)} + (c''d)\,a''\,V_6 + (a''d)\,a'\,V_1, \\ H^{(5)} \equiv (cd')(a'b)\,V^{(6)} + (ad')(ab'')\,V^{(1)} + (ad')\,b\,V_2 + (bd')\,b''\,V_3, \end{cases}$$

$$35.\quad \begin{cases} H^{(2)} \equiv (b'''c')\,a'\,V^{(3)} + (c''b''')\,c'\,V^{(4)} + (c''a')(c''b''')\,V_5 + (bc''')(b'c'')\,V_6, \\ H^{(4)} \equiv (c'''a'')\,b''\,V^{(5)} + (ac''')\,a''\,V^{(6)} + (ab'')(ac''')\,V_1 + (c'a''')(c''a)\,V_2, \\ H^{(6)} \equiv (a'''b)\,c\,V^{(1)} + (b'a''')\,b\,V^{(2)} + (b'c)(b'a''')\,V_3 + (a''b''')(ab')\,V_4. \end{cases}$$

Die Uebersicht über diese Bezeichnungen H wird durch die Bemerkung erleichtert, dass durch die Veränderungen (17) und (27) gleichzeitig verändert werden:

$$36. \quad \begin{cases} H_1, \; H_3, \; H_5; \quad H_2, \; H_4, \; H_6; \quad H^{(1)}, \; H^{(3)}, \; H^{(5)}; \quad H^{(2)}, \; H^{(4)}, \; H^{(6)} \\ \text{in} \\ H_3, \; H_5, \; H_1; \quad H_4, \; H_6, \; H_2; \quad H^{(3)}, \; H^{(5)}, \; H^{(1)}; \quad H^{(4)}, \; H^{(6)}, \; H^{(2)}. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Ausdrücke H erhellt aus den folgenden Gleichungen:

$$37. \quad \begin{cases} a(a'b'')G_1 = H_1, \\ b'(b''c)G_3 = H_3, \\ c''(ca')G_5 = H_5, \end{cases} \qquad 38. \quad \begin{cases} a(b''c)G_2 = H_2, \\ b'(ca')G_4 = H_4, \\ c''(a'b'')G_6 = H_6, \end{cases}$$

$$39. \quad \begin{cases} c(b''c')G_1 = H^{(1)}, \\ a'(ca'')G_3 = H^{(3)}, \\ b''(a'b)G_5 = H^{(5)}, \end{cases} \qquad 40. \quad \begin{cases} a'(b''c')G_2 = H^{(2)}, \\ b''(ca'')G_4 = H^{(4)}, \\ c(a'b)G_6 = H^{(6)}, \end{cases}$$

welche auf Grund der Bezeichnungen (13), (15) und (32) bis (35) rücksichtlich der sechs Variabeln $U_1, U_2, \ldots U_6$ zu Identitäten werden.

Es genügt, von jedem dieser vier Gleichungssysteme eine Gleichung zu verificiren; die anderen ergeben sich dann von selbst durch die Veränderungen (17), (18), (27) und (36).

Wenn man in der ersten Gleichung (37) für die G und H die Werthe aus (13) und (32) setzt und für die V die Werthe aus (25) und (26), so sieht man, dass die Coëfficienten von U_2 auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen, gleich wie die Coëfficienten von U_6. Die Coëfficienten von U_3 und U_4 sind ebenfalls respective einander gleich auf Grund des Gleichungssystems (22), welches sich durch (12) noch verändern lässt. Endlich sind auch die Coëfficienten von U_5 auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich auf Grund des Gleichungssystems (23). Ebenso sind nach Ausführung der angegebenen Substitutionen in der ersten Gleichung (38) die Coëfficienten von U_1 und U_3 auf beiden Seiten der Gleichung respective einander gleich. Die Coëfficienten von U_5 und U_6 sind es gleichfalls nach (22), die Coëfficienten von U_4 nach (23) u. s. w.

Da nun die Gleichungen (14) und (16) durch die Substitutionen (1) und (3) zu identischen wurden, so gilt dasselbe nach (37) bis (40) auch von den Gleichungen:

$$41. \qquad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad \ldots \quad H_6 = 0,$$

$$42. \qquad H^{(1)} = 0, \quad H^{(2)} = 0, \quad \ldots \quad H^{(6)} = 0.$$

Jede von den 18 Gleichungen (30), (31), (41) und (42) liefert den Beweis, dass 18 mal vier von den zwölf Ecken V der beiden Brianchon'schen Sechsecke V_* und V^* in einer Ebene liegen. Geht man aber genauer auf die Lage der vier Ecken ein, welche jedesmal in einer Ebene liegen, so ergiebt sich aus den Gleichungen (30) und (31), dass jede Seite des einen Brianchon'schen Sechsecks von der ihr correspondirenden Seite des anderen Brianchon'schen Sechsecks geschnitten wird. Wir drücken diese Eigenschaft so aus:

> Jede gerade resp. ungerade Seite des einen Brianchon'schen Sechsecks wird von der ihr correspondirenden geraden resp. ungeraden Seite des anderen Brianchon'schen Sechsecks geschnitten.

Die geometrische Interpretation der Gleichungen (41) und (42) giebt den Satz:

> Jede gerade resp. ungerade Seite des einen Brianchon'schen Sechsecks wird von jeder ihr nicht correspondirenden geraden resp. ungeraden Seite des anderen Brianchon'schen Sechsecks geschnitten.

Vereinigen wir diese beiden Sätze zu einem, so können wir sagen:

Jede gerade resp. ungerade Seite des einen Brianchon'schen Sechsecks wird von jeder geraden resp. ungeraden Seite des anderen Brianchon'schen Sechsecks geschnitten.

Daraus folgt endlich der Satz:

Die beiden Brianchon'schen Sechsecke V_* und V^* liegen auf demselben Hyperboloïde H,

indem die beiden Hyperboloïde H_* und H^* zusammenfallen.

6.

Wir fassen die in der vorhergehenden Untersuchung gewonnenen geometrischen Resultate zusammen in dem folgenden

Theorem.

Wenn man von den acht Schnittpunkten dreier Oberflächen zweiter Ordnung irgend sechs Punkte als die Ecken eines räumlichen Sechsecks U betrachtet, hierauf von dem siebenten Schnittpunkt der drei Oberflächen aus drei Gerade zieht, welche die gegenüber liegenden Seiten des Sechsecks U paarweise schneiden, und die sechs Schnittpunkte in der Reihenfolge der Seiten des Sechsecks U als die Ecken eines dem Sechseck U einbeschriebenen Sechsecks V_* nimmt; wenn man ebenso von dem achten Schnittpunkt der drei Oberflächen zweiter Ordnung aus drei Gerade zieht, welche die gegenüber liegenden Seiten des Sechsecks U paarweise schneiden, und die sechs Schnittpunkte in derselben Reihenfolge als die Ecken eines zweiten, dem Sechseck U einbeschriebenen Sechsecks V^* nimmt: so liegen die beiden einbeschriebenen Sechsecke V_* und V^* auf einem und demselben Hyperboloide H.

Dieses Theorem lehrt in linearer Weise den achten Schnittpunkt dreier Oberflächen zweiter Ordnung construiren, wenn sieben Schnittpunkte derselben gegeben sind. Denn betrachtet man sechs von den gegebenen sieben Schnittpunkten als die Ecken eines Sechsecks U, so kann man mit Zuziehung des siebenten gegebenen Schnittpunktes nach dem Theorem das Brianchon'sche Sechseck V_* linear construiren. Ist der siebente Schnittpunkt nicht gegeben, sondern statt seiner das Sechseck V_*, so tritt derselbe als der Brianchon'sche Punkt dieses Sechsecks V_* auf, das heisst, als derjenige Punkt, in welchem sich die drei die gegenüber liegenden Ecken verbindenden Diagonalen schneiden. Dasselbe gilt auch von dem achten Durchschnittspunkt der drei Oberflächen zweiter Ordnung und dem Sechseck V^*. Ist nämlich dieses Brianchon'sche Sechseck V^* gegeben, so stellt sich der achte Schnittpunkt auch als der Brianchon'sche Punkt dieses Sechsecks V^* dar.

Man sieht, dass es darauf ankommt, das Sechseck V^* zu construiren, wenn das Sechseck U und das ihm einbeschriebene Sechseck V_* gegeben sind.

Mit dem Sechseck V_* ist zugleich das Hyperboloïd gegeben, auf dem dieses Sechseck, und nach dem Theorem auch das zu construirende Sechseck V^* liegt. Da aber beide Sechsecke V_* und V^* überdies dem gegebenen Sechseck U einbeschrieben sind, und da jede Gerade, die nicht ganz auf dem Hyperboloïd liegt, dieses in zwei Punkten schneidet, so leuchtet ein, dass die Ecken des ersten Sechsecks V_* die einen Schnittpunkte, die Ecken des zweiten Sechsecks V_* die anderen Schnittpunkte der Seiten des Sechsecks U mit dem Hyperboloïde sein müssen.

Ist also das Sechseck U gegeben, ferner das Sechseck V_*, zugleich mit dem Hyperboloïd H, auf dem es liegt, so ergeben sich die Ecken des Sechsecks V^* als die zweiten Schnittpunkte der Seiten von U mit H. Die sich hieraus ergebende Construction des Sechsecks V^* ist nicht linear, weil sie noch des Hyperboloïdes bedarf. Man braucht aber in der That zur Construction das Hyperboloïd nicht. Denn man weiss, dass die Seite $V^{(1)}V^{(2)}$ des Sechsecks V^* — wir nennen sie eine *ungerade* Seite des Sechsecks — in der Ebene liegt, welche durch die drei Ecken U_1, U_2, U_3 des gegebenen Sechsecks U geht. Man weiss ferner, dass jene ungerade Seite des Sechsecks V^* geschnitten wird von jeder ungeraden Seite V_3V_4 und V_5V_6 des Sechsecks V_*. Verbindet man daher diejenigen beiden Punkte, in welchen die genannten ungeraden Seiten des Sechsecks V_* die durch U_1, U_2, U_3 gelegte Ebene schneiden, so hat man in der Verbindungslinie die Seite $V^{(1)}V^{(2)}$ des Sechsecks V^*. In ähnlicher Weise construirt man die anderen Seiten des Sechsecks V^*, dessen Brianchon'scher Punkt eben der gesuchte achte Durchschnittspunkt der drei Oberflächen zweiter Ordnung ist.

Anhang.

I.

Anmerkungen zu den Abhandlungen.

1.

Seite 7, Fussnote. In dem Abdruck im Journal für die reine und angewandte Mathematik ist das Citat falsch. Es ist hier berichtigt.

Seite 8. Der Satz, dass zwei Systeme von conjugirten Durchmessern auf einem Kegel liegen, ist nach Hesse[1]) auch von Chasles gegeben (Journ. de Math. p. Liouville, Bd. 3 (1838), Seite 398 Fussnote).

Seite 8, Gl. 12. Auf eine solche Bedingung zwischen den Coëfficienten in den Gleichungen zweier Kegelschnitte kommt Hesse zurück in der unter Nr. 22 Seite 297 abgedruckten Abhandlung.

Am Ende des Abdrucks im Journal für reine und angewandte Mathematik stand: „Fortsetzung folgt". Diese Bemerkung wurde hier weggelassen, weil die Fortsetzung nie erschienen ist. Im Nachlass fand sich aber eine zum grössten Theile druckfertige Ausarbeitung, welche die Fortsetzung der vorliegenden Arbeit bildet, und die unter Nr. 1 des Nachlasses in dieser Ausgabe abgedruckt ist[2]).

L.

2.

In dieser Abhandlung beschäftigt sich Hesse zum ersten Male mit der Aufgabe, aus 7 von den 8 Schnittpunkten dreier Flächen zweiter Ordnung den achten linear zu construiren. Er ist noch öfter auf diese Aufgabe zurückgekommen (in den Abhandlungen Nr. 4, 6, 41 und Nachlass Nr. 4 und 5 dieser Ausgabe), die auch Gegenstand der Forschung einer grossen Reihe von anderen Mathematikern geworden ist.

---

1) Manuscr. III, 1, 1836/37. (Diese und die im folgenden aufgeführten Nummern beziehen sich auf die im Besitz des Mathematischen Instituts der Technischen Hochschule zu München befindlichen Manuscripte Hesse's, deren Verzeichniss am Schlusse dieses Bandes gegeben ist.)

2) Manuscr. I, 19 und Diarium 1850/51 (Manuscr. III, 8).

Seite 31. Das Theorema 2 rührt von Chasles her und findet sich in dessen „Mémoire sur les lignes conjointes dans les coniques“ (Journ. de Math. p. Liouville, Bd. 3 (1838), Seite 396).

Seite 35. Theorema 6 ist von Brianchon gegeben („Mémoire sur les lignes du second ordre“. Paris 1817. Seite 35).

Seite 37. Theorema 8 wurde von Lamé gefunden („Examen des différentes méthodes“. Paris 1818. Seite 38).

Seite 41. Lemma. Einen anderen Beweis giebt Hesse auf S. 159 dieser Ausgabe. Der Satz findet sich im Diarium von 1837/44[1]) am 13. December 1838 eingetragen.

L.

3.

Einen Auszug aus dieser Note unter dem Titel „Abstract of a Memoir by Dr. Hesse etc.“ hat Cayley in Cambr. a. Dubl. Math. J., Bd. 4 (1849), Seite 44 (Math. Papers, Bd. I, Nr. 73) veröffentlicht.

Seite 51, § 2. Dieser Satz wurde von Bobillier gegeben („Recherches sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques“. Annales de Math. (Gergonne), Bd. 18 (1828), Seite 268).

Seite 53. Die Benennung „zugeordnete Pole“ wurde von Steiner in: „Systematische Entwickelung etc.“, I. Theil (1832), Seite 163/4 (Werke Bd. I, Seite 350) vorgeschlagen.

L.

4.

Seite 60. Sätze von Brianchon und Steiner. Vgl. Brianchon: „Mémoire sur les surfaces courbes du second degré“. Journ. de l'École polytechn. Cahier 13, Bd. 6, Seite 301 und Steiner: „Théorèmes à démontrer et problêmes à résoudre“. Annales de Math. (Gergonne), Band 18 (1828), Seite 339/40 (Werke, Band I, Seite 224) und „Systematische Entwickelung“, Seite 211 (Werke, Bd. I, Seite 450/1).

Zu den Abhn. 3 u. 4: Vgl. auch Plücker im Journ. f. r. u. a. Math., Bd. 24, S. 283, Anmerkung.

L.

5.

Zu § 3, Seite 64 bemerkt Hesse in einem Manuscript[2]): „Durch diese Substitutionen wird die gegebene Differentialgleichung (2) eigentlich in zwei verwandelt. Die eine ist die Gleichung (3), die andere ist die Gleichung

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + \cdots + y_n \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0“.$$

L.

1) Manuscr. III, 2. Weiterhin mit D. 1837/44 bezeichnet.

2) Manuscr. I, 3.

6.

Seite 73, Fussnote 2, Zeile 8 v. u. dürfte ein Druckfehler vorliegen, indem entweder statt „nicht lineär“ zu lesen ist „nur lineär“, oder „wenn nicht“ statt „wenn auch“. Denn eine lineäre Construction des vierten Schnittpunktes zweier Kegelschnitte, wenn die drei andern Schnittpunkte gegeben sind, findet sich nicht nur z. B. bei Staudt, Geometrie der Lage (1847), Seite 168, Nr. 292, sondern auch Hesse selbst giebt in einem Diarium von 1850/51[1]) die folgende Construction:

„Wenn die drei Schnittpunkte zweier Kegelschnitte und von jedem Kegelschnitte noch zwei Punkte ab, $\alpha\beta$ gegeben sind, so können wir annehmen, dass die letzteren 4 gegebenen Punkte in ein und derselben geraden Linie liegen. Denn wir können mit Hilfe des Pascal'schen Satzes den allgemeinen Fall immer auf diesen zurückführen.

Nun schneidet jeder Kegelschnitt, welcher durch die 4 Punkte hindurchgeht, in denen sich die beiden Kegelschnitte schneiden, die gerade Linie, in der die 4 Punkte ab, $\alpha\beta$ liegen, in zwei Punkten AB, welche mit den genannten 4 anderen in einer Involution sich befinden. Von diesen Punkten ist aber einer gegeben, wenn der Kegelschnitt ein Linienpaar ist. Es kann mithin der andere, mithin das ganze Linienpaar construirt werden. Auf diese Weise können die drei Linienpaare construirt werden, welche durch die 4 Schnittpunkte der Kegelschnitte hindurchgehen. Mithin auch der vierte Schnittpunkt.“

L.

7.

Die hier gegebene Eliminationsmethode ist die sog. Bézout-Sylvester'sche. Man vgl. Nr. 8, S. 90, Z. 2—8.

Seite 86. Die Abhandlung von Euler ist betitelt: „Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper“, und steht in Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres. Année 1748, Tom. IV, Berlin 1750, Seite 234.

Die Darstellung von Hesse stimmt überein mit der von Sylvester in dem Aufsatze: „On Elimination“ (Philos. Magazine, Band 17 (1840), Seite 379—380) gegebenen.

L.

8.

Diese vom Januar 1844 datirte Abhandlung ist nach einem Diarium Hesse's vom Jahre 1844/45[2]) am 14. Mai 1844 an das Crelle'sche Journal abgeschickt worden, und zwar auf Andrängen Jacobi's vor Fertigstellung des anschliessenden Theils, Nr. 9 dieser Ausgabe; der letztere ging am 1. Juni 1844 ab.

---

1) Manuscr. III, 8. Weiterhin mit D. 1850/51 bezeichnet.

2) Manuscr. III, 5. Weiterhin mit D. 1844/45 bezeichnet.

Seite 94, Z. 1—7. Auf die Schwierigkeiten, die sich anlässlich der hier gegebenen Entwicklungen Hesse's ergeben, hat Schläfli aufmerksam gemacht in § 4 seiner Arbeit: „Ueber die Resultante eines Systems mehrerer algebraischen Gleichungen". Denkschriften der Math.-Naturw. Classe der Kaiserl. Akad. der Wissenschaften, Bd. IV, Wien 1852. Man vgl. hierzu die weiterführenden Arbeiten von Brill in den Göttinger Nachrichten 1893, S. 757—762 und von Junker in den Math. Annalen, Bd. 43, S. 225 und Bd. 45, S. 1.

Seite 99, Z. 3 v. u. Deutlicher hätte Hesse gesagt: worin nach der auf S. 96, Z. 1—7 gegebenen Definition R gleich der Determinante zehnten Grades ist, welche man aus den Coëfficienten der Grössen $p_{\varkappa\lambda\mu}$ bilden kann.

Seite 99, Z. 13—19. In einem der Technischen Hochschule zu München gehörigen Manuskripte Hesse's[1]) ist auf die Bestimmung der $A_{\varkappa\lambda\mu}$ näher eingegangen. Diese Abhandlung ist offenbar eine frühere Bearbeitung der hier veröffentlichten Nr. 8 und enthält in Folge eines Rechenfehlers im zweiten Theile falsche Ergebnisse. Jedoch ist der darin eingeschlagene Weg vollständig richtig und im Anschlusse an die hier gegebene Bezeichnung im Wesentlichen der folgende.

Ersetzt man in (25) links die Resultante R durch eine beliebige Grösse P, in (26) die Nullen links beziehungsweise durch beliebige Grössen $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}$; $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}$; $\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}$ und nennt die Unbekannten $\varrho_{\varkappa\lambda\mu}$ (anstatt $p_{\varkappa\lambda\mu}$), so entsteht

$$(\overline{25}) \qquad P = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu},$$

$$(\overline{26}) \qquad \begin{array}{lll} \alpha_1^{(1)} = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda 1} a_{\varkappa\lambda}^{(1)}; & \alpha_1^{(2)} = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda 1} a_{\varkappa\lambda}^{(2)}; & \alpha_1^{(3)} = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda 1} a_{\varkappa\lambda}^{(3)}; \\ \alpha_2^{(1)} = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda 2} a_{\varkappa\lambda}^{(1)}; & \alpha_2^{(2)} = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda 2} a_{\varkappa\lambda}^{(2)}; & \alpha_2^{(3)} = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda 2} a_{\varkappa\lambda}^{(3)}; \\ \alpha_3^{(1)} = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda 3} a_{\varkappa\lambda}^{(1)}; & \alpha_3^{(2)} = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda 3} a_{\varkappa\lambda}^{(2)}; & \alpha_3^{(3)} = \Sigma \varrho_{\varkappa\lambda 3} a_{\varkappa\lambda}^{(3)}. \end{array}$$

Durch die Annahmen

$$P = 0, \qquad \alpha_1^{(1)} = Rx_1, \qquad \alpha_2^{(1)} = Rx_2, \qquad \alpha_3^{(1)} = Rx_3,$$
$$\alpha_\varkappa^{(2)} = \alpha_\varkappa^{(3)} = 0 \ (\varkappa = 1, 2, 3)$$

geben die $\varrho_{\varkappa\lambda\mu}$ nach (21)—(24) in die $A_{\varkappa\lambda\mu}^{(1)}$ über. Analog werden die $\varrho_{\varkappa\lambda\mu}$ mit den $A_{\varkappa\lambda\mu}^{(2)}$ identisch, wenn man $\alpha_1^{(2)} = Rx_1$, $\alpha_2^{(2)} = Rx_2$, $\alpha_3^{(2)} = Rx_3$ und $P = 0$, $\alpha_\varkappa^{(1)} = \alpha_\varkappa^{(3)} = 0$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ setzt, etc.

Da die Determinante, gebildet aus den Coëfficienten der $\varrho_{\varkappa\lambda\mu}$ in $\overline{25}$ und $\overline{26}$, mit R übereinstimmt, so hebt sich bei der Auflösung nach den $\varrho_{\varkappa\lambda\mu}$ die Resultante R beiderseits weg, und die $A_{\varkappa\lambda\mu}^{(1)}, A_{\varkappa\lambda\mu}^{(2)}, A_{\varkappa\lambda\mu}^{(3)}$ werden lineare homogene Functionen der x_1, x_2, x_3, wobei die Coëfficienten passend ausgesuchte Subdeterminanten erster

1) Manuscr. I, 6.

Ordnung der Determinante R des Systemes sind. Während diese Bestimmung der $A^{(1)}_{\varkappa\lambda\mu}$, $A^{(2)}_{\varkappa\lambda\mu}$, $A^{(3)}_{\varkappa\lambda\mu}$ an die Definition von R durch eine Determinante zehnten Grades anknüpft, hat Hesse noch eine zweite Berechnung dieser $A_{\varkappa\lambda\mu}$ in Angriff genommen, welche an die Subdeterminanten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ und $q^{(1)}_{\varkappa\lambda}$, $q^{(2)}_{\varkappa\lambda}$, $q^{(3)}_{\varkappa\lambda}$ des Systemes (33) sich anschliesst und dadurch einen Zusammenhang zwischen beiden Arten von Subdeterminanten herstellt.

Ersetzt man nämlich in (33) $x_\varkappa x_\lambda$ durch $A^{(1)}_{\varkappa\lambda\nu}$ ($\nu = 1, 2$ oder 3), so gehen nach (22)—(24) die Grössen f_1, f_2, f_3 resp. über in Rx_ν, 0, 0, während unter Einführung der Bezeichnungen $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1^{(1)}} = U_1^{(1)}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1^{(2)}} = U_1^{(2)}$ etc. [cfr. (28)] die φ_1, φ_2, φ_3 bezw. mit $2R\frac{\partial U_1^{(\nu)}}{\partial x_1}$, $2R\frac{\partial U_1^{(\nu)}}{\partial x_2}$, $2R\frac{\partial U_1^{(\nu)}}{\partial x_3}$ identisch werden; wie man sofort sieht, wenn man in (30) die verschiedenen Potenzen und Producte $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ durchgehends durch die $A^{(1)}_{\varkappa\lambda\mu}$ ersetzt und (21)—(24) berücksichtigt.

Man erhält so schliesslich

$$A^{(1)}_{\varkappa\lambda\nu} = q^{(1)}_{\varkappa\lambda}x_\nu + 2p_{\varkappa\lambda 1}\frac{\partial U_1^{(\nu)}}{\partial x_1} + 2p_{\varkappa\lambda 2}\frac{\partial U_1^{(\nu)}}{\partial x_2} + 2p_{\varkappa\lambda 3}\frac{\partial U_1^{(\nu)}}{\partial x_3}.$$

Analog wird:

$$A^{(2)}_{\varkappa\lambda\nu} = q^{(2)}_{\varkappa\lambda}x_\nu + 2p_{\varkappa\lambda 1}\frac{\partial U_2^{(\nu)}}{\partial x_1} + 2p_{\varkappa\lambda 2}\frac{\partial U_2^{(\nu)}}{\partial x_2} + 2p_{\varkappa\lambda 3}\frac{\partial U_2^{(\nu)}}{\partial x_3},$$

$$A^{(3)}_{\varkappa\lambda\nu} = q^{(3)}_{\varkappa\lambda}x_\nu + 2p_{\varkappa\lambda 1}\frac{\partial U_3^{(\nu)}}{\partial x_1} + 2p_{\varkappa\lambda 2}\frac{\partial U_3^{(\nu)}}{\partial x_2} + 2p_{\varkappa\lambda 3}\frac{\partial U_3^{(\nu)}}{\partial x_3}.$$

Ueber eine schöne Anwendung der Transformation Hesse's in (17) vergl. man Aronhold: Crelle's Journal, Bd. 61, S. 144—145.

Seite 107, Z. 9—5 v. u. Um diese Folgerung, die Grundlage für den fundamentalen Lehrsatz 5 auf S. 109, zu beweisen, muss noch gezeigt werden, dass nach Berechnung der $p_{\varkappa\lambda\mu}$ aus den Gleichungen (26*) und der Gleichung (25) von den zehn Grössen $b_{\varkappa\lambda\mu}$ neun vollständig bestimmt sind, sobald eine passende derselben fixirt ist, oder, was das Gleiche, dass die Verhältnisse der $a_{\varkappa\lambda\mu}$ in (26*) bestimmt sind, wenn man die $a_{\varkappa\lambda\mu}$ als die Unbekannten, und die $p_{\varkappa\lambda\mu}$ aus (26*) und (25) als berechnet ansieht (cfr. Aronhold in Crelle's Journal, Bd. 62, S. 295—296).

Man kann dies für den speciellen Fall der „canonischen" Form Hesse's:

$$f = a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6b\,x_1x_2x_3$$

(cfr. Aufgabe 2, S. 115 dieser Ausgabe) erweisen.

Sind $\varkappa$, λ, μ irgend 3 Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, so werden die neun Gleichungen (26*) nunmehr:

$$ap_{\varkappa 11} + 2bp_{\varkappa 23} = 0, \qquad ap_{\lambda 22} + 2bp_{\lambda 31} = 0, \qquad ap_{\mu 33} + 2bp_{\mu 21} = 0.$$

Für $\varkappa = 2$, $\lambda = 3$, $\mu = 1$ entsteht:

$$a p_{211} = -2 b p_{223}, \qquad a p_{322} = -2 b p_{331}, \qquad a p_{133} = -2 b p_{121}$$

und hieraus durch Multiplication

$$a^3 p_{211} p_{322} p_{133} = -8 b^3 p_{223} p_{331} p_{112} \text{ oder } (a^3 + 8 b^3) p_{211} p_{322} p_{331} = 0.$$

Setzt man $a(a^3 + 8 b^3)$ verschieden von 0 voraus, so ergiebt sich:

$$p_{211} = p_{322} = p_{133} = 0.$$

Ebenso erhält man für $\varkappa = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$:

$$p_{311} = p_{122} = p_{233} = 0,$$

während die Annahmen $\varkappa = 1$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$ ergeben:

$$a p_{111} = a p_{222} = a p_{333} = -2 b p_{123}$$

oder:

$$p_{111} = p_{222} = p_{333} = -2 \sigma b, \quad p_{123} = \sigma a,$$

worin der Factor σ (nach Berechnung von R) aus der Gleichung zu entnehmen ist:

$$\tfrac{1}{3} R = p_{111} b_{111} + 2 p_{123} b_{123} \,[\text{cfr. } (31)] = \{2 \cdot 6^3 b \cdot a b^2 + 2 a \cdot 6^2 (a^3 + 2 b^3)\} \sigma \,[\text{cfr. } (55)]$$
$$= 2 \cdot 6^2 a (a^3 + 8 b^3) \sigma.$$

Nach den Seite 104—106 gegebenen Entwicklungen Hesse's ist $\frac{1}{3} R$ gleich der Determinante sechsten Grades, gebildet aus den Coëfficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ und $b_{\varkappa\lambda\mu}$ der sechs Gleichungen (32*). Setzt man hierin:

$$a_{111} = a_{222} = a_{333} = a, \qquad a_{123} = b;$$
$$b_{111} = b_{222} = b_{333} = -6^3 b^2 a, \qquad b_{123} = 6^2 (a^3 + 2 b^3)$$

[cfr. Gleichung (55)], und für die übrigen $a_{\varkappa\lambda\mu}$, sowie $b_{\varkappa\lambda\mu}$ lauter Nullen, so kann man R leicht in eine Determinante transformiren, in welcher alle Elemente rechts von der Diagonale verschwinden; es genügt hierzu, die Elemente der ersten (resp. zweiten oder dritten) Verticalreihe mit $\frac{2b}{a}$ zu multipliciren und von den entsprechenden Elementen der vierten (resp. fünften oder sechsten) Verticalreihe abzuziehen. Man findet so $\frac{1}{3} R$ gleich dem Product der Diagonalglieder der transformirten Determinante, d. h.

$$R = 4 \cdot 6^7 a^3 (a^3 + 8 b^3)^3,$$

und schliesslich:

$$\sigma = 4 \cdot 6^4 a^2 (a^3 + 8 b^3)^2.$$

Ersetzt man in den nunmehr berechneten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ die $a_{\varkappa\lambda\mu}$ durch die $p_{\varkappa\lambda\mu}$, d. h. ersetzt man a und b durch $-2\sigma \cdot b$ und $\sigma \cdot a$, und nennt die so entstehenden Grössen $P_{\varkappa\lambda\mu}$, so wird:

$$P_{111} = P_{222} = P_{333} = a\,C, \qquad P_{123} = b\,C,$$

worin C, abgesehen von einem Zahlenfactor, das Product

$$\{a^3 (a^3 + 8\,b^3)\}^6 \,.\, \{b\,(a^3 - b^3)\}^2$$

bedeutet (cfr. Aronhold: Crelle's Journal, Bd. 55, S. 191, Formel VII, und Bd. 69, S. 185—189).

Seite 108, Z. 4—5. Hierzu hatte Hesse handschriftlich beigefügt, dass das System (36) auch für Functionen $n$ter Ordnung besteht.

Seite 111, Z. 12. Im Originaltext stand: „Diese wird aber $= \frac{m^3 R}{3^6}$“. Hierdurch war eine Anzahl Zeichenänderungen bedingt.

Seite 113, Aufgabe 1. Dass Hesse über die Tragweite dieser und analoger Aufgaben sich vollständig klar war, zeigt folgende merkwürdige Stelle vom 1. December 1844, D. 1844/45, S. 115: „Man hat sich wohl damit beschäftigt, eine gegebene irrationale Gleichung rational zu machen, aber, so viel ich weiss, nicht mit der umgekehrten Aufgabe, eine gegebene rationale Gleichung auf eine bestimmte irrationale Form zu bringen. Dieses ist im Speciellen die Aufgabe der Doppeltangenten.“

Im Anschlusse an diese Aufgabe 1 hat Hesse im D. 1844/45, S. 118 ohne Beweis auch den Satz ausgesprochen: „Je drei homogene Functionen des zweiten Grades von drei Variabeln lassen sich durch die partiellen ersten Differentialquotienten einer homogenen Function dritten Grades von denselben Variabeln ausdrücken. Es gibt drei verschiedene Functionen dritter Ordnung dieser Art.“

Offenbar hat bei diesem Theoreme Hesse die drei ternären cubischen Formen im Sinn, für deren jede die Hesse'sche Determinante $\varDelta$ gleich der („Jacobi'schen“) Determinante δ der drei gegebenen Functionen zweiten Grades ist. Die Sätze Aronhold's im 39. Bande des Crelle'schen Journals, S. 158—159 zeigen nämlich mit Zuhilfenahme der Untersuchungen von Gundelfinger in Band 80 desselben Journals (S. 73 u. ff.) und bei Anwendung der an letzterem Orte S. 73—75 gegebenen Definitionen, dass die eine homogene Function dritten Grades: $3\,\varDelta(\delta) + t\,.\,\delta$ rational ist und auf die typische Darstellung Hermite's führt, welche letztere nach einer Stelle im Diarium 1845/47,[1]) S. 71 Hesse gleichfalls bekannt war. Da die in Crelle's Journal Bd. 80, S. 74 definirte Form σ eine Combinante der drei gegebenen quadratischen Formen ist, so kann nach der l. c. S. 78 gegebenen Beweisführung der Satz Hesse's sich nur auf diese rationale Function $3\,\varDelta(\delta) + t\,\delta$ beziehen.

Die beiden anderen cubischen Functionen, deren Hesse'sche Determinante $\varDelta$ (bis auf einen constanten Factor) mit δ identisch, sind übrigens: $\varDelta(\delta) + a\,\delta$, wobei:

$$a^2 + \frac{t}{3}\,a + \left(\frac{s}{24} - \frac{2}{9}\,t^2\right) = 0.$$

1) Manuscr. III, 6.

Die Discriminante dieser Gleichung zweiten Grades ist bis auf einen Zahlenfactor gleich $S(\delta)$. An anderer Stelle soll auseinander gesetzt werden, in welchem Zusammenhang diese beiden Curven $\varDelta(\delta) + a\delta = 0$ mit den Untersuchungen des Herrn Rosanes in Bd. XVII der Math. Annalen S.21—30 stehen.

Seite 114, Gleichung 52. Die Function φ wird nach Vorschlag Sylvester's (Cambr. und Dubl. Math. J. VI, p. 186 und Philos. Transactions of the R. S., Bd. 143, S. 545) heute allgemein als die Hesse'sche Determinante („Hessian") der Function f bezeichnet. Die Covarianteneigenschaft der Function φ hatte für eine binäre cubische Form f schon Eisenstein ohne Beweis in Crelle's Journal Bd. 27, S. 320 ausgesprochen.

Dass im Falle von drei Veränderlichen die Curve $\varphi = 0$ durch die Wendepunkte der Curve $f = 0$ gehe (S. 131 dieser Ausgabe, Lehrsatz 9 mit darauffolgender Regel), dürfte Hesse wohl aus der von Plücker bestimmten Zahl der Wendepunkte (Syst. d. anal. Geom., 1835, Nr. 298) und in Verallgemeinerung der analytischen Bedingung für das Zerfallen eines Kegelschnitts in ein Geradenpaar errathen haben. Der erste Beweis Hesse's findet sich im Diarium von 1837/44[1]), S. 209 (Mai 1842). Jedenfalls hat Hesse aus der Regel des Lehrsatzes 9 (diese Ausgabe S. 131) und aus der (vermittelst der Tabelle Plücker's gefundenen)[2]) Existenz von vier Wendepunktsdreiseiten auf die Lehrsätze 6 und 8, S. 113 und 117 geschlossen, ausgehend von der selbstverständlichen Anschauung, dass die Hesse'sche Curve eines Dreiseits mit diesem Dreiseit zusammenfalle.

Seite 115, Aufgabe 2. Hesse ist zu dieser „canonischen Form" wohl im September 1843 durch den Versuch gekommen, die Entwicklungen Plücker's im „System der Geometrie", 1835, Nr. 320—325 strenger zu begründen, speciell den Satz Plücker's, dass die Gleichung jeder Curve dritter Ordnung durch passende Zugrundelegung eines Coordinatendreiecks $X_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ in der Form dargestellt werden könne: $X_1 X_2 X_3 - \mu (X_1 + X_2 + X_3)^3 = 0$[3]) $(\mu = \text{const.})$. In dem Manuscript I, 6 hat Hesse folgenden Weg zur Ableitung der canonischen Form angegeben:

Legt man als Coordinatendreieck zu Grunde: die Tangenten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in zwei Wendepunkten und als dritte Seite $x_3 = 0$ die Verbindungslinie der beiden Wendepunkte, so kann die Gleichung der Curve nur von der Form sein:

$$x_1 x_2 (a x_1 + b x_2 + c x_3) + d x_3^3 = 0.$$

Hieraus folgert zunächst Hesse in aller Strenge, dass jede Gerade, welche zwei Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung verbindet, auch noch durch einen dritten Wendepunkt derselben gehe (cfr. Anm. zu S. 150 d. Ausg.), und findet, in Ergänzung der Tabelle Plücker's, die Existenz der vier Wendepunktsdreiseite. — Legt man ein

1) Manuscr. III, 2.

2) Man vergleiche hierzu die (für die Bescheidenheit Hesse's charakteristische) Bemerkung auf S. 134 dieser Ausgabe, Z. 10—9 v. u.

3) Die Entwicklungen Plücker's in Nr. 325 sind nur bei veränderter Bezeichnungsweise richtig.

solches: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ zu Grunde, so ergiebt sich durch rein geometrische Betrachtung, dass durch die neun Schnittpunkte der zwei Tripel von Geraden: $f(0, -y_2, y_3) = 0$, $f(y_1, 0, -y_3) = 0$ auch das Tripel $f(-y_1, y_2, 0) = 0$ hindurchgeht (vgl. S. 215, Satz 5 d. Ausg.), dass also eine Identität der Form besteht:

$$\varkappa f(0, -y_2, y_3) + \lambda f(y_1, 0, -y_3) + \mu f(-y_1, y_2, 0) = 0.$$

Hieraus folgt $\varkappa = \lambda = \mu$, und im Anschluss hieran sofort die „canonische Form“:

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Offenbar hat Hesse von einer Veröffentlichung dieses fast vollständig druckfertigen Manuscriptes I, 6 abgesehen, da er die geometrische Anschauung für das Imaginäre nicht als bindend erachtete.

Eine strenge Ableitung ergiebt sich übrigens mit Rücksicht auf die Identität

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A + B + C)(A + k'B + k''C)(A + k''B + k'C)$$

(vgl. die Bezeichnung S. 121, Zeile 9 v. u.) auf folgendem Weg.

Die oben bewiesene Gleichung

$$x_1 x_2 (a x_1 + b x_2 + c x_3) + d x_3^3 = 0$$

geht durch die Substitutionen

$$-ax_1 = cX_1, \qquad -bx_2 = cX_2, \qquad ax_1 + bx_2 + cx_3 = cX_3$$

über in die Plücker'sche Form

$$X_1 X_2 X_3 - \mu (X_1 + X_2 + X_3)^3 = 0, \qquad \text{wo } \mu = -\frac{abd}{c^3}.$$

Natürlich ist bei dieser Substitution angenommen, dass keine der zwei Grössen a, b verschwinde, da z. B. für $a = 0$ der Punkt ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$) ein Doppelpunkt wäre. Für $c = 0$ liesse sich das erste Glied auf der linken Seite als Summe zweier Cuben, also der ganze linke Theil als Summe dreier Cuben darstellen.

Setzt man im allgemeinen Fall

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &= Y_1, & \text{oder aufgelöst } 3X_1 &= Y_1 + Y_2 + Y_3, \\ X_1 + k'X_2 + k''X_3 &= Y_2, & 3X_2 &= Y_1 + k''Y_2 + k'Y_3, \\ X_1 + k''X_2 + k'X_3 &= Y_3, & 3X_3 &= Y_1 + k'Y_2 + k''Y_3, \end{aligned}$$

so ergiebt sich aus der obigen Plücker'schen Gleichung die folgende:

$$Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 - 3Y_1 Y_2 Y_3 - 27\mu Y_1^3 = 0,$$

und daraus durch Abänderung der Constanten in Y_1 die Hesse'sche canonische Form.

Dass Hesse wahrscheinlich diese Ableitung gekannt hat, zeigt ein Briefentwurf an Bessel im Diarium von 1837/44 vom 19. Oktober 1843, wonach Hesse um jene Zeit auf Anregung Bessel's ein merkwürdiges, zuerst von Jacobi (Crelle's Journal

Bd. 15, S. 224; Werke, herausg. v. Weierstrass, VI, S. 142) erwähntes System linearer Gleichungen mit vier Unbekannten behandelte und im analogen Fall bei drei Unbekannten

$$Ax + By + Cz = m, \qquad Bx + Cy + Az = n, \qquad Cx + Ay + Bz = p$$

die Zerlegung von $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$ in die obigen conjugirten linearen Factoren fand. Allerdings bleibt es räthselhaft, warum Hesse diese wohl einfachste Ableitung nicht veröffentlichte. Auf die Lücken, welche die Ableitung Hesse's auf S. 115 dieser Ausgabe darbietet, hat schon Aronhold in Crelle's Journal, Bd. 39, S. 144/145 hingewiesen.

Seite 117, Z. 14—17. Dass R, gebildet für $df + \delta\varphi$, gleich $R \cdot (D\delta - \varDelta d)^3$ ist, lässt sich leicht direct erweisen. Es ist $R_{df+\delta\varphi}$ gleich einer Determinante R' sechsten Grades, die aus der Determinante R des Systems (32*) hervorgeht, wenn man die $a_{\varkappa\lambda\mu}$ durch $da_{\varkappa\lambda\mu} + \delta b_{\varkappa\lambda\mu}$ und $b_{\varkappa\lambda\mu}$ durch $Da_{\varkappa\lambda\mu} + \varDelta b_{\varkappa\lambda\mu}$ ersetzt. Multiplicirt man in R' die Elemente der ersten, zweiten, dritten Horizontalreihe mit $\frac{D}{d}$ und zieht dieselben bezw. von den Elementen der vierten, fünften und sechsten Horizontalreihe ab, so kann man aus den drei letzten Horizontalreihen den Factor

$$\left(\varDelta - \frac{D}{d}\delta\right)^3$$

vorsetzen, und hierauf in den drei ersten Horizontalreihen die Summanden $\delta b_{\varkappa\lambda\mu}$ zerstören, so dass

$$R' = Rd^3\left(\varDelta - \frac{D}{d}\delta\right)^3 = R(\varDelta d - D\delta)^3.$$

Seite 122, Z. 1—13. Im Originale standen an Stelle von π_1, π_2, π_3 resp. die Grössen:

$$3(1 + 2\pi), \qquad 3(1 + 2k''\pi), \qquad 3(1 + 2k'\pi).$$

G.

9.

Seite 130, Formel 80. Im ursprünglichen Text stand linker Hand:

$$n(n-1)\delta u - x_m x_m \varDelta.$$

Seite 131, Z. 8 v. u. Der Zusatz: „oder schiefwinkligen" ist vermöge der Transformationsformeln für Punktcoordinaten aus einem rechtwinkligen Systeme in ein schiefwinkliges durch die Gleichung (52) S. 114 erwiesen.

Seite 133, Lehrsatz 11. Die Anführungszeichen beziehen sich wohl auf: Steiner: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander." Berlin 1832. Nr. 60, Aufg. 48.

G.

10.

In dieser Abhandlung giebt Hesse auf Anregung Jacobi's 1843/44 (vgl. die Anmerkung auf S. 147) die algebraische Lösung der Gleichungen neunten Grades, die man heutzutage die „Hesse'schen Gleichungen“ nennt. Hesse hat sich mit der Aufgabe von Januar bis März und im November 1846 (Diarium 1845/47) beschäftigt.

Seite 139, Z. 11 v. u. Im Original stand: „$\theta(x, x_1)$“.

Seite 146, Z. 7. Im ursprünglichen Text hiess es: „Der erste Theil dieser Gleichung“.

Seite 150, Z. 5 v. u. Der fragliche Satz ist schon von De Gua in: „Usage de l'Analyse de Descartes etc.“ (Paris 1740), S. 113, und von Maclaurin in: „De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus“ (1748), Sectio III, Theorema X, ausgesprochen.

Seite 151, Z. 5 v. u. Im Original hatte λ das entgegengesetzte Vorzeichen.

G.

11—12.

In diesen zwei Nummern sind, abgesehen von der Berichtigung einer Reihe evidenter Druckfehler, einige kleinere stilistische Aenderungen angebracht worden. Besonders wurde mehrfach das Wort „Viereck“ des Originaltextes durch das Wort „Vierseit“ ersetzt.

G.

11.

Die Ideen der Abhandlung Nr. 11, welche von 1847 datirt ist, finden sich zum grösseren Theil, besonders § 4, in dem oben genannten Diarium von 1844/45. Schon in einem Brief an Crelle vom 30. November 1844 erklärt Hesse, dass er eine Note über die, eine Curve dritten Grades in drei Punkten berührenden Kegelschnittsysteme einsenden könne, mit geometrischen Beweisen, und fügt die charakteristische Bemerkung hinzu: „Eine geometrische Arbeit, die mir aber, weil der Gegenstand die Analysis weniger berührt, auch nicht am Herzen liegt“.

Aehnlich drückt sich Hesse in einem Brief an Jacobi vom 3. December 1844 (Diarium 1837/44) aus, dem er zugleich die Systemseigenschaft jener Kegelschnitte und die sechspunktig berührenden Kegelschnitte mittheilt. Erst die S. 191 dieser Ausgabe citirte Arbeit Steiner's (vom Juni 1845 datirt) veranlasst Hesse, nach einem Briefentwurf an Jacobi vom 24. Oktober 1846 (Diarium 1845/47) zur Ausarbeitung und Einsendung. Er schreibt dabei an Jacobi: „Wenn sich die Dreitheilung der elliptischen Functionen leicht daraus ergibt, so würde eine Note von Ihnen der Arbeit erst Interesse verschaffen“.

Einem Entwurf der Abhandlung (ibid.) fügt Hesse die Bemerkung bei: „Den Gang, den ich in der vorliegenden Untersuchung eingeschlagen habe, trifft der Vorwurf, dass er das geometrische Element mit dem analytischen vermischt. Ich habe

diese Darstellungsart jedoch der rein geometrischen oder rein analytischen vorgezogen, um das Abenteuerliche zu vermeiden, welches Darstellungen, die vom Gang der Erfindung sich entfernen, mehr oder weniger mit sich führen". Zu den Entwicklungen des § 3 findet sich in dem Diarium von 1844/45 bereits der vollständige Ansatz, so dass Hesse in dieser Beziehung von Cayley's ähnlichem Gedankengang, welcher dessen grosser Arbeit im Crelle'schen Journal, Bd. 34, zu Grunde liegt, und welchen Hesse S. 176 dieser Ausgabe citirt, unabhängig ist.

Die §§ 5 und 6 datiren vom December 1846.

Seite 159, Z. 14—9 v. u. Die sechs Bedingungsgleichungen sagen einfach aus, dass das Punktepaar

$$(x_1''\alpha_1 + x_2''\alpha_2 + x_3''\alpha_3)\cdot(X_1''\alpha_1 + X_2''\alpha_2 + X_3''\alpha_3) = 0$$

[in variabeln Liniencoordinaten α_1, α_2, α_3] von der Form sein muss:

$$\begin{aligned} &A(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3)(X_1\alpha_1 + X_2\alpha_2 + X_3\alpha_3)\\ &+ A'(x_1'\alpha_1 + x_2'\alpha_2 + x_3'\alpha_3)(X_1'\alpha_1 + X_2'\alpha_2 + X_3'\alpha_3) = 0. \end{aligned}$$

Seite 163, Z. 5—8. Auch dieser Satz, sowie einige andere in § 3 ausgesprochene Theoreme finden sich bereits in dem oben erwähnten Werke von Maclaurin.

Seite 177, Z. 17—18. Man vergleiche die Durchführung dieser Aufgabe auf S. 287—288.

Seite 178, Z. 15—23. Auf die hier gemachte Bemerkung Hesse's lässt sich durch Substitution der $X_i X_k$ aus (2) in (3) eine einfache Darstellung der ganzen Theorie der ternären cubischen Formen gründen; wie an anderer Stelle gezeigt werden soll. Offenbar hat Aronhold seine merkwürdigen Sätze über die Invariante S, mit $(\varrho\cdot\varrho')^{-1}$ bis auf einen Zahlenfactor identisch, (s. Crelle's Journal Bd. 39, S. 152 und Bd. 55, S. 114) aus der Bemerkung Hesse's abgeleitet. Hesse hatte nur nicht beachtet, dass eine homogene quadratische Gleichung zwischen den Coordinaten x_i eines Punktes der Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ eine für alle Werthe der x_i identische Gleichung sein muss.

Aronhold giebt in einem Briefe an Hesse vom 7. Februar 1850[1]) in kurzen Zügen den Beweis seiner Hauptsätze im 39. Bd. des Crelle'schen Journals S. 140 u. ff., und zwar durch das Fundamental-Theorem 3 in Crelle's Journal Bd. 55, S. 114. Die hier aufgedeckte wahre Quelle dieses Theorems 3 verschweigt dabei Aronhold. Allerdings schreibt derselbe in einem Briefe an Hesse vom 1. Oktober 1849[2]):

„Ew. Hochwohlgeboren werden aus dem Anliegenden sich überzeugen, dass nicht allein Ihr mündlicher Vortrag, sondern auch Ihre der Oeffentlichkeit übergebenen Arbeiten mir zur Belehrung dienten. Von der Vorzüglichkeit derselben durchdrungen, versuchte ich meine geringen wissenschaftlichen Kräfte, um auf dem von Ihnen vor-

1) Diarium von 1850/51 (Manuscr. III, 8). Offenbar hat Aronhold irrthümlich 1849 geschrieben.
2) Diarium von 1848/49 (Manuscr. III, 7).

gezeichneten Wege weiter zu gehen, und so vielleicht in diesem interessanten Gebiete der Mathematik einen Fortschritt bewirken zu können".

Augenscheinlich ist Aronhold durch die Covarianteneigenschaft der Hesse'schen Determinante auf die Wichtigkeit der Invariantentheorie aufmerksam geworden, deren Grundzüge in einer Beilage zu dem Briefe vom 1. Oktober 1849 und in einem Schreiben vom 18. December 1849 (Diarium 1850/51) dargelegt sind. Viele Ergebnisse der Abhandlung: „Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie" (Crelle's Journal Bd. 62, S. 281 ff.) sind daselbst vorweg genommen.

Seite 183, Z. 11 v. u. Im Original war anstatt $-2\,\alpha_1 \pi y_2^2$ gesetzt: „$-\alpha_1 \pi y_2^2$".

Seite 187, Z. 8—10. Eine andere Lösung der Aufgabe findet sich S. 283—284 dieser Ausgabe.

Seite 189, Z. 10 v. u. Vgl. die Anmerkung zu Nr. 10, S. 150.

Seite 191. Einem Entwurfe im Diarium 1845/47 fügt Hesse hinzu: „Zugleich sieht man ein, wie die algebraische Auflösbarkeit der Gleichung vom 27. Grade, durch welche die 27 Punkte π bestimmt sind, von der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichung des neunten Grades für die Wendepunkte abhängt" (cfr. Steiner, Crelle's Journal Bd. 32, S. 300 und Plücker, ibid. Bd. 34, S. 332, Z. 3—27).

G.

12.

Seite 197, Z. 16 u. ff. Die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 = 0$ repräsentirt offenbar das imaginäre Punktepaar, in welchem die unendlich ferne Gerade von allen Kreisen der Ebene getroffen wird.

Seite 198, Z. 8. Wegen des Zusatzes: „oder schiefwinkligen" vergl. man die Anmerkung zu S. 131.

G.

14.

Seite 218, Formel 4. Im Originaltext stand: $\varphi = r^2 \varphi'$.

Seite 219. Die Gleichungen (7) sind in einer Identität enthalten, welche unter Einführung der Zeichen

$$\frac{\varphi}{36} = \varDelta(x, y) = \varDelta, \qquad R = n^2 - 4mp,$$

$$Q(x, y) = Q = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varDelta}{\partial y} - \frac{\partial \varDelta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\varDelta' = \varDelta(X, Y), \qquad Q' = Q(X, Y), \qquad P = \tfrac{1}{3}(xf'(X) + yf'(Y))$$

für beliebige Werthepaare x, y und X, Y besteht und folgendermassen lautet:

$$f.\varDelta'.\varDelta' - \varDelta(Q'(xY - yX) + P\varDelta') = R.P.(xY - yX)^2.$$

Seite 220. Wenn man im System (11) durch Erweiterung der Brüche rechter Hand die Nenner rational macht, kommt man durch eine kleine Rechnung zu den Formeln Eisenstein's in Crelle's Journal Bd. 27, S. 82.

G.

15.

Ein Theil dieser Abhandlung, sowie die geometrischen Eigenschaften der Resolventen der Gleichung vierten Grades stammen aus dem Jahre 1847.

Seite 227—228, Formel 8—13. Die ganze Entwicklung Hesse's verdankt offenbar ihre Entstehung den allgemeinen Formeln Jacobi's in der Abhandlung: „De eliminatione variabilium e duabus equationibus algebraicis“ (Ges. Werke, herausg. v. Weierstrass, III, S. 303, Formeln 18—19). Die (l. c. § 6) von Jacobi benützte Methode (vgl. auch die Anm. zu Nr. 11, S. 178 d. A.) hat wahrscheinlich auch Hesse als hodegetisches Princip verwandt. Wenigstens lassen Entwicklungen im Manuscript I, 6 von 1843 es als gewiss erscheinen, dass auch der Satz zu (33*) auf S. 110 dieser Ausgabe nach der Jacobi'schen Methode ursprünglich gefunden und erst später vermittelst Identitäten bewiesen wurde.

Seite 237, Z. 3 v. u. Im Original stand: „Durch welche Anordnung“.

Seite 238, Gleichung 36. Aus (30), (29) und (20) folgt unmittelbar:

$$-\frac{12\varrho}{r^2}=\frac{Du+\Delta v}{du+\delta v}=\frac{D}{d}=\frac{\Delta}{\delta}.$$

Seite 240. Ueber die Ableitung des Systems (48) aus den Systemen (45)—(47) vgl. man: Hesse, „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie etc.“, Leipzig (2. oder 3. Auflage), sechste Vorlesung, Sätze 19—21.

G.

17.

Die Arbeit datirt etwa aus dem Jahre 1843, wie aus dem Concept eines Briefes an Crelle (Diarium von 1848/49) hervorgeht. Zu dem Aufsatz sind die Seiten 107—136 aus Hesse's „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene“, Leipzig 1865 zu vergleichen.

Seite 254, Satz 6. „Dessen erster Theil bekannt ist“, wie es S. 255 Z. 6 v. u. heisst. Dieser erste Theil rührt von Desargues her (nach Chasles, Aperçu hist., S. 82).

L.

18.

Diese vier Schreiben sind auch in C. G. J. Jacobi, Mathematische Werke, Bd. II, (Berlin, Reimer 1851, herausgeg. von Dirichlet) abgedruckt, die beiden ersteren und das Jacobi's S. 276—278, das dritte S. 220. Ferner in Jacobi's Gesammelten Werken, Bd. III (1884, herausgeg. v. Weierstrass), Nr. 22. Sie scheinen (nach den Briefen von Hesse an Jacobi vom 24. Januar 1851 und an Minding vom 10. März 1851; Diarium von 1850/51) ohne Vorwissen Hesse's von Jacobi an das Crelle'sche Journal gegeben worden zu sein; der Jacobi'sche Brief an Hesse ist sogar überhaupt nicht in die Hände Hesse's gelangt.

Seite 258. Für die im ersten Schreiben angeführte Reduction vgl. Nr. 19 dieser Ausgabe. Das Verhalten der Hesse'schen Determinante v in einem Doppelpunkte der Curve $u = 0$ (wie auch in einem Rückkehrpunkte) war vor Hesse schon von Cayley in dessen „Recherches sur l'élimination, et sur la théorie des courbes", Crelle's Journal 34 (1847; Papers I, Nr. 53), berechnet worden.

Seite 259. Vgl. hierzu Nr. 20 dieser Ausgabe.

Seite 260. Zur Gleichung 14. Grades vgl. Nr. 20, § 5 und Nr. 26 dieser Ausgabe mit den zugehörigen Anmerkungen. Ueber die sieben Kegelschnitte siehe Nr. 24, § 11 und Schluss von Nr. 25; sie sind von Hesse schon Oktober 1848 bemerkt worden (Diarium 1848/49). Das Citat aus Plücker bezieht sich auf dessen „Theorie der algebraischen Curven" (Bonn 1839), zweiter Abschnitt, § 5, Satz Nr. 94: der Fehler desselben wurde von Hesse am 1. November 1848 (Diarium 1848/49) durch specielle Annahme der Coordinaten erwiesen. Die Sendung an das Crelle'sche Journal betrifft die Abhandlung Nr. 19 dieser Ausgabe.

N.

19.

Seite 264, Z. 16. Das Citat bezieht sich auf Jacobi „De formatione et proprietatibus determinantium".

ad § 1. Die in Formel (21) enthaltene Umformung von U, von der (80), S. 130 dieser Ausgabe, ein specieller Fall ist, war schon von Cayley in der, Anmerkung zu Nr. 18 citirten Abhandlung mittelst seines Hyperdeterminanten-Calculs geleistet worden.

ad § 2. Die Fläche der Ordnung 3 $(m + n - 3)$ wurde von Hesse schon am 12. Oktober 1848 Joachimsthal mitgetheilt (Diarium 1848/49). Mit Benutzung der geränderten Determinanten hat Clebsch in seinem Aufsatze „Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven", Crelle's Journal 63, eine etwas kürzere Ueberführung der Form (8) in die Form (26) gegeben, und zugleich die letztere Form zur Aufstellung der Gleichung der Fläche $(6m + 6n - 20)^{\text{ter}}$ Ordnung verwendet, welche die Curve in den Wendungsberührpunkten trifft.

Seite 278, Z. 8. Vgl. Plücker, „Theorie der algebraischen Curven", zweiter Abschnitt, Nr. 64.

N.

20.

Seite 279, Z. 4—5. Das Citat bezieht sich auf Cayley „On homogeneous functions of the third order with three variables", Cambr. a. Dubl. Math. J. I (1846; Papers I, Nr. 35). In ausgeführter invarianter Form hat Cayley die Gleichung der Curve dritter Ordnung mittelst Liniencoordinaten in der vorher citirten Abhandlung Crelle's Journal 34, S. 35 gegeben.

Seite 280. Für den ersten Satz von § 1 vgl. Nr. 8, S. 101 dieser Ausgabe. Die hier gegebene Fassung ist so zu verstehen, dass die n gegebenen Functionen sämmtlich von gleichem Grade sein sollen. Mit Hülfe dieses Satzes hat Hesse [nach

einem Briefe an Jacobi aus dem Herbst 1843 (Diarium 1837/44) und einem solchen an Crelle vom 30. Nov. 1844 (Diarium 1844/45)] schon 1843—44 die Elimination aus drei homogenen Gleichungen dritten Grades von drei Variabeln, und die aus vier homogenen Gleichungen zweiten Grades von vier Variabeln ausgeführt. Der zweite Satz, und die Anwendungen der §§ 2, 3 wurden von Hesse, nach dessen Diarium von 1845/47, schon 1846, bezüglich 1847 gefunden.

Seite 286. In dem Diarium Hesse's vom Jahre 1850/51 findet sich am Schluss des § 4 des Entwurfs der vorliegenden Nr. 20 folgender „Nachträgliche Zusatz“:

„In dem Falle einer Curve dritter Ordnung will ich noch eine ganz neue Eliminationsmethode erwähnen. Wenn $v = 0$ die Gleichung der Curve, so ist

$$v_{11} = \lambda w_{11}, \quad v_{22} = \lambda w_{22}, \quad v_{33} = \lambda w_{33},$$
$$v_{23} = \lambda w_{23}, \quad v_{31} = \lambda w_{31}, \quad v_{12} = \lambda w_{12}.$$

In diesen Gleichungen hat man x, y, z und λx, λy, λz als die Unbekannten zu betrachten und dann zu eliminiren“.

Seite 287—288. Die Ableitung der Gleichung (16), welche von Salmon in dessen „A treatise on the higher plane curves“, 1. Ausgabe von 1852, genau nach Hesse wiedergegeben wird, ist in der 2. Ausgabe von 1873 durch Benutzung der mehrfach geränderten Determinanten etwas vereinfacht. Die spätere invariantentheoretische Behandlung des Problems knüpft an eine zweite, von Salmon herrührende Methode an (s. die Anmerkungen zur deutschen Ausgabe des eben citirten Werkes).

N.

21.

Vgl. die Abhandlung Nr. 30 dieser Ausgabe und die zugehörige Anmerkung.

N.

22.

Der Inhalt dieser Abhandlung von 1852 ist von Hesse bereits am 1. December 1837 in voller Allgemeinheit im Diarium 1837/44 aufgezeichnet.

Seite 304. „Was schon Poncelet bewiesen hat“ in „Traité des propriétés projectives des figures“ etc. (1822), Seite 395.

L.

24.

Diese Arbeit ist bei den Beweisen der folgenden Abhandlung (Nr. 25 d. Ausg.), zu welcher sie gehört, entstanden. Sie benutzt die einfach geränderten Determinanten, welche gelegentlich in den Aufsätzen Nr. 11 (1847) und Nr. 20 und vorher schon bei Cayley [Math. Papers Nr. 1, 12, 51 (letztere aus Cr. J. 31)] aufgetreten waren, zur Rechnung. Indessen hat Hesse in seiner Gleichung (9) bezw. (12) — deren Beweis auf den 24. März 1850 zurückgeht (Diarium 1850/51) —:

$$\Delta \cdot U = ac - b^2$$

den Ausdruck U noch nicht durch zweimalige Ränderung der symmetrischen Determinante Δ dargestellt. Diese Darstellung, und damit die einfache Zurückführung der Gleichung auf den früher bekannten Satz (vgl. Crelle's Journ., Bd. 22, S. 302, Gleichung 5, und Nr. 40 dieser Ausgabe) über Determinanten zweiten Grades aus ersten Unterdeterminanten (hier von U), findet sich bei Brioschi „Determinanti" (Pavia 1854), § 6.

Seite 331, Z. 13—5 v. u. Die hier gegebene Abzählung berücksichtigt an dieser Stelle nicht (wohl aber am Schlusse des § 7), dass vermöge der n^2 willkürlichen Grössen x_p^q von Gleichung (10) noch ebenso vielen Constanten in den u_{ik} feste Zahlenwerthe gegeben werden können; so dass Δ in der That nur $\frac{3}{2}n(n+1)-n^2 = \frac{1}{2}n(n+3)$ Parameter, oder ebenso viele wie v, enthalten kann. Aber auch dies genügt nicht zum Beweis der Darstellung aller Curven v in der Form Δ. Ebensowenig genügt die Abzählung S. 336, Z. 1—3, ist aber hier leicht zu ergänzen.

Seite 341. Von dem aus den Kegelschnitten a, b, c erzeugten Netz geht Steiner, Crelle's Journal, 49, 1852 aus. Nach Seite 6 des „Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli", herausg. von Graf, Bern 1896, war Steiner schon 1848 die Existenz der 63 Kegelschnittsysteme und ihrer Gruppirungen zu 3, 4 ... bekannt, also wohl auch die der 315 Kegelschnitte, welche je durch die Berührungspunkte von 4 Doppeltangenten gehen.

N.

25.

§§ 1—16. Nach dem Diarium Hesse's von 1837/44 gehen die Ideen dieser Arbeit, anknüpfend an Untersuchungen über die Discriminante eines Büschels $\varkappa f + \lambda\varphi$ von Flächen zweiter Ordnung (Manuscript III, 12), auf den Anfang des Jahres 1843 zurück. Daselbst wird schon von der Darstellung der Curve vierter Ordnung als Determinante der Flächenschaar $\varkappa f + \lambda\varphi + \mu\psi$, mit richtiger Constantenzählung, ausgegangen, die Beziehung der 28 Doppeltangenten $F_{pq}=0$ auf die 28 Verbindungslinien der 8 Raumpunkte angegeben, sowie die Gleichung (47) dieser Abhandlung mit der Zerlegung in ihre vier irrationalen Factoren aufgestellt. Auf diese Gleichung bezieht sich die, im ersten Satze der Anmerkung zu S. 113 citirte Notiz Hesse's. In dem Diarium 1844/45 wird sodann der Zusammenhang zwischen der Curve vierter Ordnung und der Raumcurve sechster Ordnung, Ort der Kegelspitzen, erörtert, insbesondere die Beziehung zwischen den Schnitten von ebenen Curven dritter Ordnung und von Flächen zweiter Ordnung, und die Anwendung auf das eine System von in je sechs Punkten berührenden Curven dritter Ordnung gegeben, während die Anzahl solcher Systeme noch offenes Problem bleibt; auch findet sich dort der Inhalt des jetzigen § 17. Erst im October 1850 (Diarium 1850/51) gelingen Hesse die richtigen Bestimmungen: die Anzahl 36 der wesentlich verschiedenen Determinantenformen für die Curve vierter Ordnung, die Zahl 315 der Kegelschnitte etc. Eine ganze Reihe weiterer Versuche, dem Problem der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung

beizukommen (D. 1837/44, April 1843; D. 1848/49; D. 1850/51), geht von der Gleichungsform aus:

$$\Sigma a_{ik} v_i v_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

wo die v_i homogene quadratische Ausdrücke in x_1, x_2, x_3 sind, um sie durch lineare Transformation zwischen den v_i und w_i in die Gleichungsform

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 2 w_2 w_3 - 2 w_3 w_1 - 2 w_1 w_2 = 0$$

überzuführen, wo die w_i Producte von je zwei linearen Ausdrücken werden sollen, also in die Gleichungsform (47) der Abhandlung (vgl. Aronhold, Monatsber. der k. preuss. Akad. d. Wiss., 1864).

Eine Fortführung des Hesse'schen Systembegriffs und der Theorie der berührenden Curven überhaupt hat Clebsch mit transcendenten Hilfsmitteln in seiner Abhandlung „Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie" (Cr. J. 63, 1863) gegeben; so in § 6 die Beantwortung der von Hesse am Schlusse des § 4 seiner Abhandlung gestellten Frage nach der Anzahl aller die Curve vierter Ordnung überall dreipunktig berührenden Curven dritter Ordnung. Eine Zusammenfassung der Hesse'schen Theorie findet sich in Brill-Noether's Bericht „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit" (Jahresber. d. Deutschen Math. Vereinigung für 1893), Abschn. V, A, Nr. 14—19; für die weitere, an Riemann und Clebsch anknüpfende Entwicklung vgl. ebenda, Abschn. V, B und C, für die spätere Entwicklung ebenda, Abschn. IX, insbesondere Nr. 17 ff., 28.

Seite 402, Z. 10—12. Der rechte Theil von (88) würde auch in zwei lineäre Factoren zerfallen, wenn nur die Glieder mit $\varkappa^2, \varkappa\lambda, \lambda^2$ ein vollständiges Quadrat bildeten; aber durch diese Bedingung würde man ebenfalls auf die Gleichung (90) geführt, wie (92) zeigt.

Seite 403—404. Die von Hesse aufgeworfene Frage nach allen Systemen von sieben Kegelschnitten, welche je durch die sämmtlichen Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgehen, ist der Art und Zahl nach von Noether theilweise in Band 15 der Mathem. Annalen, vollständig in den Sitzungsberichten der bayer. Akad. d. Wiss. v. 9. Febr. 1895 und in Band 46 der Mathem. Annalen beantwortet worden.

Aus einem ersten, handschriftlich vorliegenden Entwurf der Abhandlung Nr. 25[1]) seien folgende Ergänzungen angeführt:

ad § 1. Hesse bemerkt, wie auch schon in Manuscript I, 19, dass die Behauptung von Chasles, „Aperçu historique" (Note XXXIII, p. 403): „der geometrische Ort der Scheitel aller Kegel zweiten Grades, welche durch sechs gegebene Punkte im Raume geben, eine durch die sechs Punkte bestimmte Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade ist", irrthümlich, dass dieser Ort vielmehr eine Fläche vierter Ordnung sei. — Dieser Ort, die „Weddle'sche Fläche", ist seit 1850 bekannt.

---

1) Manuscr. I, 8.

Vgl. bez. der Literatur: Schottky im Crelle'schen Journal, Bd. 105, S. 238; Humbert im Liouv. J., Ser. 4, Bd. 9. Von Hierholzer, Math. Annalen, Bd. 2, ist diese Fläche zum Beweis des Hesse'schen Satzes: „die Spitzen der Kegel zweiten Grades, welche durch sieben gegebene Punkte gehen, bilden eine Curve sechster Ordnung, welche die Verbindungslinie dieser Punkte zu Sehnen hat“ benutzt, und dann Math. Ann., Bd. 4 eingehender discutirt worden.

ad § 12, Seite 382. Hesse erklärt für die Thatsache, dass die Linien $5'6'$ und $7\,8$ vermöge Beziehung von F' zu F einander entsprechen, einen directen analytischen Beweis für sehr wünschenswerth. — Ein indirecter analytischer Beweis ist durch den folgenden § 13 geleistet; denn, indem F' und $F_,$ als nicht verschiedene Functionen nachgewiesen werden, geht die zu F' gehörige Linie $5'6'$ in die zu $F_,$ gehörige Linie $5_,6_,$ über, diese aber, nach S. 379, in die Linie $7\,8$.

ad § 15. Hesse giebt, aber noch als fraglich, den Satz: „Wenn man durch die Berührungspunkte zweier Berührungskegelschnitte einer Curve vierter Ordnung, aus verschiedenen Systemen genommen, eine Curve dritter Ordnung hindurchlegt, so schneidet sie die Curve vierter Ordnung in vier Punkten, in welchen ein Berührungskegelschnitt aus einem dritten System die Curve vierter Ordnung berührt“. Vergl. Clebsch a. a. O.

ad § 16, Seite 394, Satz b. Hesse fügt einen an der Raumcurve sechster Ordnung geführten geometrischen Beweis dieses Satzes hinzu: der Kegel zweiten Grades, welcher die fünf Kanten 12, 13, . . . 16 enthält, geht auch durch die Raumcurve dritter Ordnung, welche durch 1, 2, . . . 6 bestimmt ist, also durch die beiden Schnittpunkte derselben mit ihrer Sehne 78, d. h. durch die beiden Schnittpunkte dieser Linie 78 mit der Raumcurve sechster Ordnung.

N.

26.

Der Entwurf zu dieser Abhandlung, in Manuscr. I, 9, datirt Mai 1854, hat im Titel: „. . . Curve vierzehnten Grades, welche . . . schneidet“.

Eine etwas vereinfachte Ableitung der Identität (15) findet sich bei Cayley „On the double tangents of a curve of the fourth order“, Philos. Transactions, vol. 151 (1861; s. Math. Papers Nr. 270).

N.

27.

Für die weitere Entwicklung des in diesem Aufsatze behandelten Gegenstandes vergleiche man die Bemerkungen auf Seite 7 und 8 der Monographie über „R. F. A. Clebsch's Mathematische Arbeiten“ (Mathematische Annalen, Bd. VII).

Seite 419, Z. 6 v. o. Das Citat bezieht sich auf die Abhandlung von Jacobi „Ueber die Vertauschung von Parameter und Argument etc.“ (Bd. II, S. 127 der gesammelten Werke von Jacobi, herausgegeben von Weierstrass).

D.

28.

Seite 472, Z. 3. Hinzuzufügen ist: „vorausgesetzt, dass nicht die 6 Berührungspunkte einer Doppeltangente c und zweier a auf einem Kegelschnitte liegen". Im anderen Falle würde man nämlich ebenfalls zu der zweiten Art von sechs Doppeltangenten gelangen, und U würde ein vollständiges Quadrat werden.

N.

30.

In Abhandlung Nr. 21 dieser Ausgabe wäre zunächst die Annahme hinzuzufügen, dass nicht alle ersten Unterdeterminanten von Δ identisch verschwinden. Der von Hesse in Nr. 30 corrigirte Schlussfehler von Nr. 21 ist dann der, dass der gemeinsame Factor M der zu Folge jener Annahme existirenden $U_{\varkappa\varkappa}$, $U_{\lambda\lambda}$, $U_{\varkappa\lambda}$ nur nach den Gleichungen $U_{\varkappa\varkappa} U_{\lambda\lambda} - U^2_{\varkappa\lambda} = 0$ als vom Grade $(n-1)(m-2)$ angenommen wird (s. S. 294). Aber auch der Beweis von Nr. 30 enthält Lücken. Schon der Satz auf S. 483, Z. 15—10 v. u. ist nicht richtig — wie Hesse selbst auf einem Separatabzuge bemerkte —, hat aber keinen Einfluss auf den Beweis, da weiterhin angenommen wird, dass keine der ersten Unterdeterminanten von Δ identisch verschwindet. Der eigentliche Fehler besteht darin, dass aus den beiden Systemen (7) und (10) auf das System (11) geschlossen wird, während doch die Determinante der Coëfficienten $D_{\mu\nu}$, ja auch alle ihre Unterdeterminanten erster, zweiter, ... $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung identisch verschwinden.

Dass der Satz selbst im Allgemeinen nicht richtig ist, sondern, ausser für $m=2$, nur noch für $n=2, 3, 4$, ist von Gordan und Noether in deren Aufsatze „Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet" (Math. Annalen, Bd. 10, 1876) gezeigt worden. Die Fälle $m=3$, $n=3$ und 4 waren schon von Pasch, Crelle's Journal 80, behandelt worden.

N.

31.

Seite 493, Fussnote. Der fragliche Satz findet sich nicht in den veröffentlichten Abhandlungen von Weierstrass. Er wurde, wie Herr Weierstrass auf eine Anfrage zu erklären die Güte hatte, von ihm Hesse mündlich mitgetheilt.

L.

32.

Man vergleiche zu dieser Abhandlung die Darstellung in der dritten Auflage von Hesse's „Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes" (1876), herausgegeben von Gundelfinger, S. 236 ff. und 395 ff.

L.

33.

Im Titel des Abdrucks in dem Journal für Mathematik steht „des Problems". In Uebereinstimmung mit der französischen Bearbeitung wurde dafür „eines Problems" gesetzt. Die Aufgabe wurde als Question 296 in Bd. 14 (1855), S. 50 der Nouvelles Annales von Chasles gestellt. Die erste richtige Lösung gab Cremona in Bd. 20, S. 452—456 derselben Zeitschrift.

L.

35.

Die Bedingungen der Involution rühren von Pappus und Desargues her (Chasles, „Aperçu histor.", Seite 77/78 und Note X, Seite 308).

Seite 517. Eine einfachere Herleitung der Gleichung $F_{12} = (x_1 - x_2) F_3$ giebt Hesse auf Seite 72 des in der Anmerkung zu Nr. 17 citirten Buches.

Seite 522. Das hier angedeutete Uebertragungsprincip ist in der unter Nr. 38 abgedruckten Abhandlung weiter ausgeführt.

L.

36.

Seite 524, Zeile 9—11 v. o. Das Studium des Hexagrammum mysticum in seiner analytischen Fassung findet man in Hesse's „Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie", Zeitschr. f. Math. und Phys., Bd. 11, S. 387 ff., wo auf S. 388 bis 396 die ganze hier abgedruckte Abhandlung in einer anderen (wie es scheint, der ursprünglichen) Form reproducirt ist. In der Fussnote auf S. 396 daselbst ist auch — wohl in Folge einer Bemerkung Borchardt's (Brief vom 29. Februar 1864[1]), der diese andere Form ebenfalls andeutet): „ein Nachweis, der mir noch nöthig erscheint, ist der, dass man für je zwei gegebene rechtwinklige Coordinatensysteme die λ's reell so bestimmen kann, dass (5) [Seite 524 dieser Ausg.] die Transformation geben" — implicite der Beweis erbracht, dass die gegebenen Formeln jede Transformation liefern können.

Seite 527, Formel 8. Die Zeichen der Wurzeln sind so zu wählen, dass das zweite System (3) auf S. 523 erfüllt ist.

Zu der Abhandlung vergleiche man Study, „Mathematische Mittheilungen. I. Ueber das Pascal'sche Sechseck". Berichte der kgl. sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Band 47 (1895), Seite 532—552.

L.

37.

Der Satz, auf den die Abhandlung sich bezieht, kommt in einem Diarium Hesse's[2]) unter dem 1. Juli 1840 vor, dürfte aber wohl zuerst von Chasles veröffentlicht sein im „Traité des sections coniques" (1865), S. 62.

1) Manuscr. IV.

2) Diarium 1837/44, Manuscr. III, 2.

An derselben Stelle des Diariums giebt Hesse die Ausdehnung auf den Raum: „Wenn man eine Oberfläche zweiter Ordnung von den Kanten eines Tetraëders schneiden lässt und die zwölf Schnittpunkte mit den gegenüber liegenden Kanten des Tetraëders durch Ebenen verbindet, so erhält man zwölf Ebenen, welche eine Oberfläche zweiter Ordnung berühren".

L.

38.

Für diese Abhandlung vergleiche man die vierte der oben in der Anmerkung zu Nr. 36 citirten „Vier Vorlesungen" (speciell S. 417—425).

Das Uebertragungsprincip theilt Hesse schon am 24. Januar 1851 brieflich Jacobi mit[1]); zum erstenmale wird es in Nr. 35 erwähnt (S. 522 dieser Ausgabe).

L.

39.

Die Möglichkeit, das Pascal'sche Theorem in seiner Erweiterung als Polarfigur aufzufassen, wurde von Bauer (Abhandl. d. bayer. Akad., math.-phys. Klasse, Bd. 11, 3. Abth., 1874, S. 109—139), Veronese und Cremona (diese beiden Arbeiten in den Atti d. Accad. d. Lincei, Memorie d. classe d. scienze fisiche etc., Ser. 3, Bd. 1 (1877), Seite 649—703, bezw. 854—874) erörtert.

Seite 539/40. In einer der Randbemerkungen, die Hesse der, in der Anmerkung zu Nr. 43 erwähnten, Möller'schen Preisarbeit zugefügt hat, sagt er, bei dem Satze, dass die 20 Cayley'schen Linien je zu vieren sich in 15 Salmon'schen Punkten schneiden: „die Erläuterung dieses Satzes giebt einen . . . Beweis der Nichtexistenz des von Hesse nur hypothetisch angenommenen Kegelschnittes. Denn existirte ein solcher Kegelschnitt, so müssten die vier Cayley'schen Linien, welche sich in einem Salmon'schen Punkte schneiden, nicht durch vier Steiner'sche Punkte in einer geraden Linie gehen, sondern durch die Gegenpunkte der genannten vier Steiner'schen Punkte".

L.

40.

Der Satz ist als eine unmittelbare Folgerung aus dem bekannten Satze über zweireihige Determinanten aus ersten Unterdeterminanten zu erkennen.

L.

42.

Das in der Abhandlung „Ueber das Problem der drei Körper" als Schlussresultat aufgestellte Theorem ist bekanntlich unrichtig, da die demselben zu Grunde liegenden Differentialgleichungen (48), (49) und (54) nicht von einander unabhängig sind.

Oeffentlich hat zuerst Serret in einer mündlichen Mittheilung an das Bureau des Longitudes auf den Fehler aufmerksam gemacht und kurze Zeit darauf eine Darlegung

---

1) Diarium 1850/51, Manuscr. III, 8.

desselben in den Comptes Rendus der Pariser Akademie (Sitzung vom 30. Juni 1873) unter dem Titel „Réflexions sur le mémoire de Lagrange intitulé Essai sur le problème des trois corps“ gegeben. Diese Darstellung ist auch in die von Serret herausgegebenen Werke von Lagrange (Bd. VI, p. 324—331) aufgenommen.

Aus Briefen zwischen Hesse und Borchardt[1]), die sich im Nachlasse Hesse's vorfanden, geht hervor, dass Aronhold wenige Monate nach Publikation der Abhandlung den Fehler aufgefunden und Borchardt davon Mittheilung gemacht hat. Borchardt schrieb darüber an Hesse unter dem 6. April 1872:

„Mein heutiger Brief bezieht sich auf Deine frühere Arbeit über das Problem der drei Körper. Dieser Tage traf ich mit Aronhold zusammen, der Deine Abhandlung genau studirt hat, und leider findet, dass von den drei Differentialgleichungen dritter Ordnung (48), (49) und (54), welche Du auf den Seiten 112, 114 meines Journals für die drei Radienvectoren aufstellst, die letzte eine Folge der beiden ersten ist, dass ferner in der Form dreier Differentialgleichungen dritter Ordnung die Bestimmung der Radienvectoren nicht angeht, sondern die dritte Gleichung auf die vierte Ordnung steigt. Es ist ja sehr möglich, dass Du diese Bemerkung auch schon gemacht hast, mein Brief Dir also nichts Neues sagt, aber jedenfalls wollte ich Dir durch meine Mittheilung Gelegenheit geben, sobald als möglich in meinem Journal zu Deiner Abhandlung einen erläuternden Zusatz zu veröffentlichen. . . Aronhold rühmt in Beziehung auf die Behandlung des Problems der drei Körper sehr eine Abhandlung von Radau (Liouville 1869)[2]), worin ein zuerst von Bour aufgestelltes Resultat einfach bewiesen ist. Radau stellt nach Bour für das Problem der drei Körper ein System von sechs Variablen auf, indem er zu den drei Radienvectoren die angemessenen Winkelgrössen hinzufügt. Alsdann bringt er das System der Differentialgleichungen auf die Hamilton'sche Form, so dass hier alle Rechnungen vermieden werden.“

Aus der Antwort Hesse's geht hervor, dass dieser zur Zeit der Mittheilung Borchardt's den Fehler, wenn auch nicht die Tragweite desselben, schon erkannt hatte. Darauf bezügliche Notizen Hesse's vom 9., 11. und 12. April 1872 schliessen mit der Bemerkung:

„Mein Theorem ist, wie Aronhold richtig sagt, doch nicht zu retten. Die Differentialgleichungen (46) und (37) erfordern zehn Integrationen, von denen zwei durch die Principe der Mechanik geleistet werden“.

Eine Berichtigung des Fehlers, welche Hesse im Zusammenhange mit weiteren Zusätzen zu geben beabsichtigte, ist nicht erfolgt.

---

1) Manuscr. IV.

2) Man vergl. auch Annalen II, pag. 167 ff. Für die Gleichungen für die Radienvectoren vergl. ferner: Scheibner, „Ueber das Problem der drei Körper“, Journ. f. r. u. angew. Math., Bd. 68 (1868), und Bruns, „Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems“, Ber. der sächs. Ges. d. Wiss., Math.-Phys. Classe, Bd. 39 (1887).

Seite 584, Anmerkung. Die hier erwähnte Arbeit von Lagrange steht im IX. Bande (1764—1772) der „Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'académie Royale des sciences, depuis leur fondation en 1720"; der Haupttitel lautet dort: „Essai d'une nouvelle méthode pour résoudre le problème des trois corps; qui a remporté le prix de l'académie Royale des sciences en 1772. Par M. de La Grange. Der im VI. Bande der Ausgabe der Oeuvres de Lagrange gegebene Titel: „Essai sur le problème des trois corps" bildet die auf die Einleitung folgende Ueberschrift.

D.

43.

Im Jahre 1867 stellte die philosophische Facultät der Universität Heidelberg auf Veranlassung von Hesse die akademische Preisfrage, den Pascal'schen Satz und seine Erweiterungen zu beweisen mit Benützung der Symbole Δ und $(\alpha\beta)$, wie sie, unter der Annahme $n=1$, $u_1^0 = u_0^1$, aus der Gleichung (5) Seite 591 folgen. Der mit dem Preise gekrönten Arbeit des Stud. Möller (die uns von der Universitätsbibliothek in Heidelberg in dankenswerther Weise zur Einsicht überlassen wurde) hat Hesse (im September oder Oktober 1868) einige Randbemerkungen beigesetzt, von denen zwei sich ihrem Inhalt nach decken mit den letzten neun Zeilen vorliegender Abhandlung (Seite 598). In einer andern Bemerkung hob Hesse hervor, dass die Salmon'sche Bezeichnung

$$\begin{Bmatrix} (\alpha\beta) & (\gamma\delta) & (\varepsilon\zeta) \\ (\delta\varepsilon) & (\zeta\alpha) & (\beta\gamma) \end{Bmatrix}$$

für die Pascal'sche Linie des Sechsecks, dessen Seiten der Reihe nach durch die Gleichungen $(\alpha\beta)=0$, $(\beta\gamma)=0$, $(\gamma\delta)=0$, $(\delta\varepsilon)=0$, $(\varepsilon\zeta)=0$, $(\zeta\alpha)=0$ gegeben sind, an Bedeutung dadurch gewinne, dass durch die Gleichung (9) Seite 593 der Kegelschnitt und diese Pascal'sche Linie leicht dargestellt werde. Die Identität (9) selbst ist zuerst von Plücker, „Analytisch-geometrische Entwicklungen", Bd. 1 (1828), Nr. 392, Anmerkung, ihrem geometrischen Principe nach angegeben worden.

L.

44.

Auf einem einzelnen Blatte findet sich noch der Satz, der zum Satze 24 S. 613 zu stellen wäre: „Die reciproken Polaren aller focalen Parabeln, deren Scheitel auf einem durch den gemeinsamen Brennpunkt gehenden Kreise liegen, rücksichtlich einer um den Brennpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreisdirectrix, sind Kreise, welche sämmtlich durch den Brennpunkt und einen andern ganz bestimmten Punkt gehen."

L.

II.

Anmerkungen zum Nachlass.

1.

Diese Fortsetzung der unter Nr. 1 abgedruckten Arbeit ist aus zwei verschiedenen Heften zusammengestellt. Das eine[1]) enthält die ganze Abhandlung im Entwurf, das andere[2]) die §§ 8, 9 und 10 in Reinschrift. Diese Paragraphen sind nach der Reinschrift abgedruckt, die §§ 11 und 12, der letztere mit einigen Kürzungen, dem Entwurfe entnommen.

Seite 629, Ende von § 9. Die Gleichung $P = Q$ ist für die Invariantentheorie von Interesse.

Seite 634, Zeile 6—11 v. o. Hier hat Hesse beigeschrieben „Beweis?“ Das, wie es scheint, ungerechtfertigte Bedenken, ob nicht stets der nämliche Punkt erzeugt werde, dürfte wohl der Grund gewesen sein, dass Hesse die Arbeit nicht veröffentlichte.

L.

2.

Diese Arbeit ist fast wörtlich, mit nur geringen Kürzungen, dem Diarium 1844/45, Manuscr. III, 5 entnommen. Nur an einigen Stellen sind kleine, durch Anmerkungen bezeichnete Zusätze gemacht.

L.

3.

Diese aus dem Jahre 1866 stammende Aufgabe[3]) wurde im Jahre 1875 aus dem Nachlass Hesse's durch Gundelfinger veröffentlicht.

L.

---

1) In Diarium 1850/51, Manuscr. III, 8 eingeheftet.

2) Manuscr. I, 19.

3) Manuscr. I, 21, datirt 23. August 1866.

4.

Die Abhandlung ist ein nahezu wörtlicher Abdruck der im Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 85, S. 304—314 von Gundelfinger veröffentlichten Redaction einer vermuthlich aus dem Jahre 1866 stammenden Arbeit.[1])

Die, einzelnen Stellen beigefügten, zum Theil die Abhandlung ergänzenden Anmerkungen Gundelfinger's wurden hier nicht wieder abgedruckt.

Seite 653. Bei den Formeln (6) wurde dem Text entsprechend die sechste Gleichung hinzugefügt.

Seite 655. Die Formeln (18) sind nach einer Notiz in Hesse's Manuscript abgeändert, indem, um die Symmetrie mit dem System (24) zu wahren, auf den rechten Seiten die willkürlichen Factoren ϱ beigefügt wurden. Dadurch wurden auch in den Formeln (27) und (32) Aenderungen bedingt.

Seite 662, Formeln (32). Da durch die Gleichungen (28) nur $\frac{l}{m}$ bestimmt ist, kann man

$$l = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_6 \sqrt{\frac{\varrho_1 \varrho_3 \varrho_5}{\varrho_2 \varrho_4 \varrho_6}}$$

setzen, wodurch man auf die Formeln (32) kommt.

L.

5.

Wörtlicher Abdruck des im Band 99 des Journals für reine und angewandte Mathematik von Caspary veröffentlichten Manuscripts, das von Hesse in seiner Münchener Zeit druckfertig gestellt worden war. Die von Hesse angedeutete Construction wurde von Caspary (ebenda S. 128—130) weiter ausgeführt.

L.

1) Manuscr. I, 22.

III.

Otto Hesse's Lebenslauf.

Vorbemerkung.

In den hinterlassenen Papieren Otto Hesse's, welche ausser wissenschaftlichen Diarien auch einige Bände Personalacten, sowie Briefe und Reiseberichte umfassen, findet sich aus dem Jahre 1850 folgender kurzer Lebensabriss von dessen eigener Hand:

„Ludwig Otto Hesse, geboren in Königsberg i. P. den 22. April 1811, Sohn des verstorbenen Kaufmanns Johann Gottlieb Hesse und der noch lebenden Wittwe Anna Karoline, geb. Reiter, von evangelischer Konfession, erhielt im Altstädtischen Gymnasium zu Königsberg seine erste wissenschaftliche Bildung, von wo er im Jahre 1832 mit dem Zeugniss der Reife zur Universität entlassen wurde. Auf der Königsberger Hochschule studirte er fünf Jahre lang unter Jacobi, Bessel, Neumann und Richelot die Mathematik und Physik und machte im Jahre 1837 bei der kgl. Prüfungscommission das Examen als Oberlehrer. Als er hierauf noch das übliche Probejahr als Lehrer am Kneiphöf'schen Gymnasium abgehalten hatte, reiste er im Sommer des Jahres 1838 durch Deutschland und Italien, und trat nach seiner Rückkunft im Herbste 1838 als Lehrer in die Königsberger Gewerbeschule ein, in welcher er bis Ende des Jahres 1841 in der Physik und Chemie unterrichtete. In dieser Zeit eröffnete er sich einen höheren Wirkungskreis, indem er im Anfange des Jahres 1840 promovirte und sich auf der Königsberger Universität habilitirte, seit welcher Zeit, also seit zehn Jahren, er unausgesetzt Vorträge über folgende Zweige der Mathematik gehalten hat: Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Differentialrechnung, Integralrechnung, Integration der Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, Statik und Mechanik. Im Jahre 1845 ernannte S. Maj. der König ihn zum ausserordentlichen Professor, in welcher Eigenschaft er noch gegenwärtig an der Königsberger Universität fungirt."

Diese Skizze hat schon Herr Professor Gustav Bauer mit Hülfe der auch ihm zugänglich gewesenen Personalacten in einer am 28. März 1882 in der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften gehaltenen Gedächtnissrede[1]) auf O. Hesse, welche zugleich

---

1) Abhandlungen der Akademie vom Jahre 1882.

eine eingehende wissenschaftliche Würdigung des Gelehrten enthält, ausgestaltet. Nach dieser Rede, nach den genannten Papieren und nach einigen uns von der Familie Hesse's übermittelten Notizen soll hier der eben wiedergegebene Lebensabriss ausgefüllt und fortgeführt werden.

Otto Hesse's Familie führt väterlicher- und mütterlicherseits nach dem äussersten Nordostwinkel Ostpreussens zurück. Die Familie des 1791 geborenen Vaters war in Tilsit einheimisch, die der Mutter (geb. 1788) gehörte zu den 1599 aus dem salzburgischen Gebiete vertriebenen Protestanten, welche 1730 auf Veranlassung Friedrich Wilhelm's I. das durch die Pest von 1707 entvölkerte preussische Lithauen besiedelten. Der Vater betrieb, nachdem er früher Seidenfabrikant und Kaufmann gewesen, 1811 im Königsberger Stadttheil Loebenicht die „Mälzenbräuerei". Daselbst ist Otto geboren, als das älteste von fünf Kindern: drei Söhnen und zwei Töchtern, und unter sonnigen Verhältnissen aufgewachsen. An die glückliche Kindheit, wie der sorglose Knabe, „statt hinter den Büchern zu sitzen, am liebsten auf seinem Schlitten den „„schiefen Berg"" hinunterfuhr", erinnert noch der alternde Mann in einem Briefe vom Jahre 1865: „Ich will Dir gestehen, dass, wenn ich wieder werden könnte wie damals, ich gleich meine Professur aufgeben würde; so glücklich, wie zu jener Zeit, wo die Mutter mir zweimal täglich die Kleider wechseln musste, bin ich in meinem ganzen Leben nicht gewesen". Einer der rührendsten Züge aus seiner Jugend, der ihm in's Alter treu geblieben, ist die Anhänglichkeit an seine Mutter: Weihnachten 1862 giebt er, dessen Phantasie immer ebenso rege war, wie der Humor, der Mutter eine im Heidelberger Freundeskreise gut aufgenommene Erzählung von den ersten Eindrücken seines Lebens wieder, als am 14. Juni des Kometenjahres 1811 der grosse Brand in den hohen Speichern am Flussufer, die wegen der Seesperre ganz gefüllt waren, ausbrach und die Familie aus dem Sommeraufenthalt Neuhausen zur Stadt eilte, wo der Kleine aus dem schützenden Umschlagetuch der Mutter heraus das unabsehbare Feuermeer erblickte, den von dem schwimmenden Hanföl brennenden Pegel, die brennenden Häuser ringsum, die brennenden Schiffe — „selbst das nicht Brennbare glühte und strahlte Flammen aus nach allen Seiten, meine kleine Seele jauchzte auf bei dem Anblick dieses grossartigen Schauspiels, denn sie hatte nur eine ganz unvollkommene Ahnung von dem Jammer und Elend, welches dem Schauspiel folgte. Wie sollte sie es auch haben? Die Mutter, an der einzig und allein mein jugendliches Herz hing, hatte mich noch nie verlassen . . . Besitzest Du noch das genannte grosse Umschlagetuch, dann könntest Du es mir schicken, damit ich es aufbewahre als ein Denkmal der frühesten mütterlichen Liebe". Und an seine Schwester, kurz vor dem 1865 erfolgten Tode der Mutter: „Was Deinen Jungen für's Leben bildet, das ist die anspruchslose Liebe von Dir für ihn, wie die unserer Mutter für uns. Siehe, das prägt sich mit Flammenzügen unverlöschlich ein in das menschliche

Gemüth und ist dem Menschen ein Leitstern für das ganze Leben. Die Mutter hat es nicht anders gemacht. Die Tochter wird es auch nicht anders machen.“ Mit dieser Schwester, Caroline, verehelichten Lausch, die noch als 80jährige Wittwe zu Vierbrüderkrug lebt, verband Hesse bis zu seinem Tode eine enge Gemeinschaft. „Als Erstgeborener“, schreibt sie noch im Juli 1896, „hielt er es für seine Lebensaufgabe, für alles Grosse und Schöne, was seine Seele in Natur und Kunst so tief bewegte, auch einen Widerhall bei den Geschwistern zu wecken — so schenkte er mir, als seiner ältesten Schwester, auf seinem Studierstübchen wohl täglich eine Stunde, in der er mir dann Jean Paul Katzenberger's Badereise, oder andere werthvolle klassische Sachen vorlas.“ Die klassische Literatur, vor Allem Faust, wurde in Hesse's Gedankenwelt aufgenommen und lebt in seinen Briefen.

Die glückliche Zeit wurde getrübt, als der Vater 1829 plötzlich an den Folgen eines Sturzes mit dem Pferde starb. Auf die Mutter ging die Sorge des Lebens über, der sie, von dem Stadtgerichtsregistrator Consbruch als Vormund der Kinder unterstützt, treu gerecht wurde. Die achtsame Mutter war es, die, als schon im Gymnasium des Sohnes hervorstechende Neigung und Beanlagung für die Mathematik von seinen Lehrern, dem Direktor Struve und dem Mathematiker Müttrich, erkannt war, einen damals bei Bessel studirenden Astronomen Lessow als Hauslehrer anstellte und damit den Grund zu seiner mathematischen Entwicklung legte. Nach $7^1/_2$jährigem Besuch des Gymnasiums, darunter $2^1/_2$ Jahre in Prima, verliess er es im April 1832, eben 21 Jahre alt, mit einem Abgangszeugniss, das eigentlich nur für Mathematik und Naturwissenschaften rühmlich war. Sogleich, wie schon ein Jahr vorher, meldete sich Hesse zur Ableistung des Militärdienstes als Einjährig-Freiwilliger, aber er, später ein kräftiger und breitschultriger Mann, musste damals, rasch gewachsen und flachbrüstig, zurückgestellt und sogar 1834 definitiv zurückgewiesen und zur Ersatzreserve bestimmt werden. Erwähnt sei, dass das ärztliche Dokument hierzu vom Regimentsarzt Dr. Clebsch, dem Vater des wissenschaftlichen Erben Hesse's, unterzeichnet ist.

In den Universitätsjahren, 1832—37, war es Hesse vergönnt, an der Hand des ersten Lehrers der Mathematik in Deutschland, C. G. J. Jacobi, in die Wissenschaft eindringen zu können. Die allgemeinen Collegien hörte er bei Richelot, Bessel und Sohncke, bei Bessel auch theoretisch Astronomisches, bei Jacobi dessen Vorlesungen über Zahlentheorie, elliptische Functionen, partielle Differentialgleichungen und Dynamik, vor Allem dessen algebraische Theorien über Oberflächen zweiter Ordnung. „Die Vorlesungen Jacobi's bewegten sich“, so drückt sich Hesse einmal in einem Promemoria von 1853 aus, „sämmtlich ausserhalb des Gebietes der Lehrbücher in den Tiefen der Wissenschaft und umfassten nur solche Theile derselben, in denen er selbst schaffend aufgetreten war, mit der Tendenz die Gedanken an Stelle der Rechnung zu setzen. Indem er die jeder Theorie zu Grunde liegenden leitenden Gedanken festzustellen sich bemühte, entwickelte er seinen Zuhörern die Probleme mit einer Einfachheit, die Aehnliches zu erfinden hoffen liess.“ In diesen Vorlesungen, besonders aber in dem von Jacobi 1834 gegründeten mathematischen Seminar, wie in regem

persönlichem Umgange mit ihm, empfing Hesse den Antrieb zu seinen späteren Arbeiten: Jacobi gab ihm die algebraischen Instrumente an die Hand, die zu schärfen und zur Beherrschung der neuen, von den Geometern Poncelet, Bobillier, Chasles, Steiner, Plücker angeregten Ideen zu benutzen das Ziel werden sollte, dem Hesse mit immer grösserer Meisterschaft zustrebte. Auch in seiner späteren Lehrthätigkeit blieb Hesse jener Jacobi'schen Tendenz getreu, wie er denn schon bei der Habilitation die These aufstellte: „Praecipuum docentis officium est docere discendi vias". — Dass auch die physikalischen Experimentalvorlesungen Moser's und die theoretischen von Franz Neumann in Hesse einen verständnissvollen Theilnehmer fanden, beweist seine spätere praktische Bethätigung im physikalischen und chemischen Lehramt. Aber auch der Geschichte und Philologie, vor Allem den philosophischen Vorträgen Herbart's widmete Hesse in der Studienzeit sein Interesse. Als er im Mai 1837 das Oberlehrerexamen bestanden, erhielt er in Mathematik und Physik das Zeugniss für uneingeschränkten Unterricht auf den obersten Klassen des Gymnasiums, für die naturgeschichtlichen und philologisch-philosophischen Fächer wenigstens das Zeugniss allgemeiner Kenntnisse.

Schon der junge Hesse wusste sich in der Universitätszeit durch sein offenes humorvolles Wesen, durch seinen kräftigen, unantastbar reinen Charakter viele Freunde zu erwerben. Mit den Professoren Bessel und Hagen verknüpften ihn nahe Bande, und in deren Hause, wie in denen von Richelot, Jacobi und Neumann war er stets willkommen; v. Hippel und J. H. C. E. Schumann, der erstere später Notar, der andere Mathematiker am altstädtischen Gymnasium in Königsberg, blieben ihm Freunde für's Leben; einige Jahre darauf traten ihm auch C. W. Borchardt und der Schweizer E. Schinz nahe. Aber Hesse war nun nicht in der Lage, sich auf das Studium und das gesellige Leben zu beschränken; schon damals suchte er sich so viel als möglich unabhängig zu stellen und durch mathematische Privatstunden, zu denen er gut empfohlen war, wenigstens einen Theil seines Unterhalts zu erwerben; ja, er unterrichtete noch während der Studienzeit in der ehemaligen Knaut'schen Schule, einer Privatanstalt, welche sich eines ausgezeichneten Rufes erfreute und aus der Schüler wie Gust. Kirchhoff hervorgingen, der einige Jahre darauf wieder zu den Füssen Hesse's an der Universität sitzen sollte. Bei dem sogleich nach dem Examen abgelegten Probejahr am Kneiphöf'schen Stadtgymnasium bewies Hesse auch so viel pädagogischen Eifer und praktische Lehrbefähigung und zugleich solchen wissenschaftlichen Geist, dass ihm das Zeugniss ertheilt werden konnte: er berechtige in jeder Hinsicht zu sehr günstigen Erwartungen".

Jetzt fasste Hesse die Wanderlust; versehen mit einigen Ersparnissen und mit einem kleinen von der Mutter erbetenen Kapital — das ihm sein Pflichtgefühl noch bis in die Mannesjahre hinein zu verzinsen hiess —, zog er Anfang Mai 1838 hinaus, meist zu Fuss mit dem Ranzen auf dem Rücken, nach längerem Aufenthalt in Berlin und Dresden durch die sächsische Schweiz und das Fichtelgebirge, dann durch die österreichischen Lande bis in das Salzkammergut, über die Tauern nach Innsbruck und dem Oetzthal, und hinunter nach Venedig. Ueber den Lago Maggiore und

den Gotthard führte ihn der Weg auf die Schweizer Alpen und Seen, bis er Ende September, nach einem Besuch Strassburg's, den Rhein bis zum Rheingau herabfuhr und zum ersten mal auf der Heidelberger alten Neckarbrücke stand, in Träumen — nach seiner eigenen späteren Erzählung — von dem Glück, dort leben zu können. Mitte Oktober kehrte er in seine Vaterstadt zurück. Es war ihm eine Lust, unterwegs überall mit den Leuten gemüthlich und in deren Art zu verkehren, sich etwa bei seiner mechanischen Geschicklichkeit als gelegentlichen Uhrmacher zu erweisen oder den Erzählungen und Sagen des Volkes mit offenem Ohre zu lauschen; seine Natureindrücke und Erlebnisse hielt er in Tagebüchern und Briefen fest, die er auch da und dort mit Zeichnungen schmückte, wie denn sein Stift mit wenigen Strichen sowohl das Stimmungsvolle des Landschaftlichen, als das Figürliche in humorvollen Skizzen zu treffen wusste. Auch blieb ihm die Liebe zum Reisen sein Leben lang; kein Sommer, der ihn nicht an der See oder in den Bergen traf, in seiner Königsberger Zeit am häufigsten im kleinen Seebad Rauschen, während der Heidelberger Zeit viel im Schwarzwald, zuletzt meistens in Südtirol.

Gleich nach der Rückkehr von der Sommerwanderung von 1838 trat Hesse ein bescheidenes Lehramt an: an der neugegründeten Provinzial-Gewerbeschule in Königsberg führte er über drei Jahre lang die jungen Bauhandwerker in Physik und Chemie ein, wöchentlich 8 stündig für 80 Thaler jährlich, und gab sich dieser Thätigkeit mit grossem Eifer und Erfolg hin; aushilfsweise besorgte er auch für den erkrankten Direktor den grösseren Theil dieser Zeit hindurch die Direktion der Schule. Zu gleicher Zeit aber setzte er seine Arbeiten über Curven und Flächen zweiter Ordnung[1]), die schon in die Zeit von 1836 zurückdatiren, und für die ihm auf Antrag von Jacobi, Bessel und Neumann ein Seminarpreis zuerkannt worden war, mit solchem Erfolge fort, dass mit dem Gefühl der Befähigung zu mathematischer Speculation auch das Streben nach rein wissenschaftlicher Bethätigung in ihm alleinherrschend wurde. Obwohl verlobt, nahm er eine gut dotirte Stelle am Gymnasium zu Graudenz nicht an, sondern „schaffte sich einen höheren Wirkungskreis“. Er erhielt am 27. Januar 1840, mit einer Arbeit[2]), welche für ihr ganzes Gebiet bis heute massgebend geblieben ist und auch viele spätere Resultate Hesse's schon im Keime enthält, den Doctorgrad — „propter eximiam rerum mathematicarum cognitionem examine rigoroso et dissertatione De curvis et superficiebus secundi ordinis comprobatam“ — und habilitirte sich im April an der philosophischen Facultät der Universität Königsberg, mit derselben Arbeit, mit einem Vortrage über das isoperimetrische Problem und mit einer Dissertation, in welcher er schon auf die Tragweite seiner geometrischen Sätze für die Theorie der algebraischen Gleichungen hinwies. Bald darauf, 1841, gründete er auch mit Marie Sophie Emilie Dulk, der ältesten Tochter des dortigen Professors der Chemie Ferd. Phil. Dulk (zugleich Besitzers einer aus dem Ende des 16. Jahrhunderts

---

1) S. Nr. 1 dieses Bandes.
2) Nr. 2 dieses Bandes.

stammenden Apotheke), mütterlicherseits zur Hartung'schen Familie gehörig, eine Familie. Der als Dichter und Freidenker später sehr bekannt gewordene Albert Dulk war ihr jüngerer Bruder. — Die Stellung an der Gewerbeschule aber, in welcher Hesse zudem nicht die für ihn und das Gedeihen der Schule ihm nöthig scheinende Anerkennung von Seiten des Curatoriums gefunden, gab er mit Schluss des Jahres 1841 auf.

So warf er sich denn voll Eifer und Hoffnungen in die ersehnte akademische und wissenschaftliche Thätigkeit. Vom Sommer 1840 ab lehrte er an der Albertina über 15 Jahre lang. Er übernahm, erst neben Richelot, dann nach dem Weggang Jacobi's und dem Tode Bessel's allein, die allgemeinen geometrischen, analytischen und mechanischen Vorlesungen und las gewöhnlich in jedem Semester zwei Collegien, eines publice, eines privatim, beide meistens 4 stündig. Dazu kamen eine Reihe von Specialcollegien im Sinne Jacobi's, späterhin auch analytisch-geometrische Uebungen. Hesse wurde bald ein nothwendiges Glied in dem Lehrorganismus, der lange Jahre hindurch die Mathematik-Studirenden von weit und breit nach Königsberg führte. „Seine vielfältig erprobte Praxis", sagt Hesse selbst in dem schon genannten, an den Minister v. Raumer auf dessen Wunsch gerichteten Promemoria von 1853, „besteht darin, dass er nach Feststellung der ersten Begriffe der zu lesenden Wissenschaft die Schüler sogleich auf einen Standpunkt zu bringen sich bemüht, auf dem sie selbstschaffend weiter gehen können. Auf jeder folgenden Stufe, auf welche er sie hinaufführt, zeigt er ihnen die sich eröffnende Aussicht und giebt ihnen die Mittel an die Hand, dahin zu gelangen, wohin die Neigung den Einzelnen hinzieht. Die selbstständigen Arbeiten, die diese Lehrmethode bei fleissigen Schülern einbringt, bilden oft die schönsten Ergänzungen des ausgearbeiteten Vortrags." Es konnte nicht fehlen, dass seine gutbesuchten Vorlesungen, in Vorbereitung derer von Richelot, treffliche Schüler heranzogen, welche als Lehrer sich über ganz Deutschland und das Ausland verbreiteten. Zudem hatte Hesse von 1843/44 an Hörer wie Kirchhoff, Aronhold und Durège, von 1849/50 an Lipschitz, C. Neumann, Schroeter, vom Sommer 1850 an den ihm in Richtung und geistiger Nachfolge nächstverwandten Alfred Clebsch, der sich immer als eigentlicher Schüler Hesse's bekannt hat, und dem Hesse nicht nur bis zu dessen frühem Tode ein treuer Freund blieb, sondern den er auch willig und stolz in seiner Bedeutung anerkannte.

Die Königsberger Zeit war auch die Epoche der regsten wissenschaftlichen Productivität. Hier entstanden nach den Arbeiten über die Gebilde zweiten Grades von Mai 1842 an die über Curven dritter Ordnung mit der Entwicklung von fundamentalen algebraischen Formenbegriffen, und um dieselbe Zeit begannen auch die Untersuchungen über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung in einer ersten Richtung — die Gleichung einer die Berührungspunkte ausschneidenden Curve rein zu ermitteln —, während eine zweite Richtung — über die Gruppirung der Doppeltangenten durch kanonische Gleichungsformen Aufschluss zu erhalten — ebenfalls schon ein Jahr später glücklich angesetzt wurde. In diesen Problemen war es zugleich

der Wetteifer des Algebraikers Hesse mit dem Algebraiker Cayley, und des Analytikers Hesse mit dem Geometer Steiner, was Hesse zu rastloser Thätigkeit anspornte. Von welchen Gesichtspunkten aus Hesse letztere Rivalität betrachtete, zeigt ein Wort in einem Briefe an Aronhold (vom 1. November 1849): „Ich habe es mir zur besonderen Aufgabe gemacht, die Schätze der Geometrie für die Analysis auszubeuten, ich kann daher ohne die grossen Geometer gar nicht leben. Die Geometrie, als die ältere Schwester, hat vor der jüngeren, der Analysis, einen solchen Reichthum voraus, dass letztere noch lange an diesem Reichthum zu zehren haben wird, bevor sie ihn erschöpft. . . . Grüssen Sie Steiner herzlich von mir und versichern Sie ihn meiner Hochachtung und Liebe, mit der ich seine weltkundigen Schöpfungen umfasse und von seinen stillen Thaten Kenntniss nehme". — „In der Lösung meines Problems der Doppeltangenten" — schreibt Hesse am 8. Mai 1845 an Jacobi, nachdem er am 3. December 1844 ihm mitgetheilt, dass er diesem Problem den grössten Theil seiner Arbeitszeit widme, kanonische Formen und Systemseigenschaft der Berührungscurven habe, aber in den Gruppirungen noch alles „Wust" sei — „schreite ich nur sehr langsam vor, denn jeder Schritt vorwärts will mit höchster Anstrengung errungen sein." Und unter dem 27. Juni 1845: „ich hoffe durch dasselbe Mittel an's Ende zu kommen, durch welches Newton sein Gravitationsgesetz gefunden zu haben behauptete, nämlich dass er immer daran dachte." Hesse drang durch, aber bis zur Ausgestaltung dieser grossen Arbeit sollte ein volles Jahrzehnt vergehen.

Auch im Familien- und öffentlichen Leben fühlte Hesse sich behaglich. Zwar war ihm sein erstes Kind, ein Knabe, nur ein halbes Jahr alt entrissen worden; aber fünf Töchter blühten ihm nach und nach heran, und sein Haus hatte Familien- oder Freundschaftsbeziehungen — ausser den schon oben genannten — zu den Familien von Dulk und Hartung, sowie der seiner Schwester; auch konnte er sich 1846 ein eigenes Heim auf dem Steindamm erwerben. Dem städtischen Gemeinwesen und der Volksgesinnung widmete er nun ein tiefes Interesse; im Gefühl der Gemeinnützigkeit opferte er im Jahre 1848 viele Nächte der Bürgerwehr, und im Juli 1850 nahm er eine Wahl zum Stadtverordneten-Stellvertreter an. Religiös und politisch im Innersten frei gesinnt, hatte er für die Grösse des Vaterlandes und für den Staat ein warmes Herz: „die Dynastie", schreibt er bei dem Volksfest zur Enthüllung des Königsdenkmals 1851 an Minding, „hat in dem Herzen des Volkes tiefere Wurzeln, als dass ein Revolutionssturm sie zu erschüttern vermöchte."

Aber die äusseren Umstände blieben nicht ebenso günstig. Hesse, der seine eigenen Mittel nach und nach zusetzen musste, sah sich schon im Sommer 1844 vorübergehend genöthigt, den Unterricht in Physik und Chemie in den oberen Klassen der höheren Burgschule vertretungsweise zu übernehmen, und immer drängender wurde bei ihm der Wunsch nach einer Professur. Eine endlich am 31. October 1845 erfolgte Ernennung zum ausserordentlichen Professor, ohne Gehalt, aber mit der Verpflichtung zu Vorlesungen, examinatorischen und Disputir-Uebungen, und jedes Semester zu einem Gratiscolleg — erst von Januar 1846 an wurden ihm 300 Thaler

jährlicher Gehalt bewilligt —, wirkte wie ein Schlag auf den für die Wissenschaft begeisterten und anspruchslosen, aber stolzen und empfindlichen Mann.[1]) Jacobi wusste ihn zwar durch den Hinweis auf das Unpersönliche der Sache aus seiner Erregung momentan herauszureissen, aber das Gefühl des Druckes blieb, trotz der ihm alljährlich von der Regierung bewilligten kleinen Remunerationen. So sehen wir denn im Sommer 1850 seine Blicke auf eine Dorpater Professur gerichtet, zu der er von Facultät und Universitätsconseil in erster Linie vorgeschlagen ist, bis nach einem Jahre auch diese Hoffnung an dem Widerstand der russischen Regierung gegen den Ausländer scheitert; wir sehen ihn noch 1854, obwohl im Gehalt etwas aufgebessert, aber bei Vacanzen in Halle und Kiel 1853 nicht berücksichtigt, vorübergehend als Bewerber um eine Direktorstelle an der Gewerbeschule in Bremen. Auch eine Professur an dem neu zu gründenden eidgenössischen Polytechnikum, die ihm längere Zeit fast schon sicher schien, wurde damals, 1855, nicht besetzt. Endlich, im Herbst 1855, wird der im Dienste der Wissenschaft geführte Lebenskampf durch eine Berufung als ordentlicher Professor nach Halle a/S. — auf die durch Weggang Joachimsthal's erledigte Stelle — abgeschlossen, und damit sein Ziel, die Sicherung und Gleichstellung mit den übrigen Collegen, erreicht.

In Halle sollte Hesse nur von Neujahr 1856 ab bis zum Schlusse des Sommersemesters desselben Jahres seine Thätigkeit als Lehrer und Prüfungscommissär ausüben. Schon im Mai 1856 erhielt er einen Ruf an die Universität Heidelberg, den er annahm, ohne auch nur auf das an ihn während der Verhandlung und unter sehr guten Bedingungen erfolgte Anerbieten einer Professur am Gewerbeinstitut in Berlin irgendwie einzugehen. Versprach dieser ihm doch eine höhere akademische Thätigkeit, bei der er auch seiner wissenschaftlichen Forscheraufgabe voll treu bleiben könnte, an der Seite seines ehemaligen Schülers, der nun sein nächster College und Freund werden sollte, Gustav Kirchhoff. Schon im August siedelte er nach der Neckarstadt über.

In Lehrthätigkeit und persönlich eng verbunden, entfachten nun Kirchhoff, Bunsen, Helmholtz und Hesse in Heidelberg ein reges wissenschaftliches Leben, das Hesse einen beneidenswerthen Wirkungskreis schuf. Zwar erweiterte sich der Umfang seiner Vorlesungen wenig, aber sie wurden immer mehr zu einem einheitlichen Ganzen, möglichst auf algebraischer Grundlage, und die Seminarübungen, wenigstens in der analytischen Geometrie, wurden eine ständige Einrichtung. Die Vorlesungen waren gut besucht, die Hörerzahl, zwischen 10 und 20 schwankend, stieg gelegentlich (1864/65) auf 27, und zwar bestand der Kreis aus Mathematikern, Physikern, Physiologen und Chemikern, unter welchen nachher sehr viele in der Wissenschaft bekannt geworden

---

1) „The worthy pupil of his illustrious master Jacobi, but who, to the scandal of the mathematical world, remains still without a Chair in the University which he adorns with his presence and his name", wie Sylvester in den London Philosophical Transactions von 1853, vol. 143, schreibt.

sind. Von mathematischen Schülern seien nur einige genannt: unter den früheren Minnigerode und Zöppritz, etwas später Ad. Mayer, v. Drach, H. Stahl, E. Schroeder, Prym, E. Hess, O. Henrici, H. Weber, Hierholzer. Auch von den Herausgebern dieses Bandes haben drei (L., G., N.) das Glück gehabt, eine Reihe von Semestern hindurch von dem Meister in die Mathematik eingeführt zu werden und durch ihn in die analytisch-geometrische Richtung gewiesen worden zu sein; einer von ihnen (L.) hat auch noch kurze Zeit hindurch Hesse als Docent unterstützen können.

Es herrschte damals, wenigstens bis Mitte der 60er Jahre, noch eine enge Wechselbeziehung zwischen Heidelberg und Königsberg, und Hesse wirkte gern fördernd in der Richtung ein, dass die mathematischen und physikalischen Hörer nach der ersteren Universität die letztere bezogen. Er hatte überhaupt für so viele Schüler, welche sich trotz der etwas rauhen Aussenseite ihm persönlich nahen konnten, in grosser Herzensgüte ein wohlwollendes Interesse, das sich nicht nur auf deren Wissen, sondern auch auf ihren Charakter und ihre Lebensziele bezog, und wusste seine oft poetische Begeisterung für die „göttliche" Wissenschaft auch in ihnen zu entzünden. Uebrigens hinderte ihn dieser hohe Standpunkt nie, auch die Forderungen und den Druck des Materiellen zu beachten, und häufig stand er unter dem Gefühl, dass seine Resultate unter dem Erstrebten weit zurückblieben; aber eine wissenschaftliche Eroberung erhob ihn wieder.

Die wissenschaftliche Arbeit Hesse's mündet nun, von wenigem isolirt Auftretendem abgesehen, immer mehr in die Bearbeitung einzelner Punkte seiner Vorlesungen ein, und insbesondere in die Ausgestaltung derselben zu jenen Lehrbüchern der analytischen Geometrie (von 1861 an), welche durch ihre Einheitlichkeit in der deutschen mathematischen Literatur einzig dastehen. Ihr Verdienst beruht aber nicht allein darin: „sie sind", wie Clebsch einmal an Hesse schreibt (24. Februar 1862), „eigentlich das erste Lebenszeichen, welches die moderne Algebra ausserhalb des engeren Journalkreises von sich giebt", sie lehren durch das systematische Einführen und das consequente Festhalten weniger Begriffe den Anfänger denken und wirken dadurch noch mehr, als durch ihre andere wichtige Seite, die Vollendung des rein algebraischen Mechanismus. Hesse stand in Heidelberg auch auf der Höhe der äusseren Anerkennung: 1856 ernannte ihn die Göttinger Societät, 1859 die Berliner Akademie zum correspondirenden Mitgliede. Ausser zu dem Kreise der schon genannten Freunde zog ihn seine gesellige Natur und sein gemüthvoller Humor als eifriges Mitglied zu dem Kreise hin, der durch Scheffel seine Weihe empfing, zum „Engeren."[1] Seine Verhältnisse blieben, wie es damals in Heidelberg im Durchschnitt war, auch jetzt bescheidene; Anfangs drohte ihm bezüglich eines grösseren Theiles seines Vermögens, eines Gutes an der russischen Grenze, ein schwerer Verlust, aber auch das schon verloren Gegebene wurde durch glücklichen Verkauf des Grenzgutes wieder errungen, und

1) „Numero Acht" von Scheffel's Gaudeamus bezieht sich auf Hesse und seinen Freund, den Pfarrer Schmetzer von Ziegelhausen.

es trug dieser Fall dazu bei, Hesse zu angestrengter und lohnender schriftstellerischer Thätigkeit anzuregen. Er führte mit seiner Familie in der Bergheimerstrasse, die ihm einen freien Blick auf das Neckarthal bot, ein einfaches Leben, und immer mehr trat bei ihm der Zug der behaglichen Beschaulichkeit auf, der ihn zu einer charakteristischen und sympathischen Gestalt der Altstadt machte, bis ihm 1861 der Tod seines Töchterchens Grethchen, in dessen 10. Jahre, einen schweren, nie verwundenen Schlag gab.

Das badische Ministerium hat Hesse in seiner Bedeutung nicht hinreichend erkannt. Als ihm im Sommer 1868 die Stelle der mathematischen Professur an dem neu errichteten Münchener Polytechnikum angeboten wurde, der zu lieb er eine gleichzeitige Aussicht auf Bonn fallen liess, nahm er, der mit der Neckarstadt verwachsen geschienen, an, da die Regierung ihn nicht hielt, und zog nach Schluss des Sommersemesters zu neuem Wirken in eine neue Heimath. Auch in München wirkte er noch Gutes; er hat sich besonders an der Ordnung des mathematischen Unterrichts an der Hochschule betheiligt, sein Interesse für den Unterricht an den Realgymnasien bewies er durch Werkchen über die Determinanten und die Zahlen, auch hat er an den in den Jahren 1872 und 73 neu organisirten Prüfungen der Lehramts-Candidaten speciellen Antheil genommen. 1872 wurde Hesse, ohne dass er sich darum bewarb, durch die Zuerkennung des Steiner'schen Preises erfreut, 1869 durch die Wahl zum ausserordentlichen Mitglied der bayerischen Akademie der Wissenschaften (o. M. 1872), 1871 durch die zum Ehrenmitglied der Londoner Mathematical Society, 1872 erhielt er den bayerischen Michaelsorden. Die Künstlerstadt bot ihm in ihren Schätzen und in ihren Künstlerkreisen vielfache Befriedigung. Er hatte auch die Freude, noch einmal seine Schwester hier bei sich zu sehen: „ich wurde so liebewarm empfangen", spricht sie sich aus, „dass er mich wie eine Puppe auf seinen Armen die hohe Treppe zu seiner Wohnung, Karlsstrasse, mit Jubel in die Höhe trug . . . damals, 1871, noch ein so rüstiger, kräftiger Mann."

Aber der Keim einer Krankheit, eines Leberleidens, lag schon in ihm, und auch Karlsbad, das er mit Unterbrechung seiner Vorlesungen im Sommer 1874 aufgesucht hatte, hielt die zuletzt rasche Entwicklung nicht mehr auf. Nach München zurückgekehrt, verschied Otto Hesse am 4. August 1874. Seine Verfügung:[1]) „Ich will in dem Blumengarten meines Heidelberg's ruhen, zu Grabe geleitet von Schülern", wurde am 7. August ausgeführt: er ward, nach einem schon seit lange ausgesprochenen Wunsche, an der Seite seines Töchterchens unter den schönen Bäumen des Heidelberger Friedhofs bestattet, unter Betheiligung seiner dortigen Freunde und Schüler, und einer von München gekommenen Schülerdeputation, die einen Lorbeerkranz an seinem Sarge niederlegte und in rührend warmen Worten ihre Anhänglichkeit und Liebe zu dem Lehrer bezeugte.

---

1) Nach M. Cantor in Beilage z. Allg. Ztg. v. 14. Aug. 1874.

Auch die Wittwe überlebte ihn nicht lange. Sie starb 1877 und wurde ebenfalls in Heidelberg beigesetzt. Von den Kindern hat die älteste Tochter Emilie sich mit dem Münchener Bildhauer J. Zumbusch vermählt; nach ihrem Tode wurde die dritte Tochter Lina dessen Gattin. Die vierte Tochter Klara ist in der Schweiz an den Xylographen H. Scheu verheirathet, die zweite, Anna, lebt unvermählt in München.

Anmerkung zum Lebenslauf.

Seite 716/17. Es sei hier einer Arbeit gedacht, welcher Hesse einen grossen Theil seiner Zeit von 1843/44 widmete. Als Jacobi im Sommer 1843 leidend nach Italien ging, beauftragte er Hesse mit der Bearbeitung eines nicht druckfertigen Manuscripts von etwa 30 Druckbogen. Es enthielt eine grosse Reihe von Untersuchungen Jacobi's zur Theorie der Flächen zweiten Grades und zur Attractionstheorie der Ellipsoide. Hesse unterzog sich dieser Arbeit zunächst bezüglich eines ersten, die Flächen zweiten Grades und ihre Hauptaxen betreffenden Theiles; aber Jacobi,[1]) obwohl von der Gründlichkeit derselben befriedigt, konnte die Bearbeitung nicht benutzen: er hatte inzwischen seinen Plan, der ursprünglich auf ein Lehrbuch der analytischen Geometrie ging und an dessen Charakter Hesse nicht rühren wollte, geändert und wünschte nun nur noch das in den Papieren Neue zu einzelnen Aufsätzen verarbeitet zu sehen. Noch leidend, schrieb er in diesem Sinne unter dem 29. Mai 1845 an Hesse: „Vielleicht ginge es, dass Sie aus der Arbeit über Doppelintegrale irgend etwas isoliren und unabhängig von anderem darstellen können; z. B. die Anziehung des zwischen dem Ellipsoid und einem geraden Doppelkegel enthaltenen Stückes auf die Spitze, oder was Sie sonst meinen. Ich bin jetzt dafür, alles so viel wie möglich in kleine selbständige Abhandlungen zu theilen. So möchte ich in einer Abhandlung nur das zusammenstellen, was zur Anziehung der Ellipsoide in meiner directen Methode oder vielmehr in der Methode, die sich nur einfacher Substitutionen bedient, analytisch und synthetisch nothwendig gebraucht wird, wozu ich auch den Anfang gemacht, was aber wohl noch mehrere Jahre aufgeschoben werden wird. Auch müsste ich das darauf Bezügliche noch aus meinen Manuscripten haben. Schreiben Sie mir doch darüber, ob Sie eine Abhandlung isoliren und so fertig machen zu können glauben, dass ich sie sogleich drucken lassen kann . . .“

Hesse erklärte sich zur isolirten Bearbeitung jenes speciellen Attractionsproblems bereit, während er über die Angängigkeit einer ähnlichen Behandlung des allgemeinen Attractionsproblems der Ellipsoide für inneren und äusseren Punkt und der bezüglichen Doppelintegrale Zweifel äusserte; — „auch würde ich für die so lehrreichen

---

1) Brief von Borchardt an Hesse vom 4. März 1845. Manuscr. IV.

Behandlungsweisen des Problems der Hauptaxen mit den historischen Notizen . . . nichts Aequivalentes an die Stelle zu setzen haben", schreibt Hesse an Jacobi am 27. Juni 1845.

Auf eine Anfrage von Borchardt an Hesse im Februar 1862[1]) übergab letzterer die sämmtlichen noch in seinen Händen befindlichen Manuscripte Jacobi's, wie den von Hesse bearbeiteten Theil damals an Clebsch, der Hesse räth,[2]) diese Bearbeitung herauszugeben: „Der Einleitung nach scheint das Ganze doch ursprünglich eben nur auf jene Theile eingerichtet zu sein; die Zusammenstellung der Formeln für die Hauptaxen, die Anwendung auf die Tangentenkegel, und endlich auf die Attraction der Ellipsoide, wie das in der Einleitung gleichsam als Schema angegeben wird, bildet dann ein in sich selbst recht gut abgeschlossenes Ganze, und es käme bloss darauf an, etwa den Schluss noch ein wenig zu wenden. Auch scheinen mir diese Partieen das Interessanteste zu enthalten . . . Es wären (bei einer solchen Herausgabe) doch die vielen schönen Gedanken darin gerettet".

Ueber das weitere Schicksal der Jacobi'schen Manuscripte und der Bearbeitungen versagen unsere Quellen. In Hesse's Nachlass befindet sich nichts, und erschienen ist bis jetzt ebensowenig etwas davon. Vermuthlich bezieht sich die Schlussbemerkung Borchardt's in der Vorrede zu dem von ihm 1871 herausgegebenen dritten Bande der Mathematischen Werke Jacobi's theilweise auf diese geometrisch-algebraischen Papiere. Die neue Gesammtausgabe erwähnt dieselben überhaupt nicht.[3])

---

1) Brief von Borchardt an Hesse vom 17. Februar 1862. Manuscr. IV.

2) Brief von Clebsch an Hesse vom 24. Februar 1862. Manuscr. IV.

3) Vergl. übrigens Lejeune Dirichlet: „Gedächtnissrede auf Jacobi", im Journal f. d. r. u. a. Math., Bd. 52, S. 208, Z. 11—13 (Jacobi's Ges. Werke, Bd. I, herausgeg. 1881 von Borchardt, S. 18—19), und dessen „Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik", Journal f. d. r. u. a. Math., Bd. 58, S. 189, Fussnote.

IV.

Verzeichniss

der selbständig erschienenen Werke O. Hesse's.[1])

1. Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Erste Auflage 1861, zweite Auflage 1869, dritte Auflage, revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. S. Gundelfinger, Prof. an der Universität zu Tübingen (XVI u. 546 S.) 1876. Leipzig. B. G. Teubner.
2. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Erste Auflage 1865, zweite Auflage 1873, dritte Auflage, revidirt von Dr. S. Gundelfinger, Prof. am grossherzogl. Polytechnikum zu Darmstadt (VIII u. 230 S.) 1881. Leipzig. B. G. Teubner.
3. Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. Separatabdruck aus dem 11. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik (57 S.) 1866. Leipzig. B. G. Teubner.
4. Die vier Species. (35 S.) 1872. Leipzig. B. G. Teubner.
5. Die Determinanten elementar behandelt. Erste Auflage 1871, zweite Auflage (IV u. 48 S.) 1872. Leipzig. B. G. Teubner. Uebersetzt von V. Valeriani unter dem Titel: I determinanti elementarmente esposti. Giornale di Matematica. Band 10. 1872. Seite 217—229; 325—342.
6. Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Fortsetzung der Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises. Separatausgabe aus dem 19. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik. (52 S.) 1874. Leipzig. B. G. Teubner.

Hiezu aus dem Nachlass veröffentlicht von Prof. S. Gundelfinger:

7. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Band 21. 1876. Seite 1—27.

---

1) Das auf Seite 729 gegebene „Inhaltsverzeichniss" giebt eine Uebersicht über die sämmtlichen weiteren Veröffentlichungen O. Hesse's.

V.

Wissenschaftlicher Nachlass O. Hesse's,

im Besitz des Mathematischen Instituts der Technischen Hochschule zu München.

I. Manuscripte und Concepte zu den publicirten Abhandlungen und Lehrbüchern.

(Chronologisch geordnet.)

1. De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis.
Concept. J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 20, S. 285. Diese Ausgabe 2.

2. Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloïd.
Analytische Beweise der Sätze der Abhandlung im J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 24, S. 40. Diese Ausgabe 4.

3. De integratione aequationis differentialis partialis:

$$0 = A_1 - A_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - A_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \dots - A_{n-1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} + A_n \left\{ x_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \dots + x_{n-1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} - x_1 \right\},$$

designantibus $A_1, A_2 \dots A_n$ functiones quaslibet variabilium $x_1, x_2 \dots x_n$ lineares.
Manuscript. J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 25, S. 171. Diese Ausgabe 5.

4. Lineare Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung aus sieben gegebenen.
Bruchstücke. J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 26, S. 147. Diese Ausgabe 6.

5. Ueber die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht, und die Bestimmung ihres Grades.
Concept. J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 27, S. 1. Diese Ausgabe 7.

6. Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen zweiten Grades.
   Drei Concepte. J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 28, S. 68. Diese Ausgabe 8.
7. Ueber Wendepunkte der Curven dritter Ordnung.
   Résumé aus J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 28, S. 97. Diese Ausgabe 9.
8. Ueber Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.
   Drei Ausarbeitungen. J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 49, S. 279. Diese Ausgabe 25.
9. Transformation der Gleichung der Curve vierzehnten Grades, welche eine gegebene Curve vierten Grades in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneidet.
   Manuscript. J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 52, S. 97. Diese Ausgabe 26.
10. Bemerkungen zu: „Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig 1857.“
   Manuscript. Kritische Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik. 1858. S. 483. Diese Ausgabe 29.
11. L'équation cubique, de laquelle dépend la solution du problème d'homographie de Mr. Chasles.
   Manuscript. Comptes rendus, Bd. 54, S. 678. Diese Ausgabe 33.
12. Analytische Geometrie des Raumes.
   Zwei Bruchstücke. Leipzig; Teubner, 1861 und 1869.
13. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene.
   Ausarbeitungen und Bruchstücke. Leipzig; Teubner, 1865.
14. Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.
   Zwei Concepte. Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, Jahrg. 11, S. 369, 1866.
15. Die Determinanten, elementar behandelt.
   Manuscript. Leipzig; Teubner, 1871.
16. Ueber das Problem der drei Körper.
   Manuscript und Bruchstücke. Abh. der k. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 11, Abth. I, S. 53. Diese Ausgabe 42.
17. Ein Cyclus von Determinantengleichungen. (Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Problems.)
   Concepte. Abh. d. k. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 11, Abth. I, S. 175. Diese Ausgabe 43.
18. Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, und den confocalen Kegelschnitten.
   Manuscript und Bruchstücke. Abh. d. k. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 11, Abth. III, S. 1. Diese Ausgabe 44.

19. Construction der zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftlichen conjugirten Linien.
Manuscript. Diese Ausgabe, Nachlass 1.

20. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.
Manuscript und Bruchstücke. Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, Bd. 21, S. 1.

21. Aufgabe.
Manuscript. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 21, S. 73. Diese Ausgabe, Nachlass 3.

22. Ueber Sechsecke im Raume.
Manuscript. J. f. d. r. u. a. Math., Bd. 85, S. 304. Diese Ausgabe. Nachlass 4.

II. Ausarbeitungen und Entwürfe für Vorlesung und Seminar.

(Soweit möglich, chronologisch geordnet.)

1. Vorlesungen über Algebra. Wintersemester 1840/41.

2. Analytische Geometrie der Ebene. Autographirt.

3. Vorlesungen über die Encyclopädie der gesammten Mathematik. Wintersemester 1856/57.

4. Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Sommersemester 1857 mit Zusätzen vom Wintersemester 1859/60.

5. Vorlesung über Differentialrechnung.

6. Vorlesung über Differentialgleichungen mit Anwendungen auf die Geometrie.

7. Vorlesung über Variationsrechnung.

8. Vorlesung über analytische Mechanik, sowie ein Bruchstück einer Einleitung dazu.

9. Die Grundbegriffe der Algebra, als Einleitung zu einer Vorlesung über Differentialrechnung. Wintersemester 1868/69.

---

10. Sätze über Oberflächen zweiter Ordnung. (Seminaraufgaben.)

11. Seminaraufgaben über Differential- und Integralrechnung, sowie deren Anwendung auf die Geometrie. 1857/61.

12. Bruchstücke einer Vorlesung über Anwendung der Mathematik auf die Aufgaben des gewöhnlichen Lebens.

13. Bruchstücke von Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung.

14. Bruchstücke von Vorlesungen über bestimmte Integrale.

15. Bruchstück einer Vorlesung über die Elemente der Algebra.

III. Diarien, sowie sonstige Entwürfe, Concepte und Bruchstücke.

1. Diarium 1836/37.
2. Diarium 1837/44.
3. Diarium 1838.
4. Diarium 1839.
5. Diarium 1844/45.
6. Diarium 1845/47.
7. Diarium 1848/49.
8. Diarium 1850/51.

Ueber den wesentlichsten Inhalt dieser Diarien ist in den voranstehenden Anmerkungen zu Hesse's Abhandlungen berichtet.

9. Ueber das Princip der Dualität. Wohl aus den Studienjahren.
10. Einzelne Sätze über Oberflächen zweiter Ordnung, sphärische Kegelschnitte und Raumcurven dritter Ordnung. Aus den Studienjahren 1834/37.
11. Ueber die Bewegung eines Systems materieller Punkte um die Gleichgewichtslage. 1837.
12. Ueber die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung.
13. Vermischte Notizen über Geometrie, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mechanik.
14. Physikalische Notizen und Rechnungen.

IV. Briefe

von Bessel, Borchardt, Clebsch, Crelle, Cremona, Jacobi und Richelot.

VI.

Manuscripte O. Hesse's,

im Besitz der k. Hof- und Staatsbibliothek zu München.

Auf der k. Staatsbibliothek findet sich unter Cod. germ. 5285—5287 drei Manuscripte von O. Hesse über analytische Geometrie des Raumes, mit folgender Bemerkung Hesse's an die Bibliotheks-Verwaltung:

„Meine erste, an der Universität in Königsberg im Jahre 1840 gehaltene öffentliche Vorlesung über analytische Geometrie.

Nebenbei 1. die Ausarbeitung einer Vorlesung von Jacobi aus dem Jahre 1833 und 2. meine eigenen Untersuchungen über denselben Gegenstand als Stud. d. Mathematik.

Diese drei Schriftstücke sind der Anfang gewesen meiner Vorlesungen über „Analytische Geometrie des Raumes“, 2. Auflage. Leipzig. Teubner 1869.

Ich überlasse sie der Königl. Bibliothek zu jeder beliebigen Verfügung.

München, im Juni 1872.

Hochachtungsvoll und ergebenst

Dr. Otto Hesse.“

Inhalts-Verzeichniss.

Vorwort.

Abhandlungen.[1]

		Seite
1.	Ueber Oberflächen zweiter Ordnung [1838]	1
2.	De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis [1840]	21
3.	Ueber die Construction der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Punkte gegeben sind [1842]	51
4.	Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloïd [1842]	57
5.	De integratione aequationis differentialis partialis etc. [1843]	63
6.	Ueber die lineäre Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpunkte derselben gegeben sind [1843]	73
7.	Ueber die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht, und die Bestimmung ihres Grades [1844]	83
8.	Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln [1844]	89
9.	Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung [1844]	123
10.	Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen neunten Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben etc. [1847]	137
11.	Ueber Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren [1848]	155
12.	Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung [1849]	193
13.	Eigenschaften der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe [1849]	211
14.	Transformation einer beliebigen homogenen Function dritten Grades von zwei Variabeln durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln, in eine Form, welche nur die dritten Potenzen der neuen Variabeln enthält [1849]	217
15.	Transformation einer beliebigen gegebenen homogenen Function vierten Grades von zwei Variabeln durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln in die Form, welche nur die geraden Potenzen der neuen Variabeln enthält [1851]	223
16.	Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen sechsten Grades, zwischen deren Wurzeln etc. [1851]	247

1) Die eingeklammerten Jahreszahlen bezeichnen die Zeit der (ersten) Veröffentlichung. Die Zeit des Abschlusses der Arbeiten ist durch die Hesse'sche Datirung am Ende jeder einzelnen Abhandlung gegeben.

Seite

17. Eine Bemerkung zum Pascal'schen Theorem [1851] 253
18. Auszug dreier Schreiben von O. Hesse an C. G. J. Jacobi und eines Schreibens von C. G. J. Jacobi an O. Hesse [1850] 257
19. Ueber die Wendepunkte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungs-Ebenen der Curven von doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen [1851] 263
20. Ueber die ganzen homogenen Functionen von der dritten und vierten Ordnung zwischen drei Variabeln [1851] 279
21. Ueber die Bedingung, unter welcher eine homogene ganze Function von n unabhängigen Variabeln durch lineäre Substitutionen von n andern unabhängigen Variabeln auf eine homogene Function sich zurückführen lässt, die eine Variable weniger enthält [1851] 289
22. Ueber die geometrische Bedeutung der lineären Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten einer Gleichung zweiten Grades [1853] 297
23. Ueber die Eigenschaften der lineären Substitutionen. durch welche eine homogene ganze Function zweiten Grades, welche nur die Quadrate von vier Variabeln enthält, in eine Function von derselben Form transformirt wird [1853] . 307
24. Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung [1855] 319
25. Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung [1855] . . . 345
26. Transformation der Gleichung der Curven vierzehnten Grades, welche eine gegebene Curve vierten Grades in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneiden [1856] 405
27. Ueber die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale [1857] 413
28. Zu den Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung [1858] 469
29. Bemerkungen zu: „Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig 1857" [1858] 475
30. Zur Theorie der ganzen homogenen Functionen [1859] 481
31. Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Functionen des zweiten Grades in andere transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten [1860] 489
32. Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes in die Summe von Quadraten [1862] 497
33. Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung eines Problems der Homographie von M. Chasles abhängt [1862] 507
34. Jacob Steiner [1863] 513
35. Zur Involution [1864] 515
36. Transformations-Formeln für rechtwinklige Raum-Coordinaten [1864] . . 523
37. Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten [1866] 529
38. Ein Uebertragungsprincip [1866] 531
39. Ueber die Reciprocität der Pascal-Steiner'schen und der Kirkman-Cayley-Salmon'schen Sätze von dem Hexagrammum mysticum [1868] 539

Seite

40. Ein Determinantensatz [1868] 557
41. Note über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung [1870] 561
42. Ueber das Problem der drei Körper [1872] 563
43. Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen [1873] 585
44. Die Reciprocität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Secante haben, und den confocalen Kegelschnitten [1874] 599

Aus dem Nachlass.[1]

1. Construction der zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftlichen conjugirten Linien [1837] 619
2. Beweis einiger Sätze von Chasles [1845] 637
3. Aufgabe [1866; 1875] 649
4. Ueber Sechsecke im Raume [um 1866; 1878] 651
5. Ueber die linearen homogenen Substitutionen, durch welche die Summe der Quadrate von vier Variabeln transformirt wird in die Summe der Quadrate der vier substituirten Variabeln [um 1872; 1886] 663

Anhang.

I. Anmerkungen zu den Abhandlungen 685
II. Anmerkungen zum Nachlass 709
III. Otto Hesse's Lebenslauf 711
IV. Verzeichniss der selbständig erschienenen Werke O. Hesse's . . . 723
V. Wissenschaftlicher Nachlass O. Hesse's, im Besitz des mathematischen Instituts der technischen Hochschule zu München:
   I. Manuscripte und Concepte zu den publicirten Abhandlungen und Lehrbüchern 724
   II. Ausarbeitungen und Entwürfe für Vorlesung und Seminar . . 726
   III. Diarien, sowie sonstige Entwürfe, Concepte und Bruchstücke . . 727
   IV. Briefe 727
VI. Manuscripte O. Hesse's, im Besitz der k. Hof- und Staatsbibliothek zu München 728

---

1) Die den (hier zum ersten Male veröffentlichten) Nummern 1 und 2 beigefügten Jahreszahlen bezeichnen die Zeit der Abfassung der Abhandlungen; bei Nr. 3, 4 und 5 ist ausserdem noch die Zeit der Veröffentlichung (durch Gundelfinger bezw. Caspary) angegeben.

Druckfehler.

Seite 3, Zeile 15 v. u. setze: statt ; .
„ 40, „ 1 v. o. lies planorum statt punctorum.
„ 42, „ 16 v. u. lies hexagrammate statt hexogrammate.
„ 42, „ 2 v. u. ist ; zu streichen.
„ 43, „ 1 v. u. lies $a'b$ statt $a'b'$.
„ 65, „ 11 v. u. lies nec restet nisi statt ac restet.
„ 71, „ 5 v. u. im Nenner im ersten Summanden lies γ_1 statt γ'.
„ 84, „ 5 v. u. lies A_{m-1} statt A_{n-1}.
„ 86, „ 14 v. u. lies α_3 statt α_2.
„ 95, „ 5 v. o. lies Bézout statt Bezout.
„ 101, im Columnentitel lies 8 statt 6.
„ 106, Zeile 7 v. u. lies (32*) statt 32*.
„ 203 und 206, im Columnentitel lies 12 statt 11.
„ 290 ist dreimal Δ in ∇ zu corrigiren.
„ 312, Zeile 5 v. u. im Coëfficienten von b_{34} lies a_4^λ statt a_2^λ.
„ 360, „ 9 v. o. lies der statt einer.
„ 404, letzte Zeile lies § 16 statt § 14.
„ 405, Zeile 2 des Textes lies Curve statt Curven.
„ 478, im Columnentitel lies 29 statt 28.
„ 478, Zeile 10 v. u. lies $b_\lambda^{\lambda'}$ statt $b_{\lambda'}^{\lambda}$.
„ 491, in Formel (7) rechts im ersten Gliede lies $a'_\varkappa$ statt a'.
„ 494, Zeile 13 v. o. in „gewissse“ ein s zu streichen.
„ 536, „ 15 v. o. lies sechstes statt sechtes.
„ 555, „ 7 v. o. lies Resultante statt Determinante.
„ 583, „ 1 v. o. und 5 v. u. lies (43) statt (47).
„ 590, „ 6 v. u. in dem Zeichen der Determinante R lies u_n^n statt u_m^m.
„ 607, „ 4 v. o. lies Polaren von (9*) statt Polaren (9*).
„ 623, „ 4 v. u. lies 4 statt 3.
„ 661, „ 3 v. u. in der ersten Gleichung im Nenner der rechten Seite lies $\varphi(4)$ statt $\mu(4)$.
„ 712, „ 7 u. 8 v. o. sind die Jahreszahlen 1599 und 1730 zu ersetzen durch 1731/32.